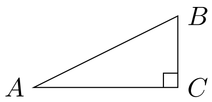
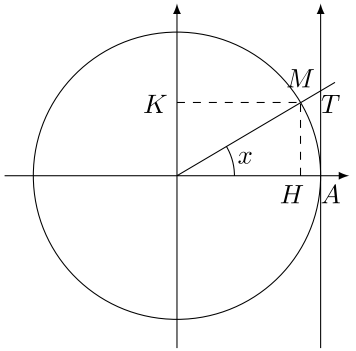
INSA Institut National des Sciences Appliquées Lyon

Trigonométrie

1 Rappel des définitions et propriétés élémentaires



$$\sin \hat{A} = \frac{BC}{AB}, \quad \cos \hat{A} = \frac{AC}{AB}, \quad \tan \hat{A} = \frac{BC}{AC} = \frac{\sin \hat{A}}{\cos \hat{A}}$$



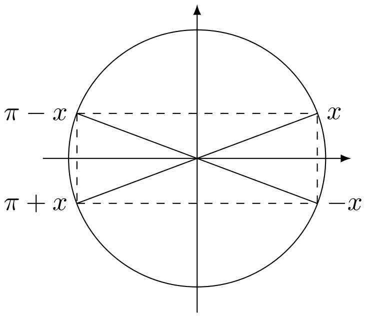
Dans le cercle trigonométrique de centre O et de rayon 1, on note M le point du cercle tel que $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}\right) = x$. On a :

$$\sin(x) = \overline{OK}, \quad \cos(x) = \overline{OH}, \quad \tan(x) = \overline{AT}$$

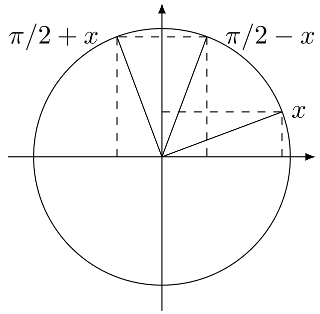
Quelques valeurs remarquables :

Mesure en radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cosinus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tangente	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Non défini

Quelques relations remarquables :

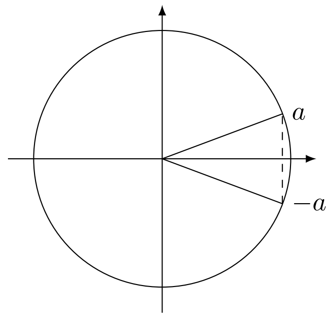


$$\cos(-x) = \cos(x) \qquad \sin(-x) = -\sin(x)$$
$$\cos(\pi - x) = -\cos(x) \qquad \sin(\pi - x) = \sin(x)$$
$$\cos(\pi + x) = -\cos(x) \qquad \sin(\pi + x) = -\sin(x)$$

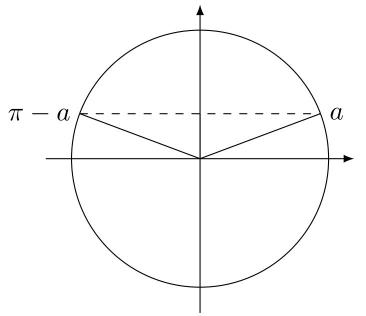


$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x) \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x) \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$$

2 Équations trigonométriques



$$\cos(x) = \cos(a) \iff \begin{cases} x = a + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = -a + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



$$\sin(x) = \sin(a) \iff \begin{cases} x = a + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = \pi - a + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

3 Formules de trigonométrie (à connaître par coeur)

$$\boxed{\begin{gathered} \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i} \sin x \\ \cos x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2} \qquad \sin x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}} \end{gathered}}$$

$$\boxed{\begin{gathered} \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \end{gathered}}$$

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$$
$$\sin(2a) = 2 \sin a \, \cos a$$
$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos(2a)}{2} \qquad \sin^2 a = \frac{1 - \cos(2a)}{2}$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$
$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

4 Dérivation

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos'(x) = -\sin(x) \quad \text{et} \quad \sin'(x) = \cos(x)}$$

5 Exercices

Exercice 1 Résoudre chacune des équations ou inéquations suivantes dans l'intervalle précisé :

1. $\cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ sur $\mathbb{R}$ puis sur $I = [0, 2\pi]$;
2. $\sin x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ sur $\mathbb{R}$, sur $I = [0, 2\pi]$ puis sur $J = \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{2}\right]$;
3. $\sin(3x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ sur $\mathbb{R}$ puis sur $I = [-\pi, \pi]$;
4. $\cos x \leqslant \dfrac{1}{2}$ sur $I = [-\pi, \pi]$;
5. $\sin x > -\dfrac{1}{2}$ sur $I = [0, 3\pi]$.

Exercice 2 À l'aide d'une calculatrice, donner une valeur approchée à 10^{-2} près des réels θ, φ et ψ tels que :

1. $\cos\theta = -0,85$ et $\theta \in [\pi, 2\pi]$.
2. $\cos\varphi = 0,4$; $\sin\varphi < 0$ et $\varphi \in [0, 2\pi[$.
3. $\sin\psi = 0,7$ et $\psi \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$.

Exercice 3 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $\cos(2x) + \cos x = 0$.
2. $\cos(2x) + \cos x = -1$.
3. $\cos(2x) + 2\sin^2 x - 2\sin x \leqslant 0$.
4. $\cos(4x) - 2\sqrt{3}\cos(2x) + \dfrac{5}{2} = 0$.
5. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \dfrac{1}{2}\cos x \geqslant 0$.
6. $\cos(3x) + \sin(3x) = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

Exercice 4 Donner les représentations graphiques des applications f, g et h définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 3\,\sin(x), \quad g(x) = \cos(4\pi x), \quad h(x) = 4\,\cos\left(6\pi x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Exercice 5

1. Calculer la dérivée des applications f et g définies sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{et} \quad g(x) = [\cos(\pi x)]^4.$$
2. Calculer les intégrales suivantes :

   a) $I_1 = \displaystyle\int_{\pi/5}^{3\pi/5} \cos(5t)\,\mathrm{d}t$; b) $I_2 = \displaystyle\int_0^{\pi/3} \cos t\,\sin t\,\mathrm{d}t$;

   c) $I_3 = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi/12} \sin^2 t\,\mathrm{d}t$; d) $I_4 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(3t)\,\sin(2t)\,\mathrm{d}t$.