Algèbre linéaire

Matrices

Exercice 1 Soit A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donnée par $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On pose $B = A - I_3$.

1. Calculer B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2 Calculer A^{100} pour la matrice donnée par $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 Soit A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donnée par $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et l'exprimer en fonction de A et I_3. En déduire que A est inversible et déterminer son inverse A^{-1}.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un couple de réels (α_n, β_n) tels que $A^n = \alpha_n A + \beta_n I_3$. On trouvera des relations de récurrence entre α_n, β_n, α_{n+1} et β_{n+1}.
3. Écrire une relation de récurrence entre α_n, α_{n+1} et α_{n+2}. Déterminer alors explicitement α_n et β_n.
4. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4 On désigne par F le sous-ensemble de $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices de la forme

$$M_{ab} = \begin{pmatrix} a & b & \dots & b & b \\ b & a & \ddots & & b \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b & & \ddots & a & b \\ b & b & \dots & b & a \end{pmatrix}, \quad \text{où } a, b \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que $(F, +, .)$ est-un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $(E, +, .)$ dont on donnera une base.
2. Montrer que $(F, +, \times)$ est-un sous-anneau de l'anneau $(E, +, \times)$.
3. Déterminer les éléments inversibles de F.
4. Déterminer les noyaux, images et rangs des endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ associés aux matrices non-inversibles de F.

Exercice 5 (Exponentielle d'une matrice) On dit qu'une matrice carrée A est *nilpotente* s'il existe un entier $k \geqslant 1$ tel que $A^k = 0$. Le plus petit tel entier s'appelle *indice de nilpotence* de A. Pour une matrice nilpotente A d'indice de nilpotence p, on définit son *exponentielle* par

$$\exp(A) = \sum_{i=0}^{p-1} \frac{1}{i!} A^i = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{i!} A^i$$

où la deuxième somme ne contient qu'un nombre fini de termes non nuls.

Soit A et B deux matrices nilpotentes qui commutent.

1. Montrer que les matrices AB et $A + B$ sont nilpotentes.
2. Montrer que $\exp(A + B) = \exp(A) \exp(B)$.
3. Montrer que $\exp(A)$ est une matrice inversible et déterminer son inverse $[\exp(A)]^{-1}$.
4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Calculer A^i pour tout $i \in \mathbb{N}$. En déduire $\exp(A)$.

Exercice 6 (Trace d'une matrice) Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif. Pour toute matrice $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle *trace* de A le scalaire

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

1. Montrer que l'application $\mathrm{Tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ ainsi définie est une forme linéaire sur le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont on précisera le noyau.
2. Montrer que si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a l'égalité $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$. Que peut-on dire des traces de deux matrices semblables ?
3. Existe-t-il des matrices A et B telles que $AB - BA = I_n$?
4. Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ une matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Calculer $\mathrm{Tr}({}^tAA)$ et $\mathrm{Tr}(A\,{}^tA)$.