INSA 1er cycle

Analyse

Intégrales généralisées

Exercice 1 Montrer la convergence puis calculer la valeur des intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^7 e^{-x^2}\,dx$ b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}\,dx$

c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^3\ln x}{(x^4+1)^3}\,dx$ d) $\displaystyle\int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{e^x+1}{e^{2x}-2e^x+1}\,dx$

e) $\displaystyle\int_{-2}^{+\infty} \left[2+(x+3)\,\ln\frac{x+2}{x+4}\right]dx$ f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,\ln(1-x^2)\,dx$

g) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,\ln\frac{1+x}{1-x}\,dx$ h) $\displaystyle\int_{-1}^2 \arctan\frac{x+1}{x-2}\,dx$

Exercice 2 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que si $\alpha < 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^{\alpha-1}\cos x\,dx$ est absolument convergente.
2. En déduire la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^{\alpha}\sin x\,dx$ pour $\alpha < 0$.
3. Application : prouver la convergence des intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty}\cos x^2\,dx$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty}\sqrt{x}\,\sin x^2\,dx$.

Exercice 3 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Étudier selon les valeurs de α l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}\,dx$, puis, en cas de convergence, calculer sa valeur.
2. Étudier selon les valeurs de α l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha\ln x}\,dx$.

Exercice 4

1. Prouver l'existence des intégrales $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\ln(\sin x)\,dx$ et $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\ln(\cos x)\,dx$.

   On pose alors $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2}\ln(\sin x)\,dx$ et $J = \displaystyle\int_0^{\pi/2}\ln(\cos x)\,dx$.
2. Montrer que $I = J$.
3. Calculer $I + J$ (qui est égal à $2I$) en fonction de I.
4. En déduire la valeur commune de I et J.

Exercice 5

1. Soit $F(x) = \displaystyle\int_x^{x^2}\frac{dt}{\ln t}$ pour $x \in]0,1[$. Calculer les limites $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} F(x)$ et $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} F(x)$ (pour la limite en 1, comparer $F(x)$ à l'intégrale $\displaystyle\int_x^{x^2}\frac{dt}{t-1}$).
2. Calculer la dérivée de F.
3. En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1\frac{t-1}{\ln t}\,dt$.

Exercice 6 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction localement intégrable sur $\mathbb{R}$. On suppose qu'elle admet des limites finies en $\pm\infty$ notées $a = \displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et $b = \displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Montrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}[f(x+1)-f(x)]\,dx$ puis calculer sa valeur.

Exercice 7 Soient f et $g : [1,+\infty[\to \mathbb{R}$ les fonctions définies pour $x \geqslant 1$ par $f(x) = \dfrac{(-1)^{E(x)}}{\sqrt{x}}$ et $g(x) = f(x) + \dfrac{1}{x}$.

1. Montrer que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} g(x)$.
2. Étudier la convergence des intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(x)\,dx$ (on commencera par regarder $\displaystyle\int_1^N f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{N-1}\int_k^{k+1} f(x)\,dx$ pour $N \in \mathbb{N}$).

Exercice 8

1. Calculer les intégrales $\displaystyle\int_1^a \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(a-x)}}$, $a > 1$ et $\displaystyle\int_a^{3a}\frac{1}{x}\,dx$, $a > 0$.
2. Déterminer, lorsqu'elles existent, les limites suivantes :

$$\lim_{a\to 1^+}\int_1^a \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(a-x)}} \quad \text{et} \quad \lim_{a\to 0^+}\int_a^{3a}\frac{\cos x}{x}\,dx.$$