INSA 1er cycle

Algèbre

Fractions rationnelles

Exercice 1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}$ puis sur $\mathbb{R}$ la fraction rationnelle $\dfrac{1}{X^n - 1}$.
2. Décomposer en éléments simples directement sur $\mathbb{R}$ la fraction rationnelle $F = \dfrac{X^{2n+1}}{(X^2+1)^n}$. On pourra écrire $X^2 = (X^2+1) - 1$. Déterminer une primitive de F sur $\mathbb{R}$.
3. Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ la fraction rationnelle $F = \dfrac{X^8+1}{X^3(X-1)^4}$. Déterminer une primitive de F sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$.

1. Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ la fraction rationnelle

$$F = \frac{p\,!}{X(X+1)(X+2)\dots(X+p)}.$$

2. Montrer que F admet une primitive de la forme $\ln|G|$ où G est une fraction rationnelle réelle. Quel est sont degré ?
3. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}$ (elle est de la forme $a + \dfrac{b}{(n+1)(n+2)(n+3)}$) puis donner la valeur de sa limite quand $n \to +\infty$.

Exercice 3 Soient a, b, α, β quatre nombres complexes tous distincts. Trouver une relation nécessaire et suffisante pour que l'on puisse trouver des nombres complexes A et B tels que

$$\frac{(X-\alpha)(X-\beta)}{(X-a)^2(X-b)^2} = \frac{A}{(X-a)^2} + \frac{B}{(X-b)^2}$$

Déterminer alors les nombres A et B.

INSA 1er cycle

Analyse

Nombres réels

Exercice 1 Écrire sous la forme d'une fraction le réel dont le développement décimal est $3,\overline{142857} = 3,142857142857\dots$

Exercice 2 Soient A et B deux parties non vides majorées de $\mathbb{R}$. On définit le sous-ensemble $A+B$ de $\mathbb{R}$ par $A+B = \{a+b,\ a \in A,\ b \in B\}$. Montrer que l'on a $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$.

Exemple : on choisit $A = B = \{\frac{n-1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$. Écrire l'ensemble $A+B$ puis déterminer sa borne supérieure.

Exercice 3 Pour une application majorée $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$, on définit sa borne supérieure par $\sup\limits_{z\in E} \varphi(z) = \sup\{\varphi(z), z \in E\} = \sup \varphi(E)$.

Soient X, Y deux ensembles non vides et $f : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ une application majorée. Montrer que $\sup\limits_{(x,y)\in X\times Y} f(x,y) = \sup\limits_{x\in X}[\sup\limits_{y\in Y} f(x,y)]$ (indication : on posera $\alpha = \sup\limits_{(x,y)\in X\times Y} f(x,y)$ et $g(x) = \sup\limits_{y\in Y} f(x,y)$ et l'on montrera que $\sup\limits_{x\in X} g(x) = \alpha$).

Exemple : soit a, b, c, d des réels positifs tels que $ad - bc > 0$ et $\varphi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\varphi(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$. Montrer que $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^+} \varphi(x) = \dfrac{a}{c}$. On considère ensuite l'application $f : (\mathbb{R}^+)^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2$, $f(x,y) = \dfrac{2xy+x+y}{xy+x+y+1}$. Calculer $\sup\limits_{(x,y)\in(\mathbb{R}^+)^2} f(x,y)$.

Exercice 4

1. Montrer que l'ensemble des nombres rationnels est dense dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ a < b \Longrightarrow]a,b[\cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$. On pourra utiliser la suite de nombres $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $x_n = \dfrac{E(na)+1}{n}$.
2. Montrer de même que l'ensemble des nombres irrationnels est dense dans $\mathbb{R}$. On pourra utiliser la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $y_n = \dfrac{E(na\sqrt{2})+1}{n\sqrt{2}}$.

Exercice 5 Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel qui n'est pas le carré d'un rationnel. On considère l'application $f : \mathbb{Q}^+ \longrightarrow \mathbb{Q}^+$ définie par $f(x) = \dfrac{x(x^2+3n)}{3x^2+n}$.

1. Calculer $f(x) - x$ et $f(x)^2 - n$.
2. Montrer les implications suivantes : $\begin{cases} \forall x \in \mathbb{Q}^+, x^2 < n \Longrightarrow x^2 < f(x)^2 < n, \\ \forall x \in \mathbb{Q}^+, x^2 > n \Longrightarrow x^2 > f(x)^2 > n. \end{cases}$
3. En déduire que l'ensemble $A = \{x \in \mathbb{Q}^+ : x^2 < n\}$ n'admet pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}^+$ (indication : supposer que A admette une borne supérieure α et examiner les possibilités $\alpha \in A$ et $\alpha \notin A$).