INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

# Limites, comparaison locale

**Exercice 1** On rappelle que $\lim_{u\to 0} \frac{\sin u}{u} = 1$, $\lim_{u\to+\infty} \frac{\ln u}{u} = 0$ et $\lim_{u\to+\infty} \frac{e^u}{u} = +\infty$.
Calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{x\to+\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}-(\ln x)^3}{\operatorname{ch}^2 x}$ c) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sh}(x)-5x}{\operatorname{ch}(x)+\ln(x)}$

d) $\lim_{x\to 0} \frac{x\sin(5x)}{1-\cos(4x)}$ e) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin[x^2(1-\cos x)]}{(1-\cos x)^2}$ f) $\lim_{x\to 0^+} \left[\ln(x)+3\cos\left(\frac{5}{x^2}\right)\right]$

g) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2^{3^x}}{3^{2^x}}$ h) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}$ i) $\lim_{x\to+\infty} x\,e^{-\ln^2(x)}$ j) $\lim_{x\to+\infty} x\,e^{-\sqrt{\ln(x)}}$

---

**Exercice 2** Soit $a\in]0,+\infty[$. À l'aide de l'encadrement $E(x)\leqslant x < E(x)+1$ valable pour tout réel $x$, calculer les limites de $\frac{E(ax)}{x}$ en $0^+$, $0^-$, $+\infty$ et $-\infty$.

Application. — Déterminer la limite $\lim_{n\to+\infty} \frac{E(10^n\pi)}{10^n}$.

---

**Exercice 3** Pour chacune des fonctions suivantes, étudier l'existence en $-\infty$ et $+\infty$ de branches paraboliques ou d'asymptotes, et, le cas échéant, étudier la position de la courbe représentative par rapport à son asymptote.

a) $f(x)=\frac{2x^2-5x+1}{x-2}$ b) $f(x)=\operatorname{sh}(x)-3x$ c) $f(x)=3x+2+\ln(|x|)$

d) $f(x)=\operatorname{ch}(x)\mathrm{e}^{-x}$ e) $f(x)=\mathrm{e}^{-3x}-7x+3+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

---

**Exercice 4** Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction périodique. Montrer que $f$ admet une limite en $+\infty$ si et seulement si $f$ est constante.

---

**Exercice 5** Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x)=x\sin(x)$.

1. Déterminer des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers $+\infty$ telle que la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tende vers $+\infty$ et la suite $(f(v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tende vers 0.
2. Étudier la limite de $f$ en $+\infty$.

---

**Exercice 6** On considère la fonction $f$ définie par $f(x)=\sqrt{x^2+4x+1}-x$.

On pourra utiliser tout au long de l'exercice la relation $a-b=\frac{a^2-b^2}{a+b}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de $f$.
2. Étudier les limites de $f$ en $+\infty$ et $-\infty$.
3. Déterminer les asymptotes de la courbe représentative de $f$.
4. Étudier la position de la courbe par rapport à ses asymptotes.

**Exercice 7** Soit $f$ la fonction définie par $f(x)=\frac{x^3-2x^2-x+2}{|x|-1}$.

1. Donner l'ensemble de définition de $f$ et justifier la continuité de $f$ sur celui-ci.
2. Calculer les limites $\lim_{x\to 1} f(x)$ et $\lim_{x\to -1} f(x)$.
3. La fonction $f$ est-elle prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$ ? Si oui, donner sous une forme simple (sans fraction) la fonction qui la prolonge.
4. Tracer la courbe représentative de $f$.

---

**Exercice 8** Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x)=E(2x)+[x-E(x)]^2$ où $E$ désigne la fonction partie entière.

1. Déterminer l'ensemble des points de continuité de $f$.
2. Trouver une relation entre $f(x+1)$ et $f(x)$, puis tracer le graphe de $f$ sur $[-1,2]$.

---

**Exercice 9** Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une application. On pose pour tout $x\in\mathbb{R}$, $h(x)=f(x)-x$.

1. On suppose dans cette question que l'application $h$ est bornée au voisinage de $+\infty$. Montrer que $\frac{f(x)}{x}$ admet une limite finie $\ell$ en $+\infty$ que l'on déterminera.
2. Donner un exemple d'application $f$ telle que $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}=\ell$ mais telle que $h$ ne soit pas bornée au voisinage de $+\infty$.

---

**Exercice 10** On considère l'application $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{si } x<1,\\ x^2 & \text{si } 1\leqslant x\leqslant 2,\\ 2\sqrt{2x} & \text{si } x>2.\end{cases}$$

Résoudre l'équation $f(x)=x$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que $f$ est une bijection continue de $\mathbb{R}$ sur un ensemble que l'on précisera. Déterminer sa réciproque et donner l'allure des graphes de $f$ et $f^{-1}$.

---

**Exercice 11** On définit les applications $f:[0,3]\longrightarrow\mathbb{R}$, $g_1:[0,2]\longrightarrow\mathbb{R}$ et $g_2:[0,2]\longrightarrow\mathbb{R}$ selon

$$f(x)=\begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x\in[0,1],\\ 1 & \text{si } x\in[1,2],\\ (x-2)^2+1 & \text{si } x\in[2,3],\end{cases}$$

$$g_1(y)=\begin{cases} y^2 & \text{si } y\in[0,1],\\ \sqrt{y-1}+2 & \text{si } y\in]1,2],\end{cases} \quad \text{et} \quad g_2(y)=\begin{cases} y^2 & \text{si } y\in[0,1[,\\ \sqrt{y-1}+2 & \text{si } y\in[1,2].\end{cases}$$

1. Tracer les graphes des applications $f$, $g_1$ et $g_2$.
2. Étudier la continuité de $f$, $g_1$ et $g_2$.
3. Étudier l'injectivité de $f$, $g_1$ et $g_2$. Déterminer les ensembles images $f([0,3])$, $g_1([0,2])$ et $g_2([0,2])$.
4. Déterminer les composées $f\circ g_1$, $f\circ g_2$, $g_1\circ f$ et $g_2\circ f$ et tracer leur graphe. Commenter les résultats obtenus.

**Exercice 12** Pour chacun des couples de fonctions ci-dessous, déterminer si l'une des deux fonctions est négligeable devant l'autre au voisinage de 0 ou $+\infty$, ou si les fonctions sont équivalentes, ou si l'on n'est dans aucun de ces cas.

a) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \ln(x)$ b) $f(x) = \sin(x)$, $g(x) = \ln(x)$

c) $f(x) = x^5 + 4x + 1$, $g(x) = e^x[\ln(x)]^3$ d) $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$, $g(x) = \mathrm{e}^{-2x}$

e) $f(x) = \ln(x^2+1)$, $g(x) = \ln(x^3+1)$ f) $f(x) = e^x - 1$, $g(x) = x[\ln(x)]^3$

g) $f(x) = 2 + \mathrm{e}^x \sin(x)$, $g(x) = 1 + \mathrm{e}^x \cos(x)$ h) $f(x) = 2\mathrm{e}^x + \sin(x)$, $g(x) = \mathrm{e}^x + \cos(x)$

---

**Exercice 13** Déterminer les limites suivantes à l'aide d'équivalents :

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{[\mathrm{ch}(x)-1]\,\mathrm{sh}(x)}{x^3}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)\ln(1+x^2)}{\mathrm{sh}(x)(\mathrm{e}^x-1)^2}$ c) $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2} \frac{\ln\left(\frac{2x}{\pi}\right)}{\cos(x)}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln[\cos(ax)]}{\ln[\cos(bx)]}$ $a, b \in \mathbb{R}^*$ étant fixés e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^x$ $a \in \mathbb{R}$ étant fixé

f) $\displaystyle\lim_{x\to 1} (2^x + 3^x - 4)^{\tan\frac{\pi x}{2}}$ g) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2^{1/x}+3^{1/x}+5^{1/x}}{3}\right)^x$

---

**Exercice 14**

1. Déterminer des équivalents au voisinage de 0 de la forme $Ax^n$ ($A \in \mathbb{R}^*$, $n \in \mathbb{N}$) pour les fonctions définies par

   a) $f(x) = \mathrm{sh}\,x + a\,\mathrm{th}\,x$, $a \in \mathbb{R}$ étant fixé ; b) $f(x) = \dfrac{\tan[x^2(\mathrm{e}^x-1)]}{\sqrt{\ln(x+1)+1}-1}$.

2. Déterminer des équivalents au voisinage de 1/2 de la forme $A\left(x-\frac{1}{2}\right)^n$ ($A \in \mathbb{R}^*$, $n \in \mathbb{Z}$) pour les fonctions définies par

   a) $f(x) = (2\,x^2 - 3\,x + 1)\tan^2(\pi x)$ ; b) $f(x) = \dfrac{\sin(\pi x) - \sqrt{\cos[\pi(2x-1)]}}{\cos(\pi x)}$.

3. Déterminer des équivalents au voisinage de $+\infty$ de la forme $Ax^\alpha$ ($A \in \mathbb{R}^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$) pour les fonctions définies par

   a) $f(x) = \sqrt{x^3 + a\,x^2 + b\,x + c} - d\,x\sqrt{x+2}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ étant fixés ;

   b) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x + x^{1789} - x^{1515}\ln x}{x^{1957} + \left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\mathrm{ch}\,x}$.

4. Déterminer des équivalents au voisinage de $+\infty$ de la forme $A\mathrm{e}^{\alpha x}$ ($A \in \mathbb{R}^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$) pour les fonctions définies par

   a) $f(x) = 1 - \mathrm{th}^2\,x$ ; b) $f(x) = \dfrac{\mathrm{ch}(ax)+\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}^2(bx)}$, $a, b \in ]0, +\infty[$ étant fixés.

---

**Exercice 15** Soit $P$ un polynôme de $\mathbb{R}[X]$, $\mu$ un entier non nul, et soit $\alpha$ une racine de $P$ d'ordre de multiplicité $\mu$.

Donner un équivalent simple de $P$ au voisinage de $\alpha$, puis en déduire que $P$ change de signe en $\alpha$ si et seulement si $\mu$ est impair.

**Exercice 16** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = \ln(\mathrm{ch}\,x)$.

1. Dresser le tableau de variations de $f$.
2. Donner un équivalent simple de $f$ en 0.
3. Montrer qu'en $+\infty$, on a $f(x) \sim ax^n$ où $a$ est un réel et $n$ un entier à déterminer.
4. Calculer la limite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(f(x) - ax^n)$. Que peut-on en déduire pour la courbe de $f$ ?
5. Tracer la courbe représentative de $f$.

---

**Exercice 17**

1. Préliminaire :
   (a) Donner les équivalents les plus simples possibles de $\tan(u)$ au voisinage de 0 et de $\tan(u) - 1$ au voisinage de $\frac{\pi}{4}$.
   (b) On considère la fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = \tan\left(\dfrac{\pi}{4}\dfrac{x}{|x|+1}\right)$.
   Donner l'ensemble de définition de $\varphi$. Étudier la parité de $\varphi$.
   Donner des équivalents simples de $\varphi(x)$ en 0 et de $\varphi(x) - 1$ en $+\infty$.
2. Soit $n$ un entier. On définit l'application $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ par
   $$f(x) = \frac{x^n}{(x^2+1)\varphi(x)}.$$
   (a) Étudier selon les valeurs de $n$ la parité de $f$.
   (b) Donner des équivalents simples de $f$ au voisinage de 0 et $+\infty$.
   (c) Pour quelles valeurs de $n$ la fonction $f$ est-elle prolongeable par continuité en 0 ?
   (d) Pour quelles valeurs de $n$ la courbe représentative de $f$ admet-elle une asymptote en $+\infty$ ? Pour ces valeurs de $n$, préciser l'équation de l'asymptote correspondante. Que peut-on dire de la courbe au voisinage de $-\infty$ ?
3. Reprendre l'exercice avec l'application $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ par
   $$g(x) = \frac{x^n}{(x^2+1)\varphi(|x|)}.$$
   On pourra écrire une relation entre $f(x)$ et $g(x)$.

---

**Exercice 18** Soit $a$ et $b$ des réels tels que $a > b$. On considère la fonction $f$ définie par $f(x) = \sqrt{x^4 + 4ax^3 + 1} - \sqrt{x^4 + 4bx^3 + 1}$.

1. Donner un équivalent de $f(x)$ au voisinage de $+\infty$ de la forme $Ax$ ($A \in \mathbb{R}^*$).
2. En utilisant les formules
   $$\sqrt{x^4+4cx^3+1} - (x^2+2cx) = \frac{1-4c^2x^2}{\sqrt{x^4+4cx^3+1}+(x^2+2cx)} \quad \text{pour } c \in \{a, b\}$$
   calculer la limite $B$ de $f(x) - Ax$ lorsque $x \to +\infty$.
3. En utilisant les formules
   $$\sqrt{x^4+4cx^3+1} - (x^2+2cx-2c^2) = \frac{8c^3x + (1-4c^4)}{\sqrt{x^4+4cx^3+1}+(x^2+2cx-2c^2)} \quad \text{pour } c \in \{a, b\}$$
   trouver un équivalent de $f(x) - (Ax+B)$ au voisinage de $+\infty$ de la forme $C/x$ ($C \in \mathbb{R}^*$).
4. En déduire que la courbe représentative de $f$ admet une asymptote en $+\infty$ dont on donnera une équation. Préciser la position de la courbe par rapport à son asymptote.