INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Polynômes

Exercice 1 On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction polynôme P par $P(x) = x^6 - 5x^4 - 8x^2 + 48$.

1. Montrer que 2 est une racine de P dont on précisera l'ordre de multiplicité. Quelle autre racine peut-on en déduire ?
2. Trouver toutes les racines de P, puis factoriser au maximum P sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 Déterminer toutes les fonctions polynômes réelles P de degré au plus 3 vérifiant $P(1)^2 + P(2)^2 + P(3)^2 + P(4)^2 = 0$. Même question avec P de degré au plus 4.

Exercice 3 Montrer que deux fonctions polynômes définies sur $\mathbb{C}$ coïncidant sur un sous-ensemble infini de $\mathbb{C}$ coïncident sur $\mathbb{C}$ tout entier.

Exemples. — Soit P et Q deux fonctions polynômes définies sur $\mathbb{C}$. Si $P(\sin\theta) = Q(\sin\theta)$ pour tout $\theta \in [0, \pi]$, ou si $P(x) = Q(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, ou si $P(n) = Q(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $P(z) = Q(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 4

1. Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos(5\theta) = P(\cos\theta)$ et $\sin(5\theta) = P(\sin\theta)$ où P est une fonction polynôme de degré 5 que l'on déterminera.
2. Déterminer toutes les racines de P. En déduire la valeur de $\sin(\pi/5)$.
3. Montrer que $P(x) + 1$ est divisible par $x + 1$. On note alors $Q(x)$ le quotient de $P(x) + 1$ par $x + 1$.
   (a) Déterminer des réels a, b, c tels que $Q(x) = (ax^2 + bx + c)^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   (b) Déterminer toutes les racines de $P + 1$. En déduire la valeur de $\cos(\pi/5)$.

Exercice 5 Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$ et P une fonction polynôme réelle de degré n.

1. On suppose que P admet exactement n racines réelles. À l'aide du Lemme de Rolle, montrer que P' admet exactement $(n - 1)$ racines réelles.
2. Généralisation. — On suppose que P admet toutes ses racines dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il en est de même pour P' (et en fait pour toutes ses dérivées successives). On pourra noter que si α est une racine de P d'ordre de multiplicité μ, alors α est une racine de P' d'ordre de multiplicité $(\mu - 1)$.

Exercice 6

1. Trouver la fonction polynôme P_0 de degré 4 vérifiant $P_0(1) = 0$, $P_0'(1) = 1$, $P_0''(1) = 2$, $P_0'''(1) = 2$, $P_0^{(4)}(1) = 2$.
2. Déterminer ensuite toutes les fonctions polynômes P vérifiant $P(1) = 0$, $P'(1) = 1$, $P''(1) = 2$, $P'''(1) = 2$, $P^{(4)}(1) = 2$.

Exercice 7 Soit a, b, c trois nombres réels. On pose $P(x) = x^6 - 5x^4 + ax^2 + bx + c$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer les valeurs de a, b, c pour lesquelles P admette une racine d'ordre de multiplicité au moins 4.
2. Factoriser alors P au maximum sur $\mathbb{R}$.

Reprendre l'exercice avec $P(x) = x^6 + 5x^4 + ax^2 + bx + c$.

Pour les insatiables...

Exercice 8 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère les fonctions polynômes définies sur $\mathbb{C}$ par

$$A(z) = (z+1)^n - z^n - 1, \quad B_1(x) = z^2 + z + 1, \quad B_2(x) = (z^2 + z + 1)^2.$$

1. Déterminer les racines de B_1 et B_2 dans $\mathbb{C}$.
2. Pour quelles valeurs de n la fonction polynôme A est-elle divisible par B_1 ? par B_2 ?

Exercice 9 On se propose de déterminer les fonctions polynômes de degré 5 sur $\mathbb{R}$ telles que $P(x) + 10$ soit divisible par $(x + 2)^3$ et $P(x) - 10$ soit divisible par $(x - 2)^3$.

1. Quelles sont les valeurs de $P(2)$ et $P(-2)$?
2. Déterminer les racines de la fonction dérivée P' en précisant leur ordre de multiplicité.
3. En déduire la forme factorisée de P', puis sa forme développée.
4. Trouver enfin les fonctions polynômes P répondant à la question posée.

Exercice 10 On définit une suite de fonctions sur $\mathbb{C}$ par $P_0(z) = 2$, $P_1(z) = z$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_{n+2}(z) = zP_{n+1}(z) - P_n(z)$.

1. Calculer $P_n(z)$ pour $n \in \{2, 3, 4\}$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est une fonction polynôme de degré n.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in \mathbb{C}^*$, $P_n\left(z + \dfrac{1}{z}\right) = z^n + \dfrac{1}{z^n}$.
4. Pour θ réel, exprimer $\cos(n\theta)$ à l'aide de P_n et de $\cos\theta$.
5. Trouver les racines de P_n de la forme $2\cos\theta$ où $\theta \in [0, \pi]$. La fonction polynôme P_n admet-elle d'autres racines ?

Exercice 11 Soit A une fonction polynôme sur $\mathbb{C}$ et a, b deux complexes distincts. Déterminer le reste de la division euclidienne de $A(z)$ par $(z-a)(z-b)$. On ne demande pas le quotient. Examiner le cas où A est à coefficients réels et a, b sont des complexes conjugués.

Application. — Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On considère les fonctions polynômes A_1, B_1 et A_2, B_2 respectivement définies par $A_1(z) = (z\sin\theta + \cos\theta)^n$, $B_1(z) = z^2 + 1$ et $A_2(z) = (z\,\mathrm{sh}\,\theta + \mathrm{ch}\,\theta)^n$, $B_2(z) = z^2 - 1$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

1. Calculer $A_1(\mathrm{i})$ et $A_1'(\mathrm{i})$. Déterminer le reste $R_1(x)$ (respectivement $S_1(x)$) de la division euclidienne de $A_1(x)$ par $B_1(x)$ (respectivement $B_1(x)^2$) sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $A_2(1)$, $A_2(-1)$, $A_2'(1)$ et $A_2'(-1)$. Déterminer le reste $R_2(x)$ (respectivement $S_2(x)$) de la division euclidienne de $A_2(x)$ par $B_2(x)$ (respectivement $B_2(x)^2$) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 12 Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $c \neq 0$. On considère la fonction polynôme P définie sur $\mathbb{C}$ par $P(z) = z^3 + a\,z^2 + b\,z + c$ et l'on note α, β, γ ses racines dans $\mathbb{C}$.

1. Développer le produit $(z - \alpha)(z - \beta)(z - \gamma)$.
2. Exprimer en fonction de a, b, c les quantités $\sigma_1 = \alpha + \beta + \gamma$, $\sigma_2 = \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma$, $\sigma_3 = \alpha\beta\gamma$, $\sigma_4 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ et $\sigma_5 = \dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} + \dfrac{1}{\gamma}$.