INSA 1er cycle

Analyse

Séries de Fourier

Exercice 1

1. (a) Développer en série de Fourier la fonction 2π-périodique f définie par $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in [-\pi, 0[, \\ 1 & \text{si } x \in [0, \pi[. \end{cases}$
   (b) En déduire la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.
2. (a) Développer en série de Fourier la fonction 2π-périodique f définie par $f(x) = |x|$ si $x \in [-\pi, \pi[$.
   (b) Intégrer la série de Fourier de f sur l'intervalle $[0, x]$, puis intégrer la série ainsi obtenue sur $[\frac{\pi}{2}, x]$ pour $x \in [-\pi, \pi[$.
   (c) En déduire la valeur des sommes $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.
3. (a) Développer en série de Fourier la fonction 2π-périodique f définie par $f(x) = x(\pi - |x|)$ si $x \in [-\pi, \pi[$.
   (b) En déduire la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$.

Exercice 2 On considère la série de fonctions $(\sum f_n)$ de terme général donné par $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n!}$.

1. Montrer que la série est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.
2. Soit alors $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ sa fonction somme.
   (a) La fonction S est-elle périodique ?
   (b) La fonction S est-elle continue ? dérivable ?
3. En utilisant l'écriture complexe $f_n(x) = \Im\Big(\dfrac{e^{inx}}{n!}\Big)$, exprimer la fonction S à l'aide de fonctions usuelles.
4. Quel est le développement en série de Fourier de la fonction $x \mapsto e^{\cos x} \sin(\sin x)$?

Exercice 3 Soient $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et f la fonction 2π-périodique définie sur $[-\pi, \pi[$ par $f(x) = \cos(ax)$.

1. Tracer la courbe de f sur $[-2\pi, 2\pi]$ dans le cas où $a = 10/3$.
2. Vérifier que la fonction f est continue.
3. Déterminer le développement de f en série de Fourier.
4. Montrer que la série de Fourier de f est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$. La fonction f coïncide-t-elle avec la somme de sa série de Fourier ?
5. Déduire de ce qui précède l'égalité
$$\frac{\pi}{\sin(a\pi)} = \frac{1}{a} + 2a \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a^2 - n^2}.$$
6. Montrer que la série de fonctions $(\sum f_n)$ de terme général donné par $f_n(a) = \dfrac{(-1)^n}{a^2 - n^2}$ est uniformément convergente sur $[-\varepsilon, \varepsilon]$ pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$. En déduire la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

Exercice 4 On rappelle que pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$.

1. Écrire la fraction $\dfrac{1+z}{1-z}$ sous la forme d'une série de puissances de z.
2. En posant $z = re^{i\theta}$ avec $r, \theta \in \mathbb{R}$, ainsi que $K(r, \theta) = \dfrac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\theta + r^2}$, déduire de la question précédente la formule suivante, valable pour tout $r \in]-1, 1[$,
$$K(r, \theta) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} r^n \cos(n\theta).$$
3. Donner alors la série de Fourier de la fonction $y \mapsto K(r, x - y)$, puis en déduire les relations suivantes, valables pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} K(r, x-y) \cos(ny)\, dy &= 2\, r^n \cos(nx), \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} K(r, x-y) \sin(ny)\, dy &= 2\, r^n \sin(nx). \end{aligned}$$
4. On considère l'équation intégrale d'inconnue la fonction φ définie sur $[0, 2\pi]$
$$\int_0^{2\pi} K(r, x-y)\, \varphi(y)\, dy = 2\pi r^p \varphi(x), \ x \in [0, 2\pi],$$
où $p \in \mathbb{N}^*$ et $r \in]-1, 1[$ sont fixés. Chercher les solutions de cette équation développables en série de Fourier.