INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Outils pour l'étude des fonctions

Exercice 1 Pour chacune des fonctions suivantes, préciser l'ensemble de définition et étudier la parité.

$$f_1(x) = \cos(x^3), \quad f_2(x) = \mathrm{e}^{\cos(x)}, \quad f_3(x) = \mathrm{e}^{\sin(x)} - 1, \quad f_4(x) = \sqrt{x^4 - 4x^2 + 3},$$
$$f_5(x) = \tan\left(\frac{1}{x}\right), \quad f_6(x) = \sin(x)\,\mathrm{ch}(\tan x), \quad f_7(x) = \frac{1+x^2}{\mathrm{sh}(x)}, \quad f_8(x) = \frac{1+\mathrm{e}^x}{1-\mathrm{e}^x}.$$

Exercice 2 Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer les variations sans utiliser de dérivée, puis tracer sans calcul la courbe représentative.

$$f_1(x) = (x-2)^3, \quad f_2(x) = \sqrt{-x}, \quad f_3(x) = -\frac{1}{x+1}, \quad f_4(x) = 3\sin(x) \text{ sur } [0, 2\pi],$$
$$f_5(x) = \sin(2x) \text{ sur } [0, 2\pi], \quad f_6(x) = 2\,\mathrm{e}^{x-3}, \quad f_7(x) = 1 + \mathrm{sh}(-x).$$

Exercice 3 Pour chacune des fonctions suivantes, préciser l'ensemble de définition et déterminer les variations sans calcul de dérivée :

$$f_1(x) = \ln(1+\mathrm{e}^{-x}),\ f_2(x) = \mathrm{ch}\big(\ln(x-2)\big),\ f_3(x) = \big(\mathrm{sh}(\sqrt{x+3}\,)\big)^3,\ f_4(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}.$$

Exercice 4 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = 2\,|x-2| - 4\,|x+1| + 3\,|x|.$$

Donner une écriture de $f(x)$ sans valeur absolue. Tracer le graphe de f puis résoudre l'équation $f(x) = -3$.

Exercice 5 (Fonction « partie entière »)

Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique entier n tel que $n \leqslant x < n+1$. On note cet entier $E(x)$. L'application $E : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$ est appelée « fonction partie entière ».

1. Calculer $E(5)$, $E(-5)$, $E(0,02)$, $E(-0,02)$, $E(3,8)$, $E(-3,8)$. La fonction E est-elle impaire ?
2. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$. Exprimer $E(x+n)$ en fonction de $E(x)$ et n.
3. Tracer le graphe de l'application E sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que les applications $f : x \longmapsto x - E(x)$ et $g : x \longmapsto E(4\,x) - 4\,E(x)$ sont périodiques et tracer leur graphe sur $[-2, 2]$.

Exercice 6 (Fonctions « puissances »)

1. Simplifier les expressions suivantes : $\left(\frac{1}{49}\right)^{-3/2}$, $\left(\frac{1}{32}\right)^{-0,8}$, $\left(\frac{32}{243}\right)^{-2/5}$, $\left(\frac{27}{2\sqrt{2}}\right)^{2/3}$.
2. Donner l'allure des représentations graphiques des fonctions suivantes :

$$f_1 : x \longmapsto x^{0,25},\ f_2 : x \longmapsto x^{-0,7},\ f_3 : x \longmapsto x^{\sqrt{2}},\ f_4 : x \longmapsto \pi^x,\ f_5 : x \longmapsto \left(\frac{1}{3}\right)^x.$$

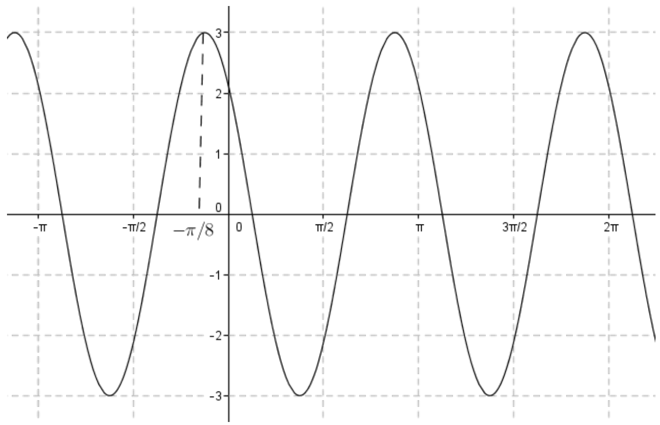
Exercice 7 Pour chacune des applications suivantes, dire si elle est injective, surjective, bijective.

$$f_1 : \begin{cases} \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \\ n \longmapsto n+1 \end{cases} \quad f_2 : \begin{cases} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \\ n \longmapsto n+1 \end{cases} \quad f_3 : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \cos x \end{cases}$$
$$f_4 : \begin{cases} [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1] \\ x \longmapsto \cos x \end{cases} \quad f_5 : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^4 + 3x^2 - 5 \end{cases} \quad f_6 : \begin{cases} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ z \longmapsto |z| \end{cases}$$

Exercice 8 Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = (x - y, ax + y)$.

1. On suppose $a \neq -1$. Montrer que f est bijective et déterminer sa réciproque.
2. On suppose que $a = -1$. Montrer que f n'est ni injective ni surjective.

Exercice 9 Le tracé ci-dessous est la courbe représentative d'une fonction de la forme $t \longmapsto A\cos(\omega t + \varphi)$, où A, ω, φ sont des réels positifs. Déterminer A, ω, φ à l'aide du graphique.



Exercice 10 On considère les applications $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = 3\cos(2x - \pi/4)$ et $g(x) = |f(x)|$.

1. Montrer que f est périodique et en déterminer une période $T > 0$.
2. Étudier la parité des applications $x \longmapsto f(x + \pi/8)$ et $x \longmapsto f(x + 3\pi/8)$.
3. Partant du graphe de la fonction cosinus, tracer les graphes de f et g sur $[-T, 2T]$.

Exercice 11 (Fonction « tangente hyperbolique »)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $\mathrm{th}(x) = \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$.

1. Étudier la parité de th.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{th}(x) = \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-2x}}{1 + \mathrm{e}^{-2x}}$.

   En déduire la limite de th en $+\infty$, puis en $-\infty$. En déduire également son sens de variation sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{th}'(x) = 1 - \mathrm{th}^2 x = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$.
4. Tracer la courbe représentative de th en précisant la tangente au point d'abscisse 0 et les asymptotes éventuelles en $+\infty$ et $-\infty$.

Exercice 12 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}.$$

1. Écrire le trinôme x^2+x+1 sous forme canonique.
2. Montrer que la fonction $x \longmapsto f(x-1/2)$ est paire. Quelle propriété géométrique peut-on en déduire sur le graphe de f ?
3. Sans utiliser la dérivée de f, étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et tracer son graphe.
4. Déterminer graphiquement l'ensemble $f(\mathbb{R})$.
5. Soit $y \in \mathbb{R}$. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x suivante : $y = f(x)$.
6. Déterminer alors $f(\mathbb{R})$ puis trouver les deux intervalles maximaux sur lesquels la restriction de f réalise une bijection vers $f(\mathbb{R})$. On écrira explicitement les bijections réciproques.

Exercice 13 Soit E, F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application. On suppose qu'il existe deux applications $g : F \longrightarrow E$ et $h : F \longrightarrow E$ telles que $h \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{id}_F$. Montrer que f est bijective, que $g = h$ et que $f^{-1} = g$.

Application. — On note $E = \mathbb{R}\backslash\{1, -1\}$. Soit $f : E \longrightarrow E$ définie par $f(z) = \dfrac{z-3}{z+1}$.

1. Montrer que l'on a bien $f(E) \subset E$, puis calculer $(f \circ f \circ f)(z)$ pour tout $z \in E$.
2. En déduire que f est bijective et donner l'expression de sa réciproque.

Exercice 14 On considère les fonctions polynômes P et Q définies par $P(x) = 5x^3 - 2x + 1$ et $Q(x) = 2x^2 - 1$.

Calculer les fonctions polynômes suivantes et donner leurs degrés respectifs : $P+Q$, $P \times Q$, $x \longmapsto P(x^2)$, P^2, Q^3, $P \circ Q$, $Q \circ P$, $x \longmapsto Q(x+1) - Q(x)$.

Exercice 15 (Une courbe de Lissajous)

Pour chaque $t \in \mathbb{R}$, on définit dans un repère orthonormé le point $M(t)$ de coordonnées $(\cos(3t), \sin(2t))$.

1. Étudier la courbe paramétrée $t \in [0, \pi/2] \longmapsto M(t)$.
2. Examiner les symétries de la courbe paramétrée $t \in [0, 2\pi] \longmapsto M(t)$; on pourra regarder les points $M(\pi - t)$, $M(t+\pi)$.
3. Tracer alors cette courbe (*courbe de Lissajous* observée par exemple sur un oscilloscope).

Pour les insatiables...

Exercice 16

1. Montrer que l'application $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $f(n) = n/2$ si n est pair et $f(n) = -(n+1)/2$ si n est impair, est bijective et déterminer sa réciproque.
2. Même question pour l'application $g : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}^*$ définie pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ par $g(p,q) = 2^p(2q+1)$.

Exercice 17 Soit $p, q \in \mathbb{N}^*$ et $T > 0$. On considère deux applications $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que f soit pT-périodique et g soit qT-périodique. Montrer que l'application $f+g$ est périodique et en déterminer une période.

Exemple. — Soit $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $h(x) = 2\sin(\frac{x}{2}) - 3\sin(\frac{x}{3})$. Déterminer une période T de h. Étudier les variations de h sur $[0, T]$ puis tracer le graphe de h sur $[-T, 2T]$.

Exercice 18 (Fonctions « cosinus et sinus hyperboliques »)

1. Montrer les formules suivantes : pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,
$$\mathrm{ch}(x+y) = \mathrm{ch}(x)\,\mathrm{ch}(y) + \mathrm{sh}(x)\,\mathrm{sh}(y),$$
$$\mathrm{sh}(x+y) = \mathrm{sh}(x)\,\mathrm{ch}(y) + \mathrm{ch}(x)\,\mathrm{sh}(y).$$
2. Exprimer $\mathrm{ch}(2x)$ en fonction de $\mathrm{ch}(x)$, puis $\mathrm{sh}(2x)$ en fonction de $\mathrm{ch}(x)$ et $\mathrm{sh}(x)$.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(3x) = P(\mathrm{ch}(x))$ où P est une fonction polynôme de degré 3 que l'on déterminera.

Exercice 19

1. Déterminer une fonction polynôme P de degré 3 telle que l'on ait pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) - P(x-1) = x^2$. En déduire la valeur de la somme $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Déterminer une fonction polynôme P de degré 4 telle que l'on ait pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) - P(x-1) = x^3$. En déduire la valeur de la somme $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

   Vérifier que $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} k\right)^2$.

Exercice 20 (L'« astroïde »)

Pour chaque $t \in [0, 2\pi]$, on définit dans un repère orthonormé les points $P(t)$, $Q(t)$ et $m(t)$ de coordonnées respectives $(\cos t, 0)$, $(0, \sin t)$ et $(\cos t, \sin t)$. On construit le point $M(t)$ pied de la hauteur du triangle $P(t)Q(t)m(t)$ issue de $m(t)$ (voir la figure ci-dessous).

1. Montrer que les coordonnées du point $M(t)$ sont données par $(\cos^3 t, \sin^3 t)$.
2. Étudier la courbe paramétrée $t \in [0, \pi/2] \longmapsto M(t)$, puis examiner les symétries de la courbe paramétrée $t \in [0, 2\pi] \longmapsto M(t)$; on pourra regarder les points $M(\pi - t)$, $M(t+\pi)$. Tracer alors cette courbe (il s'agit d'une *astroïde*, hypocycloïde à 4 points de rebroussements).