INSA 1er cycle

Analyse

Fonctions d'une variable : dérivabilité

Exercice 1 On considère les fonctions f, g et h définies pour $x \neq 0$ selon
$$f(x) = \sin\frac{1}{x}, \quad g(x) = x\,\sin\frac{1}{x}, \quad h(x) = x^2\,\sin\frac{1}{x}$$
et pour $x = 0$, $f(0) = g(0) = h(0) = 0$. Pour chacune des fonctions f, g et h,

1. déterminer l'ensemble des points où la fonction est continue ;
2. déterminer l'ensemble des points où la fonction est dérivable ;
3. déterminer l'ensemble des points où la fonction est de classe $\mathcal{C}^1$;
4. étudier les variations de la fonction. On sera amené à étudier graphiquement la répartition des solutions de l'équation $\tan u = u$ pour l'étude de g' et de l'équation $\tan u = u/2$ pour celle de h' ;
5. étudier la nature de la branche infinie de la courbe représentative lorsqu'il y en a une ;
6. tracer sa représentation graphique.

Exercice 2 Soit $\alpha \geqslant 1$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$.

1. On suppose $\alpha > 1$. Prouver à l'aide du théorème des accroissements finis l'inégalité $\forall x > 1,\ \dfrac{1}{x^\alpha} \leqslant \dfrac{1}{\alpha-1}\Big[\dfrac{1}{(x-1)^{\alpha-1}} - \dfrac{1}{x^{\alpha-1}}\Big]$. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée, puis convergente.
2. On suppose $\alpha = 1$. Prouver à l'aide du théorème des accroissements finis l'encadrement $\forall x > 1,\ \ln(x+1) - \ln x < \dfrac{1}{x} < \ln x - \ln(x-1)$. En déduire un encadrement puis un équivalent simple de u_n lorsque $n \to +\infty$ à l'aide de la fonction ln. Que vaut $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$?

Exercice 3 (Formule des trapèzes)

Soient f une application de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$ et g l'application affine telle que $f(a) = g(a)$ et $f(b) = g(b)$. On pose $I = \int_a^b f(t)\,dt$ et $J = \int_a^b g(t)\,dt$.

1. Déterminer l'expression de $g(x)$ puis calculer l'intégrale J.
2. On souhaite majorer l'erreur commise lorsque l'on approche I par J. Pour cela, on introduit l'application φ définie sur $[a,b]$ par
$$\varphi(x) = \int_a^x f(t)\,dt - \frac{1}{2}\,(x-a)\,[f(x) + f(a)] - K(x-a)^3$$
où K est une constante déterminée par la condition $\varphi(b) = 0$.
   (a) Calculer φ' et φ''.
   (b) Par utilisations répétées du théorème de Rolle, prouver l'existence d'un réel $c \in]a,b[$ tel que $K = -\frac{1}{12}\,f''(c)$.
   (c) En déduire que $I = J - \frac{1}{12}\,(b-a)^3 f''(c)$.
3. On introduit une subdivision $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ de l'intervalle $[a,b]$ en posant $x_k = a + k\,\frac{b-a}{n}$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$. Vérifier que l'on a
$$\int_a^b f(t)\,dt = \frac{b-a}{2n}\Big[f(a) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(b)\Big] + \varepsilon_n$$
avec $|\varepsilon_n| \leqslant \dfrac{(b-a)^3}{12n^2} \displaystyle\sup_{x\in[a,b]} |f''(x)|$.
4. Application numérique : à partir de quelle valeur de n peut-on obtenir une approximation de $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t+1} = \ln 2$ à l'aide de la formule précédente avec une erreur inférieure à 10^{-6} ?

Exercice 4 (Polynômes d'Hermite)

Soit $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = e^{-x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Calculer la dérivée de f.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer par récurrence qu'il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ de degré n tel que la dérivée n-ième de f s'exprime selon la formule $f^{(n)}(x) = P_n(x)f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Écrire les polynômes P_1, P_2 et P_3.
3. Calculer les limites de $f^{(n)}$ en $-\infty$ et $+\infty$.
4. En utilisant le théorème de Rolle plusieurs fois, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^{(n)}$ s'annule en exactement n points de $\mathbb{R}$. Que peut-on en déduire pour les racines du polynôme P_n ?
5. En appliquant la formule de Leibniz à f', prouver la relation de récurrence
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ P_{n+2}(x) + 2x\,P_{n+1}(x) + 2(n+1)\,P_n(x) = 0.$$
6. En dérivant la relation $f^{(n)}(x) = P_n(x)f(x)$ et en utilisant la relation précédente, montrer que l'on a l'égalité $P'_{n+1} + 2(n+1)P_n = 0$, puis la suivante : $P''_{n+2} - 4(n+2)(n+1)P_n = 0$.
7. Déduire des deux questions précédentes que P_n satisfait à l'équation différentielle (*équation d'Hermite*) :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ P''_n(x) - 2x\,P'_n(x) + 2n\,P_n(x) = 0.$$

Exercice 5 La formule de Taylor-Lagrange assure l'existence d'une fonction θ telle que $\operatorname{sh} x = x + \frac{1}{6}\,x^3 \operatorname{ch}(\theta(x)x)$ et la formule de Taylor-Young donne $\operatorname{sh}(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{1}{6}\,x^3 + \frac{1}{120}\,x^5 + o(x^5)$.

1. (a) Donner deux équivalents simples de $\operatorname{ch}(\theta(x)x) - 1$ en 0.
   (b) En déduire la limite $\displaystyle\lim_{x\to 0} \theta(x)$.
2. (a) Expliciter $\theta(x)$.
   (b) En utilisant la fonction ln, déterminer un équivalent de $\operatorname{argch}(1+u)$ lorsque $u \to 0^+$ de la forme Au^α.
   (c) Retrouver alors la valeur de $\displaystyle\lim_{x\to 0} \theta(x)$.