INSA 1er cycle

Analyse

Fonctions d'une variable : limites, continuité

Exercice 1 On rappelle que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$. Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(x^2-x^2\cos x)}{(1-\sqrt{\cos x})\ln(\cos x)}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}-e^{\tan x}}{\sin x-\tan x}$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^{(3^x)}}{3^{(2^x)}}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\sqrt{\cos(2x)}}{\sin^2 x}$ e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}$ f) $\lim\limits_{x\to 2}(2^x+3^x-12)^{\tan\frac{\pi x}{4}}$

Exercice 2 Soit f la fonction définie par

$$f(x)=\frac{x^3-2x^2-x+2}{|x|-1}.$$

1. Donner l'ensemble de définition de f et justifier la continuité de f sur celui-ci.
2. Calculer les limites $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to -1}f(x)$.
3. La fonction f est-elle prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$? Si oui, donner sous une forme simple (sans fraction) la fonction qui la prolonge.
4. Tracer le graphe de f.

Exercice 3 Soit $f:\mathbb{R}\longmapsto\mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x)=E(x)+[x-E(x)]^2$ où E désigne la fonction partie entière.

1. Déterminer l'ensemble des points de continuité de f.
2. Trouver une relation entre $f(x+1)$ et $f(x)$, puis tracer le graphe de f.

Exercice 4 Soit $f:\mathbb{R}\longmapsto\mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x)=\begin{cases} x\,E\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x\neq 0,\\ 1 & \text{si } x=0.\end{cases}$$

1. Montrer que f est une fonction linéaire par morceaux sur tout sous-ensemble de $\mathbb{R}$ de la forme $\mathbb{R}\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]$, $\varepsilon>0$.
2. En utilisant l'encadrement $E(x)\leqslant x<E(x)+1$, montrer que f est continue en 0.
3. Déterminer alors l'ensemble des points de continuité de f.
4. Tracer avec précision le graphe de f.

Exercice 5

1. Calculer la limite double $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}[\lim\limits_{m\to+\infty}|\cos(n!\pi x)|^m]$ pour tout $x\in\mathbb{R}$. On distinguera les cas $x\in\mathbb{Q}$ et $x\notin\mathbb{Q}$.
2. On définit ainsi une fonction $f:\mathbb{R}\longmapsto\mathbb{R}$. Montrer qu'il n'existe aucun point de $\mathbb{R}$ où f est continue.

Exercice 6 Soient a et b deux réels tels que $a<b$.

1. Soit $f:[a,b]\longrightarrow[a,b]$ une application continue. Montrer que f admet au moins un point fixe sur $[a,b]$, i.e. il existe un $x\in[a,b]$ tel que $f(x)=x$. On pourra introduire l'application g définie par $g(x)=f(x)-x$.
2. Soit $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ une application continue.
   (a) Montrer qu'il existe $x\in[a,b]$ tel que $f(x+\frac{b-a}{2})=f(x)+\frac{f(b)-f(a)}{2}$. On pourra introduire l'application $g:[a,\frac{a+b}{2}]\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par $g(x)=f(x+\frac{b-a}{2})-f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{2}$.

   Application : un véhicule parcourt une distance de D km en un temps de T minutes. Il existe alors un laps de temps de $T/2$ minutes durant lequel il parcourt la distance $D/2$ km.

   (b) Cas particulier : on suppose que $f(a)=f(b)$. Alors il existe un $x\in[a,b]$ tel que $f(x)=f(x+\frac{b-a}{2})$.

   Application : à chaque instant, il existe deux points diamètralement opposés de l'équateur en lesquels la température est identique...
3. Soit $f,g:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ deux applications continues telles que pour tout $x\in[a,b]$, $f(x)<g(x)$. Montrer qu'il existe $\varepsilon>0$ tel que pour tout $x\in[a,b]$, $f(x)+\varepsilon\leqslant g(x)$. Le résultat est-t-il encore valable si on remplace $[a,b]$ par un intervalle ouvert ? non borné ?

Exercice 7

1. Déterminer la partie principale relativement à l'échelle de comparaison $\{x\mapsto x^n, n\in\mathbb{N}\}$ au voisinage de 0 des fonctions définies par
   a) $f(x)=\sin x+a\tan x$, $a\in\mathbb{R}$ étant fixé
   b) $f(x)=\dfrac{\tan(x^ne^x-x^n)}{\sqrt{\ln(x+1)+1}-1}$, $n\in\mathbb{N}$ étant fixé
2. Déterminer la partie principale relativement à l'échelle de comparaison $\{x\mapsto(x-\frac{1}{2})^n, n\in\mathbb{Z}\}$ au voisinage de $\frac{1}{2}$ des fonctions définies par
   a) $f(x)=(2x^2-3x+1)\tan^2(\pi x)$
   b) $f(x)=\dfrac{\sin(\pi x)-\sqrt{\cos[\pi(2x-1)]}}{\cos(\pi x)}$
3. Déterminer la partie principale relativement à l'échelle de comparaison $\{x\mapsto x^\alpha, \alpha\in\mathbb{R}\}$ au voisinage de $+\infty$ des fonctions définies par
   a) $f(x)=\sqrt{x^3+a\,x^2+b\,x+c}-d\,x\sqrt{x+2}$, $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ étant fixés
   b) $f(x)=\dfrac{x^\alpha\,e^x+x^{1515}-1789\,\ln x}{x+(\sqrt{x^3+x^2}-\sqrt{x^3})\,\mathrm{ch}\,x}$, $\alpha\in\mathbb{R}$ étant fixé