Analyse

Suites numériques

Exercice 1 On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général donné par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{2n} - u_n \geqslant \dfrac{1}{2}$.
3. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est divergente. Quelle est sa limite ?
4. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k} \geqslant \ln(k+1) - \ln k$.
5. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant \ln n$ et retrouver le résultat de la question 3.

Exercice 2 On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général donné par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
2. Montrer le résultat suivant, valable pour tout $k \geqslant 3$:
$$\frac{1}{k^3} \leqslant \frac{1}{k(k-1)(k-2)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{k} - \frac{2}{k-1} + \frac{1}{k-2}\right].$$
3. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée, puis convergente.

Exercice 3 On considère les deux suites numériques $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dont les termes généraux sont donnés par $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n\,n!}$.

1. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes, donc convergentes de même limite notée e.
2. À l'aide de l'encadrement valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n < e < u_n + \dfrac{1}{n!}$, prouver que la limite e est un nombre irrationnel.
3. On considère à présent la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $w_0 = e - 1$ et la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = nw_{n-1} - 1$.
   (a) En introduisant la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_n = \dfrac{w_n}{n!}$, obtenir l'écriture explicite de z_n puis celle de w_n en fonction de n.
   (b) À l'aide de la relation de récurrence satisfaite par la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de l'encadrement $u_{n+1} < e < v_n$, prouver que l'on a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n+1} < w_n < \dfrac{1}{n}$. En déduire la convergence de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 4 (Récurrence linéaire à trois indices)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de ses deux premiers termes $u_0, u_1 \in \mathbb{R}$ et par la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = a\,u_{n+1} + b\,u_n$. On note r_1 et r_2 les racines complexes (éventuellement confondues) de l'équation $r^2 = a\,r + b$.

1. On introduit $v_n = u_n - r_1\,u_{n-1}$. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
2. On introduit la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $w_n = u_n/r_1^n$. Calculer $w_n - w_{n-1}$ puis exprimer w_n en fonction de r_1, r_2 et n.
3. En déduire que, l'on a $\boxed{u_n = \begin{cases} \lambda\, r_1^n + \mu\, r_2^n & \text{lorsque } r_1 \neq r_2 \\ (\lambda\, n + \mu) r_1^n & \text{lorsque } r_1 = r_2 \end{cases}}$ où λ et μ sont des complexes à exprimer à l'aide de u_0 et u_1.
4. Application : déterminer explicitement la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ (suite de Fibonacci).

Exercice 5 Soit $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \sqrt[3]{3x+1} - 1$. On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de son premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et par la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$, puis tracer son graphe.
2. Déterminer les points fixes de f.
3. En comparant u_0 et u_1 (on résoudra l'inéquation $f(x) \leqslant x$), étudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ selon la valeur de u_0.

Exercice 6 Soit $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{3}{x+2}$. On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de son premier terme $u_0 \in]-2, +\infty[$ et par la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Étudier les variations de la fonction f sur $]-2,+\infty[$, puis tracer son graphe.
2. Déterminer les deux points fixes de f sur $\mathbb{R}$ que l'on notera r_1 et r_2.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > -2$ et donc que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
4. Calculer $f \circ f$. Étudier les variations de la fonction $f \circ f$ sur $]-2, +\infty[$, puis tracer son graphe. Déterminer les points fixes de $f \circ f$.
5. On introduit les suites extraites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de termes généraux $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$. Montrer que ces deux suites sont adjacentes.
6. Prouver alors la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et déterminer sa limite.
7. On pose $z_n = \dfrac{u_n - r_1}{u_n - r_2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
8. Exprimer u_n en fonction de z_n. Retrouver la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 7 Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = a$, $v_0 = b$ et et par les relations de récurrence $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}(u_n + v_n), \quad v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1}v_n}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n \leqslant v_n$. On pourra calculer $\dfrac{v_{n+1}}{u_{n+1}}$.
2. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
3. On pose $a = b\cos\theta$ avec $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Exprimer u_1, v_1, u_2, v_2 en fonction de b et θ, puis obtenir plus généralement une expression de u_n et v_n en fonction de n, b et θ.
4. En utilisant la relation $\cos\varphi = \dfrac{\sin(2\varphi)}{2\sin\varphi}$, prouver que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N} : v_n = \dfrac{b\,\sin\theta}{2^n \sin\frac{\theta}{2^n}}$.
5. Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ en fonction de a et b.