Chapitre 0

REVISIONS

I Variables aléatoires

1) Loi de probabilité

fonction de répartition : $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$

• v.a. discrète : $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ ou $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$

loi $p_k = \mathbb{P}(X = x_k)$, $1 \leq k \leq n$ ou $k \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ \text{ou } k \in \mathbb{N}}} p_k x_k \quad , \quad var(X) = \mathbb{E}[X - \mathbb{E}(X)]^2 = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2$$

$$\mathbb{E}[\varphi(X)] = \sum_k p_k \varphi(x_k)$$

si $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$, fonction génératrice : $G_X(z) = \mathbb{E}(z^X) = \sum_k p_k z^k$

$$G_X(1) = 1, \; G'_X(1) = \mathbb{E}(X), \; G''_X(1) = \mathbb{E}(X(X-1))$$

• v.a. absolument continue : $X(\Omega) =$ intervalle de $\mathbb{R}$.

densité $f_X(x) = F'_X(x)$

$$\mathbb{E}(X) = \int x f_X(x)\,dx \quad , \quad var(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2$$

$$\mathbb{E}[\varphi(X)] = \int \varphi(x) f_X(x)\,dx$$

fonction caractéristique : $\varphi_X(z) = \mathbb{E}(e^{izX}) = \int e^{izx} f_X(x)\,dx$

$$\varphi_X(0) = 1, \; \varphi'_X(0) = i\,\mathbb{E}(X), \; \varphi''_X(0) = -\mathbb{E}(X^2)$$

2) Conditionnement

si $\mathbb{P}(A) > 0$, $\mathbb{P}(B|A) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$; $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}(A_2|A_1)\,\mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \times \dots \times \mathbb{P}(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$

• v.a. discrètes : $\mathbb{P}(Y = y_j | X = x_i) = \dfrac{\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)}{\mathbb{P}(X = x_i)}$

$$\mathbb{E}(\varphi(Y) | X = x_i) = \sum_j \varphi(y_j) \frac{\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)}{\mathbb{P}(X = x_i)}$$

$$\mathbb{E}(\varphi(Y)) = \sum_i \mathbb{E}(\varphi(Y) | X = x_i)\,\mathbb{P}(X = x_i)$$

• v.a. continues : $f_{(Y|X=x)}(y) = \dfrac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_X(x)}$

$$\mathbb{E}(\varphi(Y) | X = x) = \int \varphi(y) \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_X(x)}\,dy$$

$$\mathbb{E}(\varphi(Y)) = \int \mathbb{E}(\varphi(Y) | X = x)\, f_X(x)\,dx$$

3) Indépendance

A, B indépendants $\iff \mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$ ou $\mathbb{P}(A) = 0 \iff \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$

v.a.c.: X, Y indépendantes $\iff \forall x,\; f_{(Y|X=x)}(y) = f_Y(y) \iff f_{(X,Y)} = f_X \otimes f_Y$

si X, Y indépendantes, alors $f_{X+Y} = f_X * f_Y$ $\quad (x \mapsto \int f_X(y) f_Y(x-y)\,dy)$

et $\varphi_{X+Y} = \varphi_X \varphi_Y$

II Lois usuelles

1) v.a. discrètes :

Uniforme discrète $\mathcal{U}\{1,\dots,N\}$ → pas de site privilégié

Bernoulli $B(1,p)$ → une épreuve à deux issues

Binomiale $B(n,p)$ → n épreuves de Bernoulli i.i.d.

Géométrique $\mathcal{G}(p)$ → temps d'attente du premier succès : $T=\min\{n\in\mathbb{N}^*: X_n=1\}$

$$\mathbb{P}(T=n) = p(1-p)^{n-1},\ n\geq 1 \qquad (X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\ B(1,p)\text{ i.i.d}$$

$$\mathbb{P}(T>n) = (1-p)^n$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(T>n\mid T>m) = \mathbb{P}(T>n-m) \text{ pour } n>m$$

Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ → arrivées au taux λ

2) v.a. continues :

Uniforme continue $\mathcal{U}[a,b]$

Gauss $N(m,\sigma^2)$ → loi des erreurs et universelle

Exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ → temps d'attente : $\mathbb{P}(T>t\mid T>s)=\mathbb{P}(T>t-s)$ si $t>s$

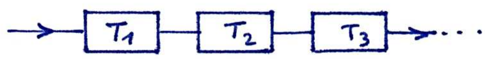
Erlang $E_n(\lambda)$ → somme de temps d'attente exponentiels : $T=T_1+\dots+T_n$
$(T_i)_{1\leq i\leq n}$ $\mathcal{E}(\lambda)$ i.i.d.

$$f_T(t) = \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda t}\,\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(t)$$

$$\mathbb{P}(T>t) = e^{-\lambda t}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(\lambda t)^i}{i!},\ t\geq 0$$

$$\mathbb{E}(T) = \frac{n}{\lambda},\ \mathrm{var}(T)=\frac{n}{\lambda^2} \Rightarrow CV(T)^2 = k_T^2 = \frac{\mathrm{var}(T)}{[\mathbb{E}(T)]^2} = \frac{1}{n} < 1 \text{ si } n>1$$

$$L_T(s) = \hat{f}_T(s) = \left(\frac{\lambda}{s+\lambda}\right)^n$$



Erlang généralisée $E(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ → $\mathbf{T}=T_1+\dots+T_n$, avec $T_i : \mathcal{E}(\lambda_i)$ indép.

$$\mathbb{E}(\mathbf{T}) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i},\ \mathrm{var}(\mathbf{T}) = \sum_{i=1}^n\frac{1}{\lambda_i^2} \Rightarrow CV(\mathbf{T})^2 = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i^2}}{\left(\sum_{i=1}^n\frac{1}{\lambda_i}\right)^2} < 1 \text{ si } n>1$$

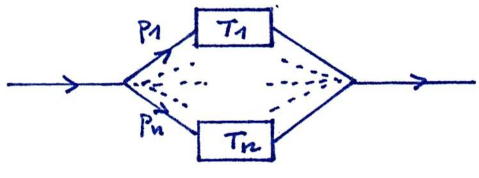
$$L_{\mathbf{T}}(s) = \hat{f}_{\mathbf{T}}(s) = \prod_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{s+\lambda_i} = \sum_{i=1}^n\frac{\alpha_i}{s+\lambda_i} \quad \text{avec } \alpha_i = \frac{\lambda_i}{\prod_{j\neq i}\left(1-\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\right)} \quad \text{si les } \lambda_i \text{ sont 2 à 2} \neq$$

$$\Rightarrow f_{\mathbf{T}}(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{-\lambda_i t}\,\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(t)$$

$$\mathbb{P}(\mathbf{T}>t) = \sum_{i=1}^n\frac{\alpha_i}{\lambda_i}e^{-\lambda_i t},\ t\geq 0$$

$$\hat{f}_{\mathbf{T}}(0) = 1 = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{\lambda_i}$$, attention les α_i n'ont pas tous le même signe

Hyperexponentielle $H(p_1,\dots,p_n,\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ → $\mathbf{T}=T_N$ avec $N:\Omega\to\{1,\dots,n\}$
$T_i : \mathcal{E}(\lambda_i)$ indép, et indépendantes de N.
$\mathbb{P}(N=i)=p_i,\ 1\leq i\leq n$



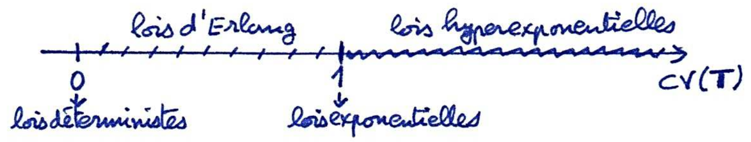
$$f_{\mathbf{T}}(t) = \sum_{i=1}^n p_i\lambda_i e^{-\lambda_i t}, \quad \sum_{i=1}^n p_i = 1,\ \text{ici } p_i\in[0,1].$$

$$\mathbb{P}(\mathbf{T}>t) = \sum_{i=1}^n p_i e^{-\lambda_i t}$$

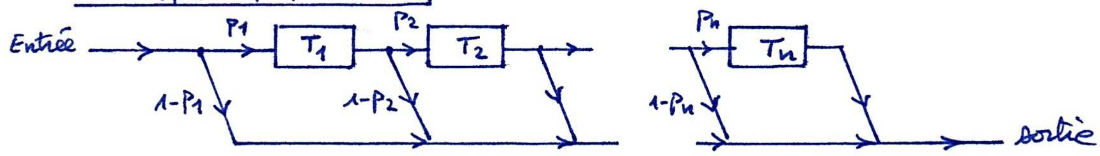
$$\mathbb{E}(\mathbf{T}) = \sum_{i=1}^n\frac{p_i}{\lambda_i},\ \mathrm{var}(\mathbf{T}) = 2\sum_{i=1}^n\frac{p_i}{\lambda_i^2} - \left(\sum_{i=1}^n\frac{p_i}{\lambda_i}\right)^2$$

$$\Rightarrow CV(\mathbf{T})^2 = 2\,\frac{\sum_{i=1}^n\frac{p_i}{\lambda_i^2}}{\left(\sum_{i=1}^n\frac{p_i}{\lambda_i}\right)^2} - 1 \geq 1 \quad \left(\text{Cauchy-Schwarz}: \left(\sum\sqrt{p_i}\frac{\sqrt{p_i}}{\lambda_i}\right)^2 \leq \underbrace{\sum p_i}_{1}\sum\frac{p_i}{\lambda_i^2}\right)$$

$$L_{\mathbf{T}}(s) = \hat{f}_{\mathbf{T}}(s) = \sum_{i=1}^n p_i\frac{\lambda_i}{s+\lambda_i}$$



Cox $C(p_1, \dots, p_n, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$



Probabilité d'entrer dans le i^e service : p_i, de sortir juste avant : $1-p_i$.
$N_1, \dots, N_n : \Omega \to \{0,1\}$ v.a. « test d'entrée » définies conditionnellement par

$$\begin{cases} \mathbb{P}(N_{i+1} = 1 \mid N_1 = \dots = N_i = 1) = p_{i+1} & 0 \le i \le n-1 \\ \mathbb{P}(N_{i+1} = 0 \mid N_1 = \dots = N_i = 1) = 1 - p_{i+1} \end{cases}$$

et si $N_i = 0$ alors $N_{i+1} = \dots = N_n = 0$.
$T_i : \mathcal{E}(\lambda_i)$ indépendantes et indépendantes des $(N_i)_{1 \le i \le n}$.

$$\mathbf{T} = \begin{cases} 0 & \text{si } N_1 = 0 \\ T_1 & \text{si } N_1 = 1, N_2 = 0 \\ T_1 + T_2 & \text{si } N_1 = N_2 = 1, N_3 = 0 \\ \vdots \\ T_1 + \dots + T_{n-1} & \text{si } N_1 = \dots = N_{n-1} = 1, N_n = 0 \\ T_1 + \dots + T_n & \text{si } N_1 = \dots = N_n = 1 \end{cases}$$

$$L_{\mathbf{T}}(s) = \hat{f}_{\mathbf{T}}(s) = \mathbb{P}(N_1 = 0) + \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left(e^{-s(T_1 + \dots + T_i)}, N_1 = \dots = N_i = 1, N_{i+1} = 0\right)$$

(on pose $p_{n+1} = 0$)

$$= (1 - p_1) + \sum_{i=1}^{n} p_1 \cdots p_i (1 - p_{i+1}) \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + s} \cdots \frac{\lambda_i}{\lambda_i + s}$$

$$\mathbb{E}(\mathbf{T}) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(T_1 + \dots + T_i, N_1 = \dots = N_i = 1, N_{i+1} = 0) = \sum_{i=1}^{n} p_1 \cdots p_i (1 - p_{i+1}) \sum_{j=1}^{i} \frac{1}{\lambda_j}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_1 \cdots p_i \sum_{j=1}^{i} \frac{1}{\lambda_j} - \sum_{i=1}^{n} p_1 \cdots p_{i+1} \left(\sum_{j=1}^{i+1} \frac{1}{\lambda_j} - \frac{1}{\lambda_{i+1}} \right)$$

$$= \frac{p_1}{\lambda_1} + \sum_{i=2}^{n} \frac{p_1 \cdots p_i}{\lambda_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_1 \cdots p_i}{\lambda_i}.$$

$$\mathbb{E}(\mathbf{T}^2) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[(T_1 + \dots + T_i)^2, N_1 = \dots = N_i = 1, N_{i+1} = 0\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \Bigg[\sum_{j=1}^{i} \underbrace{\mathbb{E}(T_j^2)}_{\frac{2}{\lambda_j^2}} + 2 \sum_{1 \le j < k \le i} \underbrace{\mathbb{E}(T_j T_k)}_{\frac{1}{\lambda_j \lambda_k}} \Bigg] p_1 \cdots p_i (1 - p_{i+1})$$

$$= 2 \sum_{i=1}^{n} p_1 \cdots p_i (1 - p_{i+1}) \sum_{1 \le j \le k \le i} \frac{1}{\lambda_j \lambda_k}$$

$$= 2 \left[\sum_{i=1}^{n} p_1 \cdots p_i \sum_{1 \le j \le k \le i} \frac{1}{\lambda_j \lambda_k} - \sum_{i=1}^{n} p_1 \cdots p_i \left(\sum_{1 \le j \le k \le i+1} \frac{1}{\lambda_j \lambda_k} - \frac{1}{\lambda_{i+1}} \sum_{j=1}^{i+1} \frac{1}{\lambda_j} \right) \right]$$

$$= 2 \sum_{i=1}^{n} \frac{p_1 \cdots p_i}{\lambda_i} \sum_{j=1}^{i} \frac{1}{\lambda_j}.$$

<u>Processus de Poisson</u> : $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ iid $\mathcal{E}(\lambda)$, $S_n = T_1+\dots+T_n : E_n(\lambda)$, $S_0=0$
→ temps inter-arrivées, → instant d'arrivée de la n^e personne

$N_t = n$ si $t\in[S_n, S_{n+1}[$ → nombre d'arrivées sur $[0,t]$

$(N_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est un processus de Poisson d'intensité λ, i.e.

$N_t : \mathcal{P}(\lambda t)$ et les accroissements sont indépendants stationnaires.

e.g. $P(N_s=i, N_t=j) = \mathbb{P}(S_i\le s< S_{i+1}\le S_j\le t< S_{j+1})$ pour $i<j$, $s<t$

or
$$f_{(S_1,\dots,S_n)}(t_1,\dots,t_n) = f_{(T_1,\dots,T_n)}(t_1, t_2-t_1,\dots,t_n-t_{n-1})\,\mathbb{1}_{\{0<t_1<\dots<t_n\}}$$
$$= \lambda^n e^{-\lambda t_n}\,\mathbb{1}_{\{0<t_1<\dots<t_n\}}$$

donc
$$P(N_s=i, N_t=j) = \int\!\!\cdots\!\!\int_{\substack{0<t_1<\dots<t_i<s<t_{i+1}\\<\dots<t_j<t<t_{j+1}}} \lambda^{j+1} e^{-\lambda t_{j+1}}\,dt_1\dots dt_{j+1}$$
$$= \lambda^j e^{-\lambda t}\int\!\!\cdots\!\!\int_{\substack{0<t_1<\dots<t_i<s<t_{i+1}\\<\dots<t_j<t}} dt_1\dots dt_j$$
$$= \lambda^j e^{-\lambda t}\,\frac{(t-s)^{j-i}}{(j-i)!}\int\!\!\cdots\!\!\int_{0<t_1<\dots<t_i<s} dt_1\dots dt_i$$
$$= \lambda^j e^{-\lambda t}\,\frac{s^i}{i!}\,\frac{(t-s)^{j-i}}{(j-i)!} = \frac{(\lambda s)^i e^{-\lambda s}}{i!}\times\frac{(\lambda(t-s))^{j-i}}{(j-i)!}e^{-\lambda(t-s)}.$$
$$= \mathbb{P}(N_s=i)\,\mathbb{P}(N_{t-s}=j-i).$$

→ d'innombrables propriétés ... !

III Théorèmes limites

1) <u>Convergence en loi</u> : $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \iff \forall x$ tel que F_X est continue en x, $F_{X_n}(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} F_X(x)$
$\iff \forall x,\ \varphi_{X_n}(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \varphi_X(x)$

Si les X_n et X sont discrètes, $X_n \underset{n\to+\infty}{\xrightarrow{\mathcal{L}}} X \iff \forall i,\ \mathbb{P}(X_n=x_i) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}(X=x_i)$

2) <u>Loi des grands nombres</u> : si $(X_n)_{n\ge1}$ est une suite i.i.d. telle que $E|X_1|<+\infty$

$$\frac{X_1+\dots+X_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\xrightarrow{\mathcal{L}}} E(X_1) = m$$

<u>Théorème central limite</u> : si de plus $\sigma^2 = E(X_1^2) < +\infty$, $\dfrac{X_1+\dots+X_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\xrightarrow{\mathcal{L}}} Y : \mathcal{N}(0,1)$

→ possibilité de généralisation au cas de non indépendance : théorème ergodique pour les chaînes de Markov (chapitres suivants)