INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Généralités sur les fonctions

Exercice 1 Pour chacune des fonctions suivantes, préciser l'ensemble de définition et étudier la parité.

$$f_1(x)=\cos(x^3),\quad f_2(x)=\mathrm{e}^{\cos(x)},\quad f_3(x)=\mathrm{e}^{\sin(x)}-1,\quad f_4(x)=\sqrt{x^4-4x^2+3},$$
$$f_5(x)=\tan\left(\frac{1}{x}\right),\quad f_6(x)=\sin(x)\,\mathrm{ch}(\tan x),\quad f_7(x)=\frac{1+x^2}{\mathrm{sh}(x)},\quad f_8(x)=\frac{1+\mathrm{e}^x}{1-\mathrm{e}^x}.$$

Exercice 2 Pour chacune des fonctions suivantes, tracer sans calcul l'allure la courbe représentative.

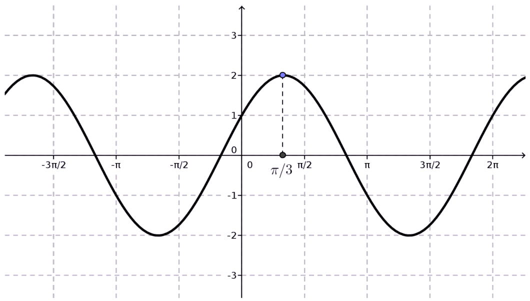
$$f_1(x)=(x-2)^3,\quad f_2(x)=\sqrt{-x},\quad f_3(x)=1+\mathrm{sh}(-x),\ f_4(x)=-\frac{1}{x+1},$$
$$f_5(x)=4-\mathrm{e}^{-x},\quad f_6(x)=2\,\mathrm{e}^{x-3},\quad f_7(x)=2\sin(x)\text{ et } f_8(x)=\sin(2x)\text{ sur }[0,2\pi].$$

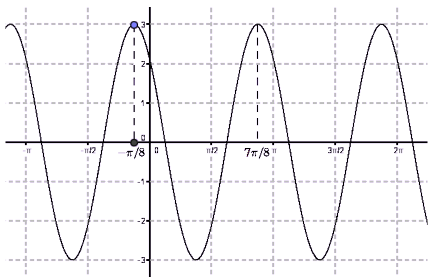
Exercice 3 Pour chacune des fonctions suivantes, préciser l'ensemble de définition et déterminer les variations sans calcul de dérivée :

$$f_1(x)=\ln(1+\mathrm{e}^{-x}),\quad f_2(x)=\big(\mathrm{sh}(\sqrt{x+3}\,)\big)^3,\quad f_3(x)=\mathrm{ch}\big(\ln(x-2)\big),$$
$$f_4(x)=\sqrt{x^2-5x+6},\quad f_5(x)=\frac{1}{x^2-5x+6}.$$

Exercice 4 Les tracés ci-dessous sont les courbes représentatives de deux fonctionx de la forme $t\longmapsto A\cos(\omega t+\varphi)$, où A,ω,φ sont des réels positifs.

Pour chacune des courbes, déterminer A,ω,φ à l'aide du graphique.





Exercice 5 On considère les applications $f,g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ définies pour tout $x\in\mathbb{R}$ par $f(x)=3\cos(2x-\pi/4)$ et $g(x)=|f(x)|$.

1. Montrer que f est périodique et en déterminer une période $T>0$. Même question pour g.
2. Résoudre l'équation $f(x)=0$ dans $\mathbb{R}$.
3. Étudier la parité des applications $x\longmapsto f(x+\pi/8)$ et $x\longmapsto f(x+3\pi/8)$.
4. Partant du graphe de la fonction cosinus, tracer les graphes de f et g sur $[-T,2T]$.

Exercice 6 (Fonctions « puissances »)

1. Simplifier les expressions suivantes : $\left(\frac{1}{49}\right)^{-3/2}$, $\left(\frac{1}{32}\right)^{-0,8}$, $\left(\frac{32}{243}\right)^{-2/5}$, $\left(\frac{27}{2\sqrt{2}}\right)^{2/3}$.
2. Donner l'allure des représentations graphiques des fonctions suivantes :
$$f_1:x\longmapsto x^{0,25},\ f_2:x\longmapsto x^{-0,7},\ f_3:x\longmapsto x^{\sqrt{2}},\ f_4:x\longmapsto \pi^x,\ f_5:x\longmapsto\left(\frac{1}{3}\right)^x.$$

Exercice 7 (Fonction « tangente hyperbolique »)

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on pose $\mathrm{th}(x)=\dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$.

1. Étudier la parité de th.
2. Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\mathrm{th}(x)=\dfrac{1-\mathrm{e}^{-2x}}{1+\mathrm{e}^{-2x}}$.
   En déduire la limite de th en $+\infty$, puis en $-\infty$. En déduire également son sens de variation sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\mathrm{th}'(x)=1-\mathrm{th}^2\,x=\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2\,x}$.
4. Tracer la courbe représentative de th en précisant la tangente au point d'abscisse 0 et les asymptotes éventuelles en $+\infty$ et $-\infty$.
5. Préciser sans justification l'ensemble $\mathrm{th}(\mathbb{R})$.

Exercice 8 (Fonctions « trigonométriques réciproques »)

1. Calculer les nombres $\arccos(0)$, $\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\arcsin(0)$, $\arcsin(1)$, $\arcsin(\frac{1}{2})$, $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\arctan(1)$, $\arctan(-\sqrt{3})$, $\sin\big(\arcsin(-0,2)\big)$, $\arcsin\Big(\sin\big(-\frac{11\pi}{7}\big)\Big)$, $\arccos\Big(\cos\big(\frac{7\pi}{5}\big)\Big)$, $\tan\big(\arctan(4)\big)$, $\arctan\big(\tan(4)\big)$
2. Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :
$$f_1:x\longmapsto\arcsin(2x-1),\ f_2:x\longmapsto\arccos(2x^2-1),\ f_3:x\longmapsto\arctan\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$$

Exercice 9 (Fonction « partie entière »)

Pour tout réel $x\in\mathbb{R}$, il existe un unique entier n tel que $n\leqslant x<n+1$. On note cet entier $E(x)$. L'application $E:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{Z}$ est appelée « fonction partie entière ».

1. Calculer $E(5)$, $E(-5)$, $E(0,02)$, $E(-0,02)$, $E(3,8)$, $E(-3,8)$. La fonction E est-elle impaire ?
2. Soit $x\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{Z}$. Exprimer $E(x+n)$ en fonction de $E(x)$ et n.
3. Tracer le graphe de l'application E sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que les applications $f:x\longmapsto x-E(x)$ et $g:x\longmapsto E(4\,x)-4\,E(x)$ sont périodiques et tracer leur graphe sur $[-2,2]$.

Exercice 10 Pour chacune des applications suivantes, dire si elle est injective, surjective, bijective.

$$f_1:\begin{cases}\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}\\ n\longmapsto n+1\end{cases}\qquad f_2:\begin{cases}\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{Z}\\ n\longmapsto n+1\end{cases}\qquad f_3:\begin{cases}\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\\ x\longmapsto\cos x\end{cases}$$
$$f_4:\begin{cases}[0,\pi]\longrightarrow[-1,1]\\ x\longmapsto\cos x\end{cases}\qquad f_5:\begin{cases}\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\\ x\longmapsto x^4+3x^2-5\end{cases}\qquad f_6:\begin{cases}\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^+\\ (x,y)\longmapsto\sqrt{x^2+y^2}\end{cases}$$

Exercice 11 Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = (x - y, ax + y)$.

1. On suppose $a \neq -1$. Montrer que f est bijective et déterminer sa réciproque.
2. On suppose que $a = -1$. Montrer que f n'est ni injective ni surjective.

Exercice 12 Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow]4, +\infty[\\ x \longmapsto 3 + \sqrt{1 + \mathrm{e}^{x-2}} \end{cases}$.

À l'aide d'une résolution d'équation, montrer que f est une bijection et déterminer sa réciproque.

Exercice 13 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1}}.$$

1. Écrire le trinôme $x^2 + x + 1$ sous forme canonique.
2. Montrer que la fonction $x \longmapsto f(x - 1/2)$ est paire. Quelle propriété géométrique peut-on en déduire sur le graphe de f ?
3. Sans utiliser la dérivée de f, étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et tracer son graphe.
4. Déterminer graphiquement l'ensemble $f(\mathbb{R})$.
5. Soit $y \in \mathbb{R}$. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x suivante : $y = f(x)$, puis retrouver ainsi $f(\mathbb{R})$.
6. Déterminer les deux intervalles maximaux I_1 et I_2 sur lesquels la restriction de f réalise une bijection vers $f(\mathbb{R})$. On écrira explicitement les deux bijections réciproques correspondantes et l'on tracera les allures de leurs graphes conjointement au graphe de f.

Exercice 14 Soit E, F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application. On suppose qu'il existe deux applications $g : F \longrightarrow E$ et $h : F \longrightarrow E$ telles que $h \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{id}_F$. Montrer que f est bijective, que $g = h$ et que $f^{-1} = g$.

Application. — On note $E = \mathbb{C} \backslash \{2i\}$. Soit $f : E \longrightarrow E$ définie par $f(z) = \dfrac{i - 2z}{2 + iz}$.

1. Montrer que l'on a bien $f(E) \subset E$, puis calculer $(f \circ f)(z)$ pour tout $z \in E$.
2. En déduire que f est bijective et donner l'expression de sa réciproque.

Autre exemple. — On note $E = \mathbb{R} \backslash \{1, -1\}$. Soit $f : E \longrightarrow E$ définie par $f(z) = \dfrac{z - 3}{z + 1}$.

1. Montrer que l'on a bien $f(E) \subset E$, puis calculer $(f \circ f \circ f)(z)$ pour tout $z \in E$.
2. En déduire que f est bijective et donner l'expression de sa réciproque.

Autre exemple. — On note $E = \mathbb{C} \backslash \{\mathrm{i}, -\mathrm{i}\}$. Soit $f : E \longrightarrow E$ définie par $f(z) = \dfrac{z + 3\mathrm{i}}{\mathrm{i}z + 1}$. Reprendre les questions de l'exemple précédent.

Exercice 15 On considère les parties suivantes de $\mathbb{R}$. Préciser pour chacune d'elle si elle est majorée, minorée, bornée. Déterminer, lorsqu'ils existent, leur maximum, minimum, bornes supérieure et inférieure (on ne demande pas de justification) :

$$\mathbb{N}\,;\ \mathbb{Z}\,;\ [0, 1[\,;\ \left]-8, -\ln(2)\right[\cup \left[-\tfrac{1}{3}, 3\right]\,;\ \left\{\frac{1}{n} + (-1)^n, n \in \mathbb{N}^*\right\};\ \left\{\frac{E(10^n \pi)}{10^n}, n \in \mathbb{N}\right\};$$
$$\left\{\frac{1}{x^2 + 1}, x \in [0, 1[\right\};\ \{4\cos^2 x + 1, x \in \mathbb{R}\};\ \{e^{-4x} + 3, x \in \mathbb{R}\};\ \left\{x + \frac{1}{x}, x \in]0, +\infty[\right\}.$$

Exercice 16 Soit $f :]-\infty, 6[\longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue admettant le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$	0	2	4	6
f	-2 $\searrow$	-4 $\searrow$	-5 $\nearrow$	0 $\nearrow$	$+\infty$

1. L'application f est-elle surjective ? Injective ? Justifier vos réponses.
2. Donner sans justification l'ensemble $f\big(]-\infty, 6[\big)$.
3. Donner sans justification les valeurs des nombres suivants, s'ils existent :
$$\min_{x \in]-\infty, 6[} f(x),\ \inf_{x \in]-\infty, 6[} f(x),\ \max_{x \in \mathbb{R}^-} f(x),\ \sup_{x \in \mathbb{R}^-} f(x).$$
4. Donner sans justification les tableaux de variations des fonctions suivantes :
$$g : x \longmapsto 2 + |f(x)|\,;\quad h : x \longmapsto \tfrac{1}{f(x)}\,;\quad k : x \longmapsto f(|x|)$$

Exercice 17 Soit f et g deux applications bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
On note $M_1 = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$ et $M_2 = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}} |g(x)|$.

1. Si $M_1 = 0$, que peut-on dire de la fonction f ?
2. (a) Montrer que $\sup\limits_{x \in \mathbb{R}} |f(x) + g(x)| \leqslant M_1 + M_2$.

   (b) Donner deux fonctions f et g telles que $\sup\limits_{x \in \mathbb{R}} |f(x) + g(x)| \neq M_1 + M_2$.
3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que $\sup\limits_{x \in \mathbb{R}} |\alpha f(x)| \leqslant |\alpha| M_1$, puis montrer par un raisonnement par l'absurde que $\sup\limits_{x \in \mathbb{R}} |\alpha f(x)| = |\alpha| M_1$.

Exercice 18

1. On considère une application majorée $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$. Justifier l'existence, pour tout $x \in [0, 1]$, de $\sup\limits_{z \in [0, x]} f(z)$.
2. On définit alors l'application $g : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ par $\forall x \in [0, 1]$, $g(x) = \sup\limits_{z \in [0, x]} f(z)$. Montrer que l'application g est croissante.
3. Simplifier l'expression de $g(x)$ pour tout $x \in [0, 1]$ lorsque f est croissante.
4. Application. — On choisit f définie par $f(x) = \sin(\pi x)$ pour tout $x \in [0, 1]$. Déterminer $g(x)$ pour tout $x \in [0, 1]$.

Pour les insatiables...

Exercice 19

1. Soit f l'application de $\mathbb{N}$ dans lui-même définie par $f(n) = n^2 - 2n + 2$. Justifier que f est bien à valeurs dans $\mathbb{N}$. Est-elle injective ? Surjective ?
2. Mêmes questions pour l'application g de $\mathbb{N}$ dans lui-même définie par $g(n) = n/2$ si n est pair et $2n$ si n est impair.
3. Soit $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ et $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ les applications définies par :
pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = 2n$ et $g(n) = n/2$ si n est pair et $(n-1)/2$ si n est impair.
   (a) Étudier l'injectivité et la surjectivité de f.
   (b) Étudier l'injectivité et la surjectivité de g.
   (c) Préciser les applications $g \circ f$ et $f \circ g$. Étudier leur injectivité et leur surjectivité.

Exercice 20

1. Montrer que l'application $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $f(n) = n/2$ si n est pair et $f(n) = -(n+1)/2$ si n est impair, est bijective et déterminer sa réciproque.
2. Même question pour l'application $g : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}^*$ définie pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ par $g(p, q) = 2^p(2q + 1)$.

Exercice 21 Soit $p, q \in \mathbb{N}^*$ et $T > 0$. On considère deux applications $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que f soit pT-périodique et g soit qT-périodique. Montrer que l'application $f + g$ est périodique et en déterminer une période.

Exemple. — Soit $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $h(x) = 2\sin(\frac{x}{2}) - 3\sin(\frac{x}{3})$. Déterminer une période T de h. Étudier les variations de h sur $[0, T]$ puis tracer le graphe de h sur $[-T, 2T]$.

Exercice 22 Soit $H = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ et $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. On considère l'application $f : \mathbb{C}\backslash\{-\mathrm{i}\} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \dfrac{z - \mathrm{i}}{z + \mathrm{i}}$.

1. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}\backslash\{-\mathrm{i}\}$, $1 - |f(z)|^2 = \dfrac{4\,\mathrm{Im}(z)}{|z + \mathrm{i}|^2}$. En déduire que $f(H) \subset D$ et $f(\mathbb{C}\backslash(H \cup \{-\mathrm{i}\})) \subset \mathbb{C}\backslash D$.
2. Soit $w \in D$. Montrer qu'il existe un unique $z \in \mathbb{C}\backslash\{-\mathrm{i}\}$ tel que $f(z) = w$. Montrer que $z \in H$.
3. En déduire que f réalise une bijection de H sur D, puis donner l'expression de sa bijection réciproque.

Exercice 23 (Fonctions « cosinus et sinus hyperboliques »)

1. Montrer les formules suivantes : pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,
$$\mathrm{ch}(x + y) = \mathrm{ch}(x)\,\mathrm{ch}(y) + \mathrm{sh}(x)\,\mathrm{sh}(y),$$
$$\mathrm{sh}(x + y) = \mathrm{sh}(x)\,\mathrm{ch}(y) + \mathrm{ch}(x)\,\mathrm{sh}(y).$$
2. Exprimer $\mathrm{ch}(2x)$ en fonction de $\mathrm{ch}(x)$, puis $\mathrm{sh}(2x)$ en fonction de $\mathrm{ch}(x)$ et $\mathrm{sh}(x)$.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(3x) = P(\mathrm{ch}(x))$ où P est une fonction polynôme de degré 3 que l'on déterminera.

Exercice 24 (Fonction « argument sinus hyperbolique – argsh »)

1. Rappeler l'expression de $\mathrm{sh}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Soit $a \in \mathbb{R}$ fixé.
   (a) Résoudre l'équation $u^2 - 2au - 1 = 0$ d'inconnue $u \in \mathbb{R}$.
   (b) Résoudre, à l'aide d'un changement de variable, l'équation $\mathrm{sh}(x) = a$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. Cette équation admet une unique solution notée $\mathrm{argsh}(a)$.
3. Quelle(s) propriété(s) de l'application $\mathrm{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a-t-on ainsi montrée(s) ?

Exercice 25 (Fonctions « trigonométriques réciproques ») Soit f la fonction de la variable réelle x définie par $f(x) = \arccos(\cos x)$.

1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. Étudier la parité et la périodicité de f.
3. Donner une expression simplifiée de f sur $[0, \pi]$ puis sur $[-\pi, \pi]$.
4. Tracer le graphe de f sur $[-2\pi, 2\pi]$.
5. On introduit la fonction g de la variable réelle x définie par $g(x) = \frac{\pi}{2} - f\big(\frac{\pi}{2} - x\big)$. Exprimer g à l'aide des fonctions sin et arcsin.

Exercice 26 (Fonctions « trigonométriques réciproques ») On considère la fonction f définie par
$$f(x) = 2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right) + \arcsin(2x - 1).$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. En posant (après justification) $t = \arccos(\sqrt{x})$, simplifier l'expression de $f(x)$.

Exercice 27 (Fonction caractéristique d'un ensemble)

Pour tout ensemble E, on définit sa fonction caractéristique ou indicatrice $\mathbb{1}_E$ par $\mathbb{1}_E(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in E \\ 0 \text{ si } x \notin E \end{cases}$.

1. Montrer que pour tous ensembles A et B, on a :
a) $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$; b) $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A\cap B}$; c) si $B \subset A$, alors $\mathbb{1}_{A\backslash B} = \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B$; b) $\mathbb{1}_{A\Delta B} = |\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B|$.
2. On considère la fonction caractéristique $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ de $\mathbb{Q}$ sur $\mathbb{R}$. Exprimer $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x + r)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $r \in \mathbb{Q}$ à l'aide de x. Que peut-on en conclure ?

Exercice 28 Soient E et F deux ensembles et f une application de E dans F. Pour tout sous-ensemble X de E et tout sous-ensemble Y de F, on définit $f(X) = \{f(x),\, x \in X\}$ et $f^{-1}(Y) = \{x \in E \,:\, f(x) \in Y\}$.

1. On considère deux sous-ensembles B_1 et B_2 de F. Montrer les égalités
   (a) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$;
   (b) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.
   (c) $\overline{f^{-1}(B_1)} = f^{-1}(\overline{B_1})$.
2. On considère deux sous-ensembles A_1 et A_2 de E.
   (a) Montrer l'égalité $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.
   (b) Montrer l'inclusion $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$, puis que, si f est injective, alors $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$.
3. (a) Prouver l'assertion $\forall A \in \mathcal{P}(E), A \subset f^{-1}(f(A))$. Montrer que si f est injective, alors $\forall A \in \mathcal{P}(E), f^{-1}(f(A)) = A$.
   (b) Prouver l'assertion $\forall B \in \mathcal{P}(F), f(f^{-1}(B)) \subset B$. Montrer que si f est surjective, alors $\forall B \in \mathcal{P}(F), f(f^{-1}(B)) = B$.

Exemple. — Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1}}.$$

Déterminer les ensembles $f^{-1}(\{1\})$, $f^{-1}(\{\frac{1}{\sqrt{3}}\})$, $f^{-1}(f([-\frac{1}{2}, 0]))$, $f(f^{-1}([1, 2]))$.

Exercice 29 (Une courbe de Lissajous)

Pour chaque $t \in \mathbb{R}$, on définit dans un repère orthonormé le point $M(t)$ de coordonnées $(\cos(3t), \sin(2t))$.

1. Étudier la courbe paramétrée $t \in [0, \pi/2] \longmapsto M(t)$.
2. Examiner les symétries de la courbe paramétrée $t \in [0, 2\pi] \longmapsto M(t)$; on pourra regarder les points $M(\pi - t)$, $M(t + \pi)$.
3. Tracer alors cette courbe (*courbe de Lissajous* observée par exemple sur un oscilloscope).

Exercice 30 (L'« astroïde »)

Pour chaque $t \in [0, 2\pi]$, on définit dans un repère orthonormé les points $P(t)$, $Q(t)$ et $m(t)$ de coordonnées respectives $(\cos t, 0)$, $(0, \sin t)$ et $(\cos t, \sin t)$. On construit le point $M(t)$ pied de la hauteur du triangle $P(t)Q(t)m(t)$ issue de $m(t)$ (voir la figure ci-dessous).

1. Montrer que les coordonnées du point $M(t)$ sont données par $(\cos^3 t, \sin^3 t)$.
2. Étudier la courbe paramétrée $t \in [0, \pi/2] \longmapsto M(t)$, puis examiner les symétries de la courbe paramétrée $t \in [0, 2\pi] \longmapsto M(t)$; on pourra regarder les points $M(\pi - t)$, $M(t+\pi)$. Tracer alors cette courbe (il s'agit d'une *astroïde*, hypocycloïde à 4 points de rebroussements).