Polynômes

Exercice 1 On considère les fonctions polynômes P et Q définies par $P(x) = 5x^3 - 2x + 1$ et $Q(x) = 2x^2 - 1$.

Calculer les fonctions polynômes suivantes et donner leurs degrés respectifs : $P + Q$, $P \times Q$, $x \longmapsto P(x^2)$, P^2, Q^3, $P \circ Q$, $Q \circ P$, $x \longmapsto Q(x+1) - Q(x)$.

Exercice 2 Donner le reste de la division euclidienne de $A = X^{50}$ par $B = X^2 - 3X + 2$.

Exercice 3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A = (X+1)^{2n} - X^{2n} - 2X - 1$ et $B = X(X+1)(2X+1)$.

Montrer que A est divisible par B.

Exercice 4 Soit $n \geqslant 2$ un entier et soit a et b deux réels. Exprimer, en fonction de n, a et b, le reste de la division euclidienne du polynôme $P = aX^n + bX^{n-1} + 1$ par le polynôme : 1) $X - 1$; 2) $X^2 - 1$; 3) $(X-1)^2$.

Exercice 5 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$.

Calculer P'. Montrer qu'il existe un polynôme Q tel que $P = (X-1)^2 Q$.

Exercice 6 Pour tout entier $n \geqslant 2$, soit $P_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} X^i$.

Calculer P_n'. Montrer que toutes les racines de P_n dans $\mathbb{C}$ sont simples. (On pourra raisonner par l'absurde.)

Exercice 7 Déterminer toutes les fonctions polynômes réelles P de degré au plus 3 vérifiant $P(1)^2 + P(2)^2 + P(3)^2 + P(4)^2 = 0$. Même question avec P de degré au plus 4.

Exercice 8

1. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Calculer $(X - \alpha)(X - \bar{\alpha})$ et vérifier que c'est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$.
2. Déterminer les réels a et b pour que le nombre $\alpha = 1 - i$ soit racine du polynôme $P = X^4 - 3X^3 + 5X^2 + aX + b$.
3. Factoriser le polynôme ainsi obtenu sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.

Exercice 9 On définit sur $\mathbb{R}$ le polynôme $P = X^6 - 5X^4 - 8X^2 + 48$.

1. Montrer que 2 est une racine de P dont on précisera l'ordre de multiplicité. Quelle autre racine peut-on en déduire ?
2. Trouver toutes les racines de P, puis factoriser au maximum P sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10 Montrer que deux fonctions polynômes définies sur $\mathbb{C}$ coïncidant sur un sous-ensemble infini de $\mathbb{C}$ coïncident sur $\mathbb{C}$ tout entier.

Exemples. — Soit P et Q deux fonctions polynômes définies sur $\mathbb{C}$. Si $P(\sin\theta) = Q(\sin\theta)$ pour tout $\theta \in [0, \pi]$, ou si $P(x) = Q(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, ou si $P(n) = Q(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $P(z) = Q(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 11 Soit P et Q deux fonctions polynômes.

On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P^{(k)}(\alpha) = Q^{(k)}(\alpha)$. Montrer qu'alors P et Q sont égales sur $\mathbb{R}$.

Exercice 12

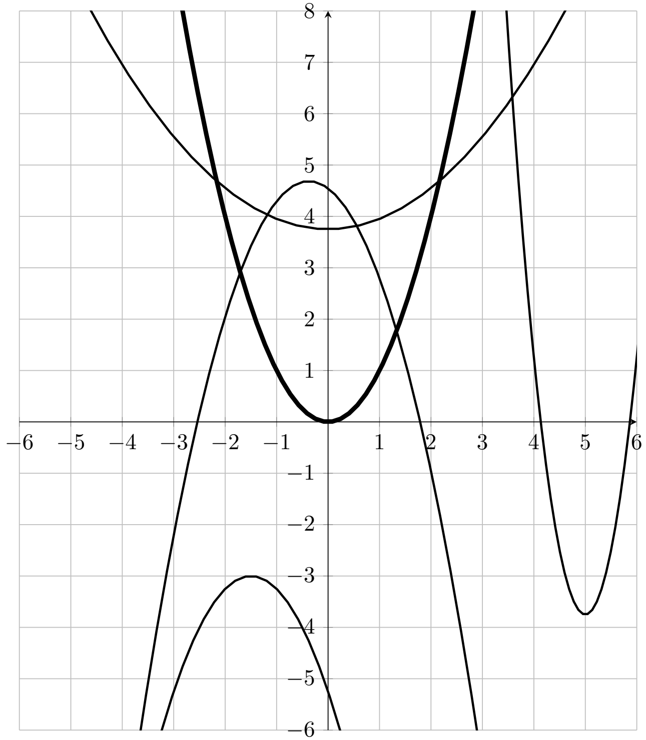
1. Trouver le polynôme P_0 de degré 4 vérifiant $P_0(1) = 0$, $P_0'(1) = 1$, $P_0''(1) = 2$, $P_0'''(1) = 2$, $P_0^{(4)}(1) = 2$.
2. Déterminer ensuite tous les polynômes P vérifiant $P(1) = 0$, $P'(1) = 1$, $P''(1) = 2$, $P'''(1) = 2$, $P^{(4)}(1) = 2$.

Exercice 13 Soit a, b, c trois nombres réels. On pose $P = X^6 - 5X^4 + aX^2 + bX + c$.

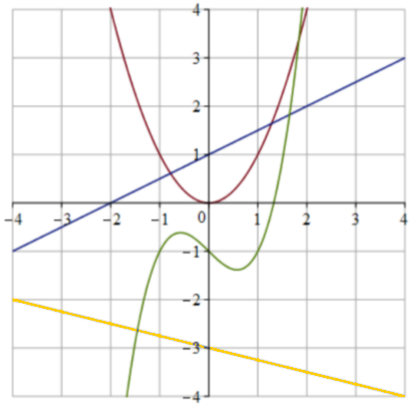
1. Déterminer les valeurs de a, b, c pour lesquelles P admette une racine d'ordre de multiplicité au moins 4.
2. Factoriser alors P au maximum sur $\mathbb{R}$.

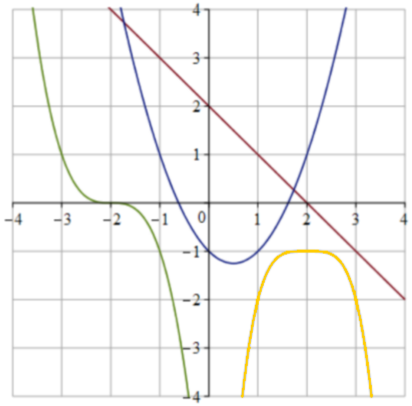
Reprendre l'exercice avec $P = x^6 + 5X^4 + aX^2 + bX + c$.

Exercice 14 (Autour de la parabole) *Montrer que toute parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$, peut être transformée en la parabole "canonique" d'équation $y = x^2$ par des transformations usuelles du plan (translations, symétries, dilatations horizontales ou verticales).*



Exercice 15 Les figures ci-dessous représentent chacune le graphe de quatre fonctions polynômes. Pour chacun de ces graphes, proposer une expression plausible pour le polynôme correspondant.

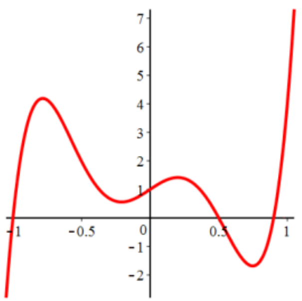




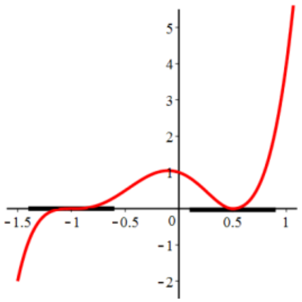
Exercice 16 Soit P une fonction polynôme vérifiant les conditions suivantes :

- Le terme de plus haut degré de P est $4x^5$.
- P admet -1 comme racine simple et $\dfrac{1}{2}$ comme racine double ;
- $P(x)$ est divisible par (x^2+1).

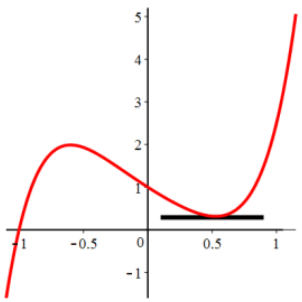
1. Factoriser $P(x)$ au maximum sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.
2. Parmi les courbes n$^{\text{os}}$ 1 à 6 ci-dessous, justifier qu'il n'y en a qu'une seule qui peut être la courbe représentative de P. Préciser laquelle.



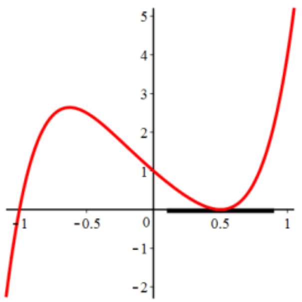
courbe 1



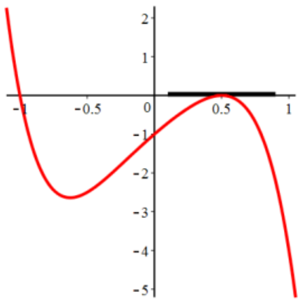
courbe 2



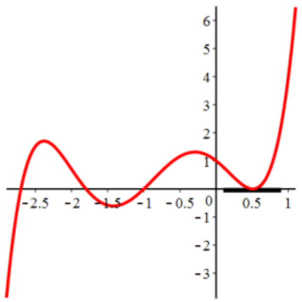
courbe 3



courbe 4



courbe 5



courbe 6

Exercice 17

1. Déterminer une fonction polynôme P de degré 3 telle que l'on ait pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) - P(x-1) = x^2$. En déduire la valeur de la somme $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Déterminer une fonction polynôme P de degré 4 telle que l'on ait pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) - P(x-1) = x^3$. En déduire la valeur de la somme $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour les insatiables...

Exercice 18 Effectuer la division euclidienne de $A = 3X^4 - X^3 - 3X^2 + 24X - 2$ par $B = X^2 - 2X + 3$.

Exercice 19 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère les fonctions polynômes définies sur $\mathbb{C}$ par

$$A(z) = (z+1)^n - z^n - 1, \quad B_1(x) = z^2 + z + 1, \quad B_2(x) = (z^2 + z + 1)^2.$$

1. Déterminer les racines de B_1 et B_2 dans $\mathbb{C}$.
2. Pour quelles valeurs de n la fonction polynôme A est-elle divisible par B_1 ? par B_2 ?

Exercice 20 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $A = (X-2)^{2n+1} + 2(4-3X)^n - X$ et $B = X^2 - X$.

1. Montrer que A est divisible par B sans effectuer la division euclidienne ni développer P.
2. Sans division euclidienne ni développement, déterminer si A est divisible par $C = (X-1)^2$.

Exercice 21

1. Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos(5\theta) = P(\cos\theta)$ et $\sin(5\theta) = P(\sin\theta)$ où P est une fonction polynôme de degré 5 que l'on déterminera.
2. Déterminer toutes les racines de P. En déduire la valeur de $\sin(\pi/5)$.
3. Montrer que $P(x) + 1$ est divisible par $x + 1$. On note alors $Q(x)$ le quotient de $P(x) + 1$ par $x + 1$.
   (a) Déterminer des réels a, b, c tels que $Q(x) = (ax^2 + bx + c)^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   (b) Déterminer toutes les racines de $P + 1$. En déduire la valeur de $\cos(\pi/5)$.

Exercice 22 On se propose de déterminer les fonctions polynômes de degré 5 sur $\mathbb{R}$ telles que $P(x) + 8$ soit divisible par $(x+1)^3$ et $P(x) - 8$ soit divisible par $(x-1)^3$.

1. Quelles sont les valeurs de $P(1)$ et $P(-1)$?
2. Déterminer les racines de la fonction dérivée P' en précisant leur ordre de multiplicité.
3. En déduire la forme factorisée de P', puis sa forme développée.
4. Trouver enfin les fonctions polynômes P répondant à la question posée.

Exercice 23 On définit une suite de fonctions sur $\mathbb{C}$ par $P_0(z) = 2$, $P_1(z) = z$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_{n+2}(z) = zP_{n+1}(z) - P_n(z)$.

1. Calculer $P_n(z)$ pour $n \in \{2, 3, 4\}$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est une fonction polynôme de degré n.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in \mathbb{C}^*$, $P_n\left(z + \frac{1}{z}\right) = z^n + \frac{1}{z^n}$.
4. Pour θ réel, exprimer $\cos(n\theta)$ à l'aide de P_n et de $\cos\theta$.
5. Trouver les racines de P_n de la forme $2\cos\theta$ où $\theta \in [0, \pi]$. La fonction polynôme P_n admet-elle d'autres racines ?

Exercice 24 Soit A une fonction polynôme sur $\mathbb{C}$ et a, b deux complexes distincts. Déterminer le reste de la division euclidienne de $A(z)$ par $(z-a)(z-b)$. On ne demande pas le quotient. Examiner le cas où A est à coefficients réels et a, b sont des complexes conjugués.

Application. — Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On considère les fonctions polynômes A_1, B_1 et A_2, B_2 respectivement définies par $A_1(z) = (z\sin\theta + \cos\theta)^n$, $B_1(z) = z^2 + 1$ et $A_2(z) = (z\,\mathrm{sh}\,\theta + \mathrm{ch}\,\theta)^n$, $B_2(z) = z^2 - 1$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

1. Calculer $A_1(\mathrm{i})$ et $A_1'(\mathrm{i})$. Déterminer le reste $R_1(x)$ (respectivement $S_1(x)$) de la division euclidienne de $A_1(x)$ par $B_1(x)$ (respectivement $B_1(x)^2$) sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $A_2(1)$, $A_2(-1)$, $A_2'(1)$ et $A_2'(-1)$. Déterminer le reste $R_2(x)$ (respectivement $S_2(x)$) de la division euclidienne de $A_2(x)$ par $B_2(x)$ (respectivement $B_2(x)^2$) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 25

1. Montrer qu'un polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$ vérifie :
$$(P_1) : \forall x \in \mathbb{C},\ Q(x) = Q(x+1)$$
si et seulement s'il est constant (on pourra s'intéresser aux racines de Q).
2. On veut maintenant déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que :
$$(P_2) : \forall x \in \mathbb{C},\ (x+4)P(x) = xP(x+1).$$
   (a) Soit P un polynôme vérifiant (P_2). Montrer que 0 est une racine de P.
   (b) En déduire trois autres racines de P.
   (c) Montrer que les polynômes vérifiant (P_2) sont tous les polynômes de la forme $P = \lambda X(X+1)(X+2)(X+3)$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$.

Exercice 26 Soit $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $c \neq 0$. On considère la fonction polynôme P définie sur $\mathbb{C}$ par $P(z) = z^3 + a\,z^2 + b\,z + c$ et l'on note α, β, γ ses racines dans $\mathbb{C}$.

1. Développer le produit $(z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)$.
2. Exprimer en fonction de a, b, c les quantités $\sigma_1 = \alpha + \beta + \gamma$, $\sigma_2 = \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma$, $\sigma_3 = \alpha\beta\gamma$, $\sigma_4 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ et $\sigma_5 = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}$.

Exercice 27 Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$ et P une fonction polynôme réelle de degré n.

1. On suppose que P admet exactement n racines réelles. À l'aide du Lemme de Rolle, montrer que P' admet exactement $(n-1)$ racines réelles.
2. Généralisation. — On suppose que P admet toutes ses racines dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il en est de même pour P' (et en fait pour toutes ses dérivées successives). On pourra noter que si α est une racine de P d'ordre de multiplicité μ, alors α est une racine de P' d'ordre de multiplicité $(\mu - 1)$.

Exercice 28 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue vérifiant :
$$\forall x \in I,\ 2f(x)^3 - 5f(x)^2 - 4f(x) + 3 = 0.$$
Montrer que f est une fonction constante (on pourra utiliser le théorème des valeurs intermédiaires).

Exercice 29 (Polynôme d'interpolation de Lagrange)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des nombres réels distincts et $b_1, b_2, \ldots, b_n$ des nombres réels. On pose $L_i(x) = \prod_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ k \neq i}} \frac{x - a_k}{a_i - a_k}$ pour $i \in \{1, \ldots, n\}$ et $x \in \mathbb{R}$ et l'on considère la fonction polynôme P définie sur $\mathbb{R}$ par $P = \sum_{i=1}^{n} b_i\,L_i$.

1. Calculer $P(a_j)$ pour $j \in \{1, \ldots, n\}$.
2. Montrer que P est l'unique fonction polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$ telle que $P(a_j) = b_j$ pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$.
3. Déterminer la forme de toutes les fonctions polynômes Q telles que $Q(a_j) = b_j$ pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$.
4. Application : déterminer les fonctions polynômes de degré au plus 2 coïncidant avec la fonction sinus aux points
   a) $a_1 = \pi/2$, $a_2 = 0$, $a_3 = \pi/2$;
   b) $a_1 = -\pi$, $a_2 = 0$, $a_3 = \pi/2$;
   c) $a_1 = -\pi/2$, $a_2 = \pi/2$, $a_3 = 3\pi/2$;
   d) $a_1 = -3\pi/2$, $a_2 = \pi/2$, $a_3 = 5\pi/2$.

Exercice 30 Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^n = 1$. On cherchera les solutions sous forme trigonométriques. Déterminer les racines réelles.
2. Factoriser au maximum la fonction polynôme P définie par $P(x) = x^n - 1$ sur $\mathbb{C}$. Factorisation au maximum P sur $\mathbb{R}$ lorsque n est pair.
3. On introduit la fonction polynôme Q donnée par $Q(x) = \prod_{k=1}^{n-1}(x - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(2k\pi/n)})$. Exprimer $Q(x)$ à l'aide de $P(x)$ puis montrer que $Q(x) = x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1$.
4. À l'aide de $Q(1)$, en déduire la valeur du produit $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.