

# Généralités sur les fonctions

**Exercice 1** Pour chacune des fonctions suivantes, préciser l'ensemble de définition et étudier la parité.

$$f_1(x) = \cos(x^3), \quad f_2(x) = e^{\cos(x)}, \quad f_3(x) = e^{\sin(x)} - 1, \quad f_4(x) = \sqrt{x^4 - 4x^2 + 3},$$

$$f_5(x) = \tan\left(\frac{1}{x}\right), \quad f_6(x) = \sin(x) \operatorname{ch}(\tan x), \quad f_7(x) = \frac{1+x^2}{\operatorname{sh}(x)}, \quad f_8(x) = \frac{1+e^x}{1-e^x}.$$

**Exercice 2** Pour chacune des fonctions suivantes, tracer sans calcul l'allure la courbe représentative.

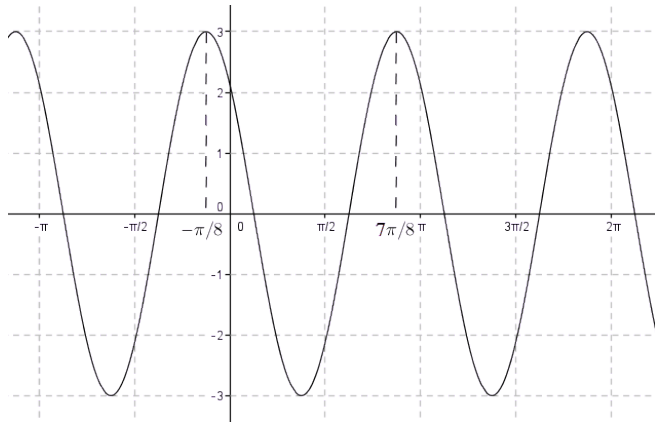
$$f_1(x) = (x-2)^3, \quad f_2(x) = \sqrt{-x}, \quad f_3(x) = -\frac{1}{x+1}, \quad f_4(x) = 3 \sin(x) \text{ sur } [0, 2\pi],$$

$$f_5(x) = \sin(2x) \text{ sur } [0, 2\pi], \quad f_6(x) = 2e^{x-3}, \quad f_7(x) = 1 + \operatorname{sh}(-x).$$

**Exercice 3** Pour chacune des fonctions suivantes, préciser l'ensemble de définition et déterminer les variations sans calcul de dérivée :

$$f_1(x) = \ln(1+e^{-x}), \quad f_2(x) = \operatorname{ch}(\ln(x-2)), \quad f_3(x) = (\operatorname{sh}(\sqrt{x+3}))^3, \quad f_4(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}.$$

**Exercice 4** Le tracé ci-dessous est la courbe représentative d'une fonction de la forme  $t \mapsto A \cos(\omega t + \varphi)$ , où  $A, \omega, \varphi$  sont des réels positifs. Déterminer  $A, \omega, \varphi$  à l'aide du graphique.



**Exercice 5** On considère les applications  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définies pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par  $f(x) = 3 \cos(2x - \pi/4)$  et  $g(x) = |f(x)|$ .

1. Montrer que  $f$  est périodique et en déterminer une période  $T > 0$ .
2. Résoudre l'équation  $f(x) = 0$  dans  $\mathbb{R}$ .
3. Étudier la parité des applications  $x \mapsto f(x + \pi/8)$  et  $x \mapsto f(x + 3\pi/8)$ .
4. Partant du graphe de la fonction cosinus, tracer les graphes de  $f$  et  $g$  sur  $[-T, 2T]$ .

**Exercice 6 (Fonctions « puissances »)**

1. Simplifier les expressions suivantes :  $(\frac{1}{49})^{-3/2}$ ,  $(\frac{1}{32})^{-0,8}$ ,  $(\frac{32}{243})^{-2/5}$ ,  $(\frac{27}{2\sqrt{2}})^{2/3}$ .
2. Donner l'allure des représentations graphiques des fonctions suivantes :  
 $f_1 : x \mapsto x^{0,25}$ ,  $f_2 : x \mapsto x^{-0,7}$ ,  $f_3 : x \mapsto x^{\sqrt{2}}$ ,  $f_4 : x \mapsto \pi^x$ ,  $f_5 : x \mapsto (\frac{1}{3})^x$ .

**Exercice 7 (Fonction « tangente hyperbolique »)**

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on pose  $\operatorname{th}(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}$ .

1. Étudier la parité de  $\operatorname{th}$ .
2. Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\operatorname{th}(x) = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$ .  
En déduire la limite de  $\operatorname{th}$  en  $+\infty$ , puis en  $-\infty$ . En déduire également son sens de variation sur  $\mathbb{R}$ .
3. Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\operatorname{th}'(x) = 1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$ .
4. Tracer la courbe représentative de  $\operatorname{th}$  en précisant la tangente au point d'abscisse 0 et les asymptotes éventuelles en  $+\infty$  et  $-\infty$ .
5. Préciser sans justification l'ensemble  $\operatorname{th}(\mathbb{R})$ .

**Exercice 8 (Fonctions « trigonométriques réciproques »)**

1. Calculer les nombres  $\arccos(0)$ ,  $\arccos(\frac{\sqrt{2}}{2})$ ,  $\arcsin(0)$ ,  $\arcsin(1)$ ,  $\arcsin(\frac{1}{2})$ ,  $\arcsin(\frac{\sqrt{3}}{2})$ ,  $\arctan(1)$ ,  $\arctan(-\sqrt{3})$ ,  $\sin(\arcsin(-0,2))$ ,  $\arcsin(\sin(-\frac{11\pi}{7}))$ ,  $\arccos(\cos(\frac{7\pi}{5}))$ ,  $\tan(\arctan(4))$ ,  $\arctan(\tan(4))$ .
2. Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :  
 $f_1 : x \mapsto \arcsin(2x - 1)$ ,  $f_2 : x \mapsto \arccos(2x^2 - 1)$ ,  $f_3 : x \mapsto \arctan\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$

**Exercice 9 (Fonction « partie entière »)**

Pour tout réel  $x \in \mathbb{R}$ , il existe un unique entier  $n$  tel que  $n \leq x < n + 1$ . On note cet entier  $E(x)$ . L'application  $E : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$  est appelée « fonction partie entière ».

1. Calculer  $E(5)$ ,  $E(-5)$ ,  $E(0,02)$ ,  $E(-0,02)$ ,  $E(3,8)$ ,  $E(-3,8)$ . La fonction  $E$  est-elle impaire ?
2. Soit  $x \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{Z}$ . Exprimer  $E(x + n)$  en fonction de  $E(x)$  et  $n$ .
3. Tracer le graphe de l'application  $E$  sur  $\mathbb{R}$ .
4. Montrer que les applications  $f : x \mapsto x - E(x)$  et  $g : x \mapsto E(4x) - 4E(x)$  sont périodiques et tracer leur graphe sur  $[-2, 2]$ .

**Exercice 10** Pour chacune des applications suivantes, dire si elle est injective, surjective, bijective.

$$f_1 : \begin{cases} \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ n \mapsto n + 1 \end{cases} \quad f_2 : \begin{cases} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \\ n \mapsto n + 1 \end{cases} \quad f_3 : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \cos x \end{cases}$$

$$f_4 : \begin{cases} [0, \pi] \rightarrow [-1, 1] \\ x \mapsto \cos x \end{cases} \quad f_5 : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^4 + 3x^2 - 5 \end{cases} \quad f_6 : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$$

**Exercice 11** Soit  $a \in \mathbb{R}$ . On considère l'application  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie, pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  par  $f(x, y) = (x - y, ax + y)$ .

- On suppose  $a \neq -1$ . Montrer que  $f$  est bijective et déterminer sa réciproque.
- On suppose que  $a = -1$ . Montrer que  $f$  n'est ni injective ni surjective.

**Exercice 12** Soit  $f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow ]4, +\infty[ \\ x \mapsto 3 + \sqrt{1 + e^{x-2}} \end{cases}$ .

À l'aide d'une résolution d'équation, montrer que  $f$  est une bijection et déterminer sa réciproque.

**Exercice 13** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  l'application définie pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1}}.$$

- Écrire le trinôme  $x^2 + x + 1$  sous forme canonique.
- Montrer que la fonction  $x \mapsto f(x - 1/2)$  est paire. Quelle propriété géométrique peut-on en déduire sur le graphe de  $f$  ?
- Sans utiliser la dérivée de  $f$ , étudier les variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  et tracer son graphe.
- Déterminer graphiquement l'ensemble  $f(\mathbb{R})$ .
- Soit  $y \in \mathbb{R}$ . Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation d'inconnue  $x$  suivante :  $y = f(x)$ , puis retrouver ainsi  $f(\mathbb{R})$ .
- Déterminer les deux intervalles maximaux  $I_1$  et  $I_2$  sur lesquels la restriction de  $f$  réalise une bijection vers  $f(\mathbb{R})$ . On écrira explicitement les deux bijections réciproques correspondantes et l'on tracera les allures de leurs graphes conjointement au graphe de  $f$ .

**Exercice 14** Soit  $E, F$  deux ensembles et  $f : E \rightarrow F$  une application. On suppose qu'il existe deux applications  $g : F \rightarrow E$  et  $h : F \rightarrow E$  telles que  $h \circ f = \text{id}_E$  et  $f \circ g = \text{id}_F$ . Montrer que  $f$  est bijective, que  $g = h$  et que  $f^{-1} = g$ .

Application. — On note  $E = \mathbb{C} \setminus \{2i\}$ . Soit  $f : E \rightarrow E$  définie par  $f(z) = \frac{i - 2z}{2 + iz}$ .

- Montrer que l'on a bien  $f(E) \subset E$ , puis calculer  $(f \circ f)(z)$  pour tout  $z \in E$ .
- En déduire que  $f$  est bijective et donner l'expression de sa réciproque.

Autre exemple. — On note  $E = \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$ . Soit  $f : E \rightarrow E$  définie par  $f(z) = \frac{z - 3}{z + 1}$ .

- Montrer que l'on a bien  $f(E) \subset E$ , puis calculer  $(f \circ f \circ f)(z)$  pour tout  $z \in E$ .
- En déduire que  $f$  est bijective et donner l'expression de sa réciproque.

Autre exemple. — On note  $E = \mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$ . Soit  $f : E \rightarrow E$  définie par  $f(z) = \frac{z + 3i}{iz + 1}$ .

Reprendre les questions de l'exemple précédent.

**Exercice 15** On considère les parties suivantes de  $\mathbb{R}$ . Préciser pour chacune d'elle si elle est majorée, minorée, bornée. Déterminer, lorsqu'ils existent, leur maximum, minimum, bornes supérieure et inférieure (on ne demande pas de justification) :

$$\mathbb{N}; \mathbb{Z}; [0, 1[; ]-8, -\ln(2) \cup [-\frac{1}{3}, 3]; \left\{ \frac{1}{n} + (-1)^n, n \in \mathbb{N}^* \right\}; \left\{ \frac{E(10^n \pi)}{10^n}, n \in \mathbb{N} \right\}; \left\{ \frac{1}{x^2 + 1}, x \in [0, 1[ \right\}; \{4 \cos^2 x + 1, x \in \mathbb{R}\}; \{e^{-4x} + 3, x \in \mathbb{R}\}; \left\{ x + \frac{1}{x}, x \in ]0, +\infty[ \right\}.$$

**Exercice 16** Soit  $f : ]-\infty, 6[ \rightarrow \mathbb{R}$  une application continue admettant le tableau de variations suivant.

$x$	$-\infty$	$0$	$2$	$4$	$6$
$f$	$-2$	$-4$	$-5$	$0$	$+\infty$

- L'application  $f$  est-elle surjective? Injective? Justifier vos réponses.
- Donner sans justification l'ensemble  $f(]-\infty, 6[)$ .
- Donner sans justification les valeurs des nombres suivants, s'ils existent :
 
$$\min_{x \in ]-\infty, 6[} f(x), \inf_{x \in ]-\infty, 6[} f(x), \max_{x \in \mathbb{R}^-} f(x), \sup_{x \in \mathbb{R}^-} f(x).$$
- Donner sans justification les tableaux de variations des fonctions suivantes :

$$g : x \mapsto 2 + |f(x)|; \quad h : x \mapsto \frac{1}{f(x)}; \quad k : x \mapsto f(|x|)$$

**Exercice 17** Soit  $f$  et  $g$  deux applications bornées de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

On note  $M_1 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$  et  $M_2 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |g(x)|$ .

- Si  $M_1 = 0$ , que peut-on dire de la fonction  $f$  ?
- (a) Montrer que  $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) + g(x)| \leq M_1 + M_2$ .  
(b) Donner deux fonctions  $f$  et  $g$  telles que  $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) + g(x)| \neq M_1 + M_2$ .
- Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Montrer que  $\sup_{x \in \mathbb{R}} |\alpha f(x)| \leq |\alpha| M_1$ , puis montrer par un raisonnement par l'absurde que  $\sup_{x \in \mathbb{R}} |\alpha f(x)| = |\alpha| M_1$ .

**Exercice 18**

- On considère une application majorée  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ . Justifier l'existence, pour tout  $x \in [0, 1]$ , de  $\sup_{z \in [0, x]} f(z)$ .
- On définit alors l'application  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  par  $\forall x \in [0, 1], g(x) = \sup_{z \in [0, x]} f(z)$ . Montrer que l'application  $g$  est croissante.
- Simplifier l'expression de  $g(x)$  pour tout  $x \in [0, 1]$  lorsque  $f$  est croissante.
- Application. — On choisit  $f$  définie par  $f(x) = \sin(\pi x)$  pour tout  $x \in [0, 1]$ . Déterminer  $g(x)$  pour tout  $x \in [0, 1]$ .

## Pour les insatiables...

### Exercice 19

1. Soit  $f$  l'application de  $\mathbb{N}$  dans lui-même définie par  $f(n) = n^2 - 2n + 2$ . Justifier que  $f$  est bien à valeurs dans  $\mathbb{N}$ . Est-elle injective? Surjective?
2. Mêmes questions pour l'application  $g$  de  $\mathbb{N}$  dans lui-même définie par  $g(n) = n/2$  si  $n$  est pair et  $2n$  si  $n$  est impair.
3. Soit  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  et  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  les applications définies par : pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f(n) = 2n$  et  $g(n) = n/2$  si  $n$  est pair et  $(n-1)/2$  si  $n$  est impair.
  - (a) Étudier l'injectivité et la surjectivité de  $f$ .
  - (b) Étudier l'injectivité et la surjectivité de  $g$ .
  - (c) Préciser les applications  $g \circ f$  et  $f \circ g$ . Étudier leur injectivité et leur surjectivité.

### Exercice 20

1. Montrer que l'application  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par  $f(n) = n/2$  si  $n$  est pair et  $f(n) = -(n+1)/2$  si  $n$  est impair, est bijective et déterminer sa réciproque.
2. Même question pour l'application  $g : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}^*$  définie pour tout  $(p, q) \in \mathbb{N}^2$  par  $g(p, q) = 2^p(2q+1)$ .

**Exercice 21** Soit  $p, q \in \mathbb{N}^*$  et  $T > 0$ . On considère deux applications  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telles que  $f$  soit  $pT$ -périodique et  $g$  soit  $qT$ -périodique. Montrer que l'application  $f+g$  est périodique et en déterminer une période.

Exemple. — Soit  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  l'application définie pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par  $h(x) = 2 \sin(\frac{x}{2}) - 3 \sin(\frac{x}{3})$ . Déterminer une période  $T$  de  $h$ . Étudier les variations de  $h$  sur  $[0, T]$  puis tracer le graphe de  $h$  sur  $[-T, 2T]$ .

**Exercice 22** Soit  $H = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$  et  $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ . On considère l'application  $f : \mathbb{C} \setminus \{-i\} \rightarrow \mathbb{C}$  définie par  $f(z) = \frac{z-i}{z+i}$ .

1. Montrer que pour tout  $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$ ,  $1 - |f(z)|^2 = \frac{4 \text{Im}(z)}{|z+i|^2}$ . En déduire que  $f(H) \subset D$  et  $f(\mathbb{C} \setminus (H \cup \{-i\})) \subset \mathbb{C} \setminus D$ .
2. Soit  $w \in D$ . Montrer qu'il existe un unique  $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$  tel que  $f(z) = w$ . Montrer que  $z \in H$ .
3. En déduire que  $f$  réalise une bijection de  $H$  sur  $D$ , puis donner l'expression de sa bijection réciproque.

### Exercice 23 (Fonctions « cosinus et sinus hyperboliques »)

1. Montrer les formules suivantes : pour tous  $x, y \in \mathbb{R}$ ,
$$\begin{aligned} \text{ch}(x+y) &= \text{ch}(x) \text{ch}(y) + \text{sh}(x) \text{sh}(y), \\ \text{sh}(x+y) &= \text{sh}(x) \text{ch}(y) + \text{ch}(x) \text{sh}(y). \end{aligned}$$

2. Exprimer  $\text{ch}(2x)$  en fonction de  $\text{ch}(x)$ , puis  $\text{sh}(2x)$  en fonction de  $\text{ch}(x)$  et  $\text{sh}(x)$ .
3. Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\text{ch}(3x) = P(\text{ch}(x))$  où  $P$  est une fonction polynôme de degré 3 que l'on déterminera.

### Exercice 24 (Fonction « argument sinus hyperbolique – argsh »)

1. Rappeler l'expression de  $\text{sh}(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .
2. Soit  $a \in \mathbb{R}$  fixé.
  - (a) Résoudre l'équation  $u^2 - 2au - 1 = 0$  d'inconnue  $u \in \mathbb{R}$ .
  - (b) Résoudre, à l'aide d'un changement de variable, l'équation  $\text{sh}(x) = a$ , d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$ . Cette équation admet une unique solution notée  $\text{argsh}(a)$ .
3. Quelle(s) propriété(s) de l'application  $\text{sh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a-t-on ainsi montrée(s)?

**Exercice 25 (Fonctions « trigonométriques réciproques »)** Soit  $f$  la fonction de la variable réelle  $x$  définie par  $f(x) = \arccos(\cos x)$ .

1. Donner l'ensemble de définition de  $f$ .
2. Étudier la parité et la périodicité de  $f$ .
3. Donner une expression simplifiée de  $f$  sur  $[0, \pi]$  puis sur  $[-\pi, \pi]$ .
4. Tracer le graphe de  $f$  sur  $[-2\pi, 2\pi]$ .
5. On introduit la fonction  $g$  de la variable réelle  $x$  définie par  $g(x) = \frac{\pi}{2} - f(\frac{\pi}{2} - x)$ . Exprimer  $g$  à l'aide des fonctions  $\sin$  et  $\arcsin$ .

**Exercice 26 (Fonctions « trigonométriques réciproques »)** On considère la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = 2 \arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right) + \arcsin(2x-1).$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de  $f$ .
2. En posant (après justification)  $t = \arccos(\sqrt{x})$ , simplifier l'expression de  $f(x)$ .

### Exercice 27 (Fonction caractéristique d'un ensemble)

Pour tout ensemble  $E$ , on définit sa fonction caractéristique ou indicatrice  $\mathbb{1}_E$  par 
$$\mathbb{1}_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E \\ 0 & \text{si } x \notin E \end{cases}.$$

1. Montrer que pour tous ensembles  $A$  et  $B$ , on a :
  - a)  $\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$ ; b)  $\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A \cap B}$ ; c) si  $B \subset A$ , alors  $\mathbb{1}_{A \setminus B} = \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B$ ;
  - b)  $\mathbb{1}_{A \Delta B} = |\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B|$ .
2. On considère la fonction caractéristique  $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$  de  $\mathbb{Q}$  sur  $\mathbb{R}$ . Exprimer  $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x+r)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et tout  $r \in \mathbb{Q}$  à l'aide de  $x$ . Que peut-on en conclure?

**Exercice 28** Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles et  $f$  une application de  $E$  dans  $F$ . Pour tout sous-ensemble  $X$  de  $E$  et tout sous-ensemble  $Y$  de  $F$ , on définit  $f(X) = \{f(x), x \in X\}$  et  $f^{-1}(Y) = \{x \in E : f(x) \in Y\}$ .

- On considère deux sous-ensembles  $B_1$  et  $B_2$  de  $F$ . Montrer les égalités
  - $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$ ;
  - $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$ .
  - $\overline{f^{-1}(B_1)} = f^{-1}(\overline{B_1})$ .
- On considère deux sous-ensembles  $A_1$  et  $A_2$  de  $E$ .
  - Montrer l'égalité  $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$ .
  - Montrer l'inclusion  $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$ , puis que, si  $f$  est injective, alors  $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$ .
- Prouver l'assertion  $\forall A \in \mathcal{P}(E), A \subset f^{-1}(f(A))$ . Montrer que si  $f$  est injective, alors  $\forall A \in \mathcal{P}(E), f^{-1}(f(A)) = A$ .
  - Prouver l'assertion  $\forall B \in \mathcal{P}(F), f(f^{-1}(B)) \subset B$ . Montrer que si  $f$  est surjective, alors  $\forall B \in \mathcal{P}(F), f(f^{-1}(B)) = B$ .

Exemple. — Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  l'application définie pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1}}.$$

Déterminer les ensembles  $f^{-1}(\{1\})$ ,  $f^{-1}(\{\frac{1}{\sqrt{3}}\})$ ,  $f^{-1}(f([-\frac{1}{2}, 0]))$ ,  $f(f^{-1}([1, 2]))$ .

### Exercice 29 (Une courbe de Lissajous)

Pour chaque  $t \in \mathbb{R}$ , on définit dans un repère orthonormé le point  $M(t)$  de coordonnées  $(\cos(3t), \sin(2t))$ .

- Étudier la courbe paramétrée  $t \in [0, \pi/2] \mapsto M(t)$ .
- Examiner les symétries de la courbe paramétrée  $t \in [0, 2\pi] \mapsto M(t)$ ; on pourra regarder les points  $M(\pi - t)$ ,  $M(t + \pi)$ .
- Tracer alors cette courbe (*courbe de Lissajous* observée par exemple sur un oscilloscope).

### Exercice 30 (L'« astroïde »)

Pour chaque  $t \in [0, 2\pi]$ , on définit dans un repère orthonormé les points  $P(t)$ ,  $Q(t)$  et  $m(t)$  de coordonnées respectives  $(\cos t, 0)$ ,  $(0, \sin t)$  et  $(\cos t, \sin t)$ . On construit le point  $M(t)$  pied de la hauteur du triangle  $P(t)Q(t)m(t)$  issue de  $m(t)$  (voir la figure ci-dessous).

- Montrer que les coordonnées du point  $M(t)$  sont données par  $(\cos^3 t, \sin^3 t)$ .
- Étudier la courbe paramétrée  $t \in [0, \pi/2] \mapsto M(t)$ , puis examiner les symétries de la courbe paramétrée  $t \in [0, 2\pi] \mapsto M(t)$ ; on pourra regarder les points  $M(\pi - t)$ ,  $M(t + \pi)$ . Tracer alors cette courbe (il s'agit d'une *astroïde*, hypocycloïde à 4 points de rebroussements).

