Logique

Exercice 1 Soit P, Q, R des propositions. À l'aide de tables de vérité, montrer que :

1. $\big((Q \Longrightarrow P) \wedge (\neg Q \Longrightarrow P)\big) \iff P$;
2. $\neg(P \vee Q) \iff \big(\neg P \wedge \neg Q\big)$; $\neg(P \wedge Q) \iff \big(\neg P \vee \neg Q\big)$;
3. $\big(P \vee (Q \wedge R)\big) \iff (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$; $\big(P \wedge (Q \vee R)\big) \iff (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$.

Exercice 2 Écrire la négation des phrases suivantes :

1. Albert va à la piscine ou en cours de mathématiques ;
2. si le soleil brille, alors il va à la plage ;
3. il a un pantalon jaune et un chapeau rose ;
4. il est heureux lorsqu'il fait des mathématiques ;
5. il est heureux seulement lorsqu'il fait des mathématiques.

Exercice 3 Soit f et g deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Traduire en terme de quantificateurs les expression suivantes :

f est majorée ; f est paire ;
f ne s'annule jamais ; f n'est pas la fonction nulle ;
f est inférieure ou égale à g ; f n'est pas inférieure à g.

Exercice 4 Considérons une réunion d'amis autour d'un buffet. Notons G le groupe d'amis et P l'ensemble des plats proposés.

Associer les phrases mathématiques 1 à 6 aux phrases en français a à f.

1. $\forall x \in G,\ \forall p \in P,\ x$ mange p.
2. $\exists x \in G,\ \forall p \in P,\ x$ mange p.
3. $\forall x \in G,\ \exists p \in P,\ x$ mange p.
4. $\forall p \in P,\ \exists x \in G,\ x$ mange p.
5. $\exists p \in P,\ \forall x \in G,\ x$ mange p.
6. $\exists p \in P,\ \exists x \in G,\ x$ mange p.

a. Quelqu'un goûte à tous les plats.
b. Tous les plats sont entamés.
c. Chacun goûte à tous les plats.
d. Il y a au moins une personne qui ne jeûne pas.
e. Personne ne jeûne.
f. Il y a un plat qui fait l'unanimité.

Exercice 5 Dire qu'une suite de réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **bornée** signifie intuitivement qu'on peut trouver un nombre M tel que tous les éléments de la suite lui sont inférieurs en valeur absolue. Mathématiquement, cela s'écrit : $\exists M > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leqslant M$.

Nier cette propriété.

Exercice 6 Dire si les affirmations suivantes sont vraies puis écrire leur négation.

$\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x + y > 0$; $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x + y > 0$;
$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x + y > 0$; $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x + y > 0$.

Exercice 7 Soit $x \mapsto f(x)$ une fonction de la variable réelle x définie sur D_f. Intuitivement cette fonction admet une **limite** réelle ℓ en un point x_0 de D_f si on peut rendre $f(x)$ aussi proche que l'on veut de ℓ à la condition de rendre x suffisamment proche de x_0. Si de plus $\ell = f(x_0)$, on dit que f est **continue** en x_0.

Mathématiquement, la continuité de f en x_0 se traduit par

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in D_f,\ |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Écrire la négation de cette propriété, qui signifiera que f est discontinue en x_0.

Exercice 8 Montrer en utilisant un raisonnement par l'absurde la propriété :

« il n'existe pas de réels a, b, c tels que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x = ax^2 + bx + c$ ».

Exercice 9 Soit x un nombre réel.

1. Montrer par contraposition que $\big(\forall \varepsilon > 0,\ |x| < \varepsilon\big) \Longrightarrow x = 0$.
   En déduire que $\displaystyle\bigcap_{\varepsilon>0}]-\varepsilon, \varepsilon[= \{0\}$.
2. Montrer que $\big(\forall \varepsilon > 0,\ x < \varepsilon\big) \Longrightarrow x \leqslant 0$. En déduire que $\displaystyle\bigcap_{\varepsilon>0}]-\infty, \varepsilon[=]-\infty, 0]$.
   Déterminer l'ensemble $\displaystyle\bigcup_{\varepsilon>0} [\varepsilon, +\infty[$.

Exercice 10 Pour chacune des affirmations listées ci-dessous, dire si elle est vraie ou fausse, puis prouver la conjecture émise en utilisant un raisonnement par l'absurde, par contraposition, par contre-exemple ou par disjonction de cas.

1. Si le carré d'un entier naturel est pair, c'est que l'entier est pair.
2. Si x est un nombre réel, alors $x^2 - 7x + 12$ est un réel positif.
3. Pour tout entier naturel n, l'entier $n(n+1)$ est pair.
4. Si le dernier chiffre d'un entier n est 2, 3, 7 ou 8, alors n n'est pas le carré d'un entier.
5. Pour tout réel non nul x, le nombre $\dfrac{\sqrt{4x^2+6}}{x}$ est différent de 2.
6. Si a, b, c sont trois nombres réels strictement positifs tels que $a + b + c < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$, alors le plus petit de ces trois nombres est strictement inférieur à 1.

Exercice 11

1. Établir par récurrence les inégalités suivantes :

   a) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^+, (1+x)^n \geqslant 1 + nx$; b) $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1,2,3\}, n \leqslant 2^n \leqslant n!$.

2. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$:

   a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (2k+1) = n^2$; b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2k) = n^2 + n$.

Exercice 12 Critiquer le raisonnement suivant.

Montrons que n *points distincts donnés du plan sont toujours alignés sur une même droite.*

1. Ceci est vrai pour $n = 1$, et même pour $n = 2$.
2. Supposons que n points distincts sont toujours alignés sur une même droite (hypothèse de récurrence), et considérons $n+1$ points du plan $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}$.
   D'après l'hypothèse de récurrence, les n points $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ sont alignés sur une droite D, et les n points $A_2, A_3, \ldots, A_n, A_{n+1}$ sont alignés sur une droite D' ; mais comme les points A_2 et A_3 sont communs à D et D', alors $D = D'$, et les $n+1$ points $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}$ sont alignés sur $D = D'$ ce qui achève la récurrence.

Pour les insatiables...

Exercice 13 Écrire à l'aide de quantificateurs les propositions suivantes :

1. Le carré de tout réel est positif.
2. Certains réels sont strictement supérieurs à leur carré.
3. Aucun entier n'est supérieur à tous les autres.
4. Tous les réels ne sont pas des quotients d'entiers.
5. Il existe un entier multiple de tous les autres.
6. Entre deux réels distincts, il existe un rationnel.
7. Étant donné trois réels, il y en a au moins deux de même signe.

Exercice 14 Traduire en langage clair les assertions suivantes, étudier leur vérité puis écrire leur négation :

a) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x \geqslant y$;

b) $\forall x \in \mathbb{R},\ (x = 3) \Longrightarrow (x^2 = 9)$;

c) $\forall x \in \mathbb{R},\ (x^2 = 9) \Longrightarrow (x = 3)$.

Exercice 15

1. En utilisant la disjonction des cas, montrer l'équivalence suivante :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ \big(|x| \leqslant y \Longleftrightarrow -y \leqslant x \leqslant y\big).$$
2. À l'aide d'un raisonnement par l'absurde, prouver que $\sqrt{3}$ est un nombre irrationnel.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{n^2+2} \notin \mathbb{N}$ et $\sqrt[3]{n^3+4} \notin \mathbb{N}$.
4. Soit x et y deux réels positifs. Montrer que si $x \neq y$, alors $x - \sqrt{y} \neq y - \sqrt{x}$.

Exercice 16 Déterminer l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont à la fois paires et impaires.

Exercice 17 Soit $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres rationnels. Traduire chacune des assertions suivantes en un énoncé court dont la compréhension est immédiate :

a) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists \ell \in \mathbb{Z},\ q_n = \ell$ b) $\exists \ell \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N},\ q_n = \ell$

c) $\forall \ell \in \mathbb{Z}, \exists n \in \mathbb{N},\ q_n = \ell$ d) $\exists n \in \mathbb{N}, \forall \ell \in \mathbb{Z},\ q_n = \ell$

Exercice 18 Démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence les propriétés suivantes : $10^n - 1$ est divisible par 9 et $10^n - (-1)^n$ est divisible par 11.

Exercice 19 Soit n un entier strictement positif

1. Soit $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ des nombres réels tels que $a_1 + \cdots + a_n < b_1 + \cdots + b_n$. Montrer qu'il existe au moins un indice $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $a_i < b_i$.
2. On se donne $n+1$ réels $x_0, x_1, \ldots, x_n$ de $[0,1]$ vérifiant $0 \leqslant x_0 \leqslant x_1 \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant 1$. Montrer qu'il y a au moins deux de ces réels qui sont distants de moins de $1/n$.

Exercice 20 On considère la suite de Fibonacci $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. Montrer que l'on a
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

Exercice 21

1. À l'aide d'un raisonnement par analyse-synthèse, déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $f\big(y - f(x)\big) = 2 - x - y$.
2. À l'aide d'un raisonnement par analyse-synthèse, montrer que toute application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est la somme, de manière unique, d'une application paire et d'une application impaire. Examiner le cas de la fonction exponentielle.

Exercice 22 On se place dans le plan.

1. On considère trois droites D_1, D_2, D_3 formant un « vrai triangle », i.e. elles ne sont pas concourantes, et il n'y en a pas deux parallèles. Donner le nombre R_3 de régions (zones blanches du plan) découpées par ces trois droites.
2. On considère quatre droites D_1, D_2, D_3, D_4 telles qu'il n'en existe pas trois concourantes, ni deux parallèles. Calculer le nombre R_4 de régions du plan découpées par ces quatre droites.
3. Pour chaque entier n tel que $n \geqslant 3$ et chaque ensemble de n droites $D_1, \ldots, D_n$ telles qu'il n'en existe pas trois concourantes, ni deux parallèles, on note R_n le nombre de régions du plan délimitées par ces droites.
   De plus, une droite délimitant 2 régions et deux droites non parallèles en délimitant 4, on pose $R_1 = 2$ et $R_2 = 4$, ainsi que $R_0 = 1$ correspondant à l'unique région délimitée par le plan tout entier.
   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $R_n = R_{n-1} + n$.
4. Calculer par récurrence R_n.