Chapitre 2

CHAINES DE MARKOV A TEMPS CONTINU

I Définitions

$E=\{a_0,a_1,\dots,a_n\}$ ou $\{a_n, n\in E\}$: espace des états, $X_t:\Omega\to E$ v.a.

Déf: $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ chaîne de Markov $\iff \forall s,t\in\mathbb{R}^+$, loi de $(X_{s+t}\mid(X_r)_{0\le r\le s})$ = loi de $(X_{s+t}\mid X_s)$

$\iff \forall n\in\mathbb{N}, \forall x_0,\dots,x_n \in E, \forall 0<t_1<\dots<t_n$, $\mathbb{P}(X_{t_n}=x_n\mid X_0=x_0, X_{t_1}=x_1,\dots,X_{t_{n-1}}=x_{n-1})$
$=\mathbb{P}(X_{t_n}=x_n\mid X_{t_{n-1}}=x_{n-1})$

Note : on supposera toujours les probabilités de transition $\mathbb{P}(X_{s+t}=y\mid X_s=x)$ stationnaires (chaîne homogène) i.e. indépendantes de s.

$$\mathbb{P}(X_0=x_0, X_{t_1}=x_1,\dots,X_{t_n}=x_n)=\mathbb{P}(X_0=x_0)\,\mathbb{P}(X_{t_1}=x_1\mid X_0=x_0)\,\mathbb{P}(X_{t_2}=x_2\mid X_{t_1}=x_1)\cdots\times\mathbb{P}(X_{t_n}=x_n\mid X_{t_{n-1}}=x_{n-1})$$

Notation : $p_{ij}(t)=\mathbb{P}(X_{s+t}=a_j\mid X_s=a_i)=\mathbb{P}_{a_i}(X_t=a_j)$

$$\boxed{\mathbb{P}(X_0=a_{i_0},X_{t_1}=a_{i_1},\dots,X_{t_n}=a_{i_n})=\mathbb{P}(X_0=a_{i_0})\,p_{i_0i_1}(t_1)\,p_{i_1i_2}(t_2-t_1)\cdots p_{i_{n-1}i_n}(t_n-t_{n-1})}$$

Semi-groupe : $P(t)=(p_{ij}(t))_{a_i,a_j\in E}$. On pose $P(0)=I$ i.e $p_{ij}(0)=\delta_{ij}$.

passage de la loi de X_s à celle de X_t : soit $\pi_j(s)=\mathbb{P}(X_s=a_j)$, $\pi(s)=(\pi_j(s))_{a_j\in E}$

$$\boxed{\pi(t)=\pi(s)\,P(t-s)=\pi(0)\,P(t)}$$

Equation de Chapman-Kolmogorov : $\boxed{p_{ij}(s+t)=\sum_{a_k\in E}p_{ik}(s)p_{kj}(t) \text{ ou encore } P(s+t)=P(s)P(t)}$

Ex : processus de Poisson $(N_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$

Déf :
- $N_t:\Omega\to\mathbb{N}$;
- $\forall 0<s<t$, $N_t-N_s : \mathcal{P}(\lambda(t-s))$;
- $\forall 0<t_1<\dots<t_n$, $N_{t_1}, N_{t_2}-N_{t_1},\dots,N_{t_n}-N_{t_{n-1}}$ sont indépendantes.

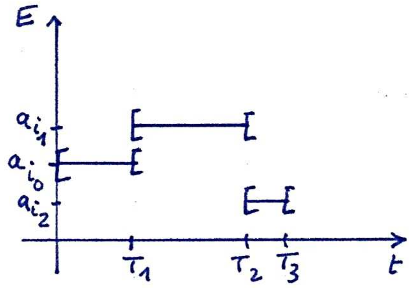
$(N_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est une chaîne de Markov :

$$\mathbb{P}(N_{t_n}=x_n\mid N_{t_1}=x_1,\dots,N_{t_{n-1}}=x_{n-1})=\frac{\mathbb{P}(N_{t_1}=x_1, N_{t_2}-N_{t_1}=x_2-x_1,\dots,N_{t_n}-N_{t_{n-1}}=x_n-x_{n-1})}{\mathbb{P}(N_{t_1}=x_1, N_{t_2}-N_{t_1}=x_2-x_1,\dots,N_{t_{n-1}}-N_{t_{n-2}}=x_{n-1}-x_{n-2})}$$
$$=\mathbb{P}(N_{t_n}-N_{t_{n-1}}=x_n-x_{n-1})=\mathbb{P}(N_{t_n}=x_n\mid N_{t_{n-1}}=x_{n-1})$$

$$p_{ij}(t)=\mathbb{P}(N_{s+t}=j\mid N_s=i)=\mathbb{P}(N_{s+t}-N_s=j-i)=\mathbb{P}(N_t=j-i)$$

donc $\boxed{p_{ij}(t)=\begin{cases}e^{-\lambda t}\dfrac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} & \text{si } j\ge i\ge 0\\ 0 & \text{si } 0\le j\le i-1\end{cases}}$

II Temps de sauts



On suppose $t \longmapsto X_t$ continue à droite.

Soit $T_0 = 0$, $T_{n+1} = \inf\{t > T_n : X_t \neq X_{T_n}\}$, $n \geq 0$.

On a $T_0 < T_1 < \dots < T_n < T_{n+1} < \dots$ et $X_t = X_{T_n}$ sur $[T_n, T_{n+1}[$.

On pose $q_{ij} = \mathbb{P}_{a_i}(X_{T_1} = a_j)$ et $\alpha_i = \dfrac{1}{\mathbb{E}_{a_i}(T_1)}$; $Q = (q_{ij})_{a_i, a_j \in E}$.

On supposera toujours que $T_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ (pas d'explosion), ce qui est réalisé dès que $\sup\limits_{a_i \in E} \alpha_i < \infty$.

Théorème :

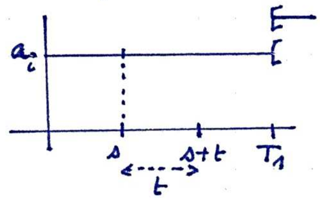
> 1) $(X_{T_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov de matrice de transition Q.
>
> 2) Les v.a. $T_1, T_2 - T_1, \dots, T_n - T_{n-1}$ conditionnellement à $(X_0 = a_{i_0}, X_{T_1} = a_{i_1}, \dots X_{T_{n-1}} = a_{i_{n-1}})$ sont indépendantes de lois $\mathcal{E}(\alpha_{i_0}), \mathcal{E}(\alpha_{i_1}), \dots, \mathcal{E}(\alpha_{i_{n-1}})$.
>
> 3) T_1 et X_{T_1} sont indépendantes.

Idée de la démonstration : $*$ $\mathbb{P}_{a_i}(T_1 > s+t) = \mathbb{E}_{a_i}\big(\mathbb{1}_{\{T_1 > s\}} \mathbb{P}_{\underset{= a_i}{X_s}}(T_1 > t)\big) = \mathbb{P}_{a_i}(T>s)\,\mathbb{P}_{a_i}(T>t)$

$\Rightarrow \mathbb{P}_{a_i}(T_1 > t) = e^{-\alpha_i t}$ pour un $\alpha_i \geq 0$

si $\alpha_i = 0$, $T_1 = +\infty$ p.s.

si $\alpha_i > 0$, $T_1 : \mathcal{E}(\alpha_1)$ et $\alpha_1 = \dfrac{1}{\mathbb{E}_{a_i}(T_1)}$.



$*$ $\mathbb{P}_{a_i}(T_1 > t, X_{T_1} = a_j) = \mathbb{E}_{a_i}\big[\mathbb{1}_{\{T_1 > t\}} \mathbb{P}_{\underset{= a_i}{X_t}}(X_{T_1} = a_j)\big] = \mathbb{P}_{a_i}(T_1 > t)\,\mathbb{P}_{a_i}(X_{T_1} = a_j)$

$= e^{-\alpha_i t} q_{ij}$ $\qquad \to T_1, X_{T_1}$ indépendantes sous $\mathbb{P}_{a_i}$. $\square$

Interprétation : arrivé en a_i, $(X_t)_{t\geq 0}$ attend un temps $\mathcal{E}(\alpha_i)$ indépendant de ce qui précède puis saute en a_j avec proba q_{ij}, et ainsi de suite.

III Générateur infinitésimal

Déf. : $A = (A_{ij})_{a_i, a_j \in E}$, $A_{ij} = \begin{cases} \alpha_i q_{ij} & \text{si } a_i \neq a_j \\ -\alpha_i & \text{si } a_i = a_j \end{cases}$.

On a $q_{ii} = 0$ donc $\displaystyle\sum_{a_j \in E} A_{ij} = \alpha_i \Big[\sum_{a_j \in E\setminus\{a_i\}} q_{ij} - 1\Big] = 0$.

Equations de Kolmogorov :

> 1) $\dfrac{dP(t)}{dt} = \begin{cases} A\,P(t) & \text{(backward ou rétrospective)} \\ P(t)\,A & \text{(forward ou progressive)} \end{cases} \overset{\text{si unicité}}{\Longrightarrow} P(t) = \exp(tA)$
>
> 2) $A = \dfrac{dP(t)}{dt}\Big|_{t=0^+}$ i.e. $A_{ij} = \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{p_{ij}(t) - p_{ij}(0)}{t}$
>
> ou encore $p_{ij}(t) = \begin{cases} \alpha_i q_{ij}\, t + o(t) & \text{si } a_i \neq a_j \\ 1 - \alpha_i t + o(t) & \text{si } a_i = a_j \end{cases}$

Idée de la démonstration : en admettant que $A = \frac{dP(t)}{dt}\Big|_{t=0^+}$, on trouve à l'aide de Chapman-Kolmogorov :
$$p_{ij}(t+h) = \sum_{a_k\in E} p_{ik}(t)\,p_{kj}(h) = \sum_{a_k\in E} p_{ik}(t)[\delta_{kj} + hA_{kj} + o(h)]$$
$$= p_{ij}(t) + h\sum_{a_k\in E} p_{ik}(t)A_{kj} + o(h) \Longrightarrow P'(t) = P(t)A$$
et
$$p_{ij}(t+h) = \sum_{a_k\in E} p_{ik}(h)\,p_{kj}(t) = p_{ij}(t) + h\sum_{a_k\in E} A_{ik}p_{kj}(t) + o(h) \Rightarrow P'(t) = AP(t)$$
∎

IV Classification des états, ergodicité

Soit $\tau_{a_j} = \inf\{t > T_1 : X_t = a_j\}$ $\longrightarrow$ $\begin{cases} 1^{er} \text{ instant d'atteinte de } a_j \text{ sous } \mathbb{P}_{a_i} \text{ si } a_i \neq a_j \\ 1^{er} \text{ instant de retour en } a_j \text{ sous } \mathbb{P}_{a_j} \text{ (après saut)} \end{cases}$

$F_{ij}(t) = \mathbb{P}_{a_i}(\tau_{a_j} < t)$, $\quad f^*_{ij} = \lim_{t\to+\infty} F_{ij}(t) = \mathbb{P}_{a_i}(\tau_{a_j} < \infty)$.

Déf :
1) a_i récurrent $\Longleftrightarrow$ $f^*_{ii} = 1$;
a_i transitoire $\Longleftrightarrow$ $f^*_{ii} < 1$,

2) soit a_i récurrent, $\nu_i = \mathbb{E}_{a_i}(\tau_{a_i}) = \int_0^{+\infty} t\,dF_{ii}(t)$ (temps moyen de retour);
si $\nu_i < +\infty$, a_i récurrent positif;
si $\nu_i = +\infty$, a_i récurrent nul.

Critère de récurrence : $\boxed{a_i \text{ récurrent} \Longleftrightarrow \int_0^{+\infty} p_{ii}(t)\,dt = +\infty}$

Remarque : $\int_0^{\infty} p_{ij}(t)\,dt = \mathbb{E}_{a_i}\left(\int_0^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_t = a_j\}}\,dt\right)$: temps de séjour moyen dans l'état a_j depuis a_i.

Déf :
a_j accessible depuis a_i ($a_i \to a_j$) $\Longleftrightarrow$ $\exists t \geq 0$, $p_{ij}(t) > 0$;
a_i et a_j communiquent ($a_i \leftrightarrow a_j$) $\Longleftrightarrow$ ($a_i \to a_j$ et $a_j \to a_i$) [on pose $a_i \leftrightarrow a_i$];
La chaîne $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est irréductible $\Longleftrightarrow$ tous les états communiquent.

Proposition :
$a_i \leftrightarrow a_j$ (resp. a_i récurrent nul, a_i récurrent positif) pour $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$
$\Longleftrightarrow$ $a_i \leftrightarrow a_j$ (resp. a_i récurrent nul, a_i récurrent positif) pour $(X_{T_n})_{n\in\mathbb{N}}$.

Théorème ergodique :
Soit une chaîne irréductible récurrente. Alors :
1) si récurrence positive :
- $\forall a_i \in E$, $\lim_{t\to+\infty} p_{ij}(t) \equiv \pi_j = \frac{1}{\alpha_j \nu_j}$ i.e. $P(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \Pi$
- π est l'unique probabilité telle que $\pi A = 0$ ($\Longleftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}^+, \pi P(t) = \pi$)
- $X_t \xrightarrow[t\to+\infty]{\mathcal{L}} X$ v.a. de loi π

2) si récurrence nulle : $\forall a_i \in E$, $\lim_{t\to+\infty} p_{ij}(t) = 0$.

V Processus de naissance-mort

1) **Déf :** $X_t : \Omega \to \mathbb{N}$, $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ chaîne de Markov vérifiant

$$\forall i \in \mathbb{N}, \begin{cases} \mathbb{P}(X_{t+\varepsilon}-X_t=+1 \mid X_t=i) \underset{\varepsilon\to 0^+}{=} \lambda_i\varepsilon+o(\varepsilon) & , i\geq 0 \\ \mathbb{P}(X_{t+\varepsilon}-X_t=-1 \mid X_t=i) \underset{\varepsilon\to 0^+}{=} \mu_i\varepsilon+o(\varepsilon) & , i\geq 1 \\ \mathbb{P}(|X_{t+\varepsilon}-X_t|\geq 2 \mid X_t=i) \underset{\varepsilon\to 0^+}{=} o(\varepsilon) & , i\geq 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix}\lambda_i>0\\ \mu_i>0\end{matrix}$$

λ_i : taux instantané de naissance, μ_i : celui de mort. On pose $\mu_0=0$ (si $X_t=0$ il ne peut pas y avoir de mort car $X\geq 0$)

On a alors $\mathbb{P}(X_{t+\varepsilon}-X_t=0 \mid X_t=i) \underset{\varepsilon\to 0^+}{=} 1-(\lambda_i+\mu_i)\varepsilon+o(\varepsilon)$ et tout ceci s'écrit à l'aide de $p_{ij}(t)$:

$$\begin{cases} p_{i\,i+1}(\varepsilon) = \lambda_i\varepsilon+o(\varepsilon) \\ p_{i\,i-1}(\varepsilon) = \mu_i\varepsilon+o(\varepsilon) \\ p_{ii}(\varepsilon) = 1-(\lambda_i+\mu_i)\varepsilon+o(\varepsilon) \\ p_{ij}(\varepsilon) = o(\varepsilon) \text{ si } |j-i|\geq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p'_{i\,i+1}(0)=\lambda_i \\ p'_{i\,i-1}(0)=\mu_i \\ p'_{ii}(0) = -(\lambda_i+\mu_i) \end{cases} \text{ et } p'_{ij}(0)=0 \text{ si } |j-i|\geq 2$$

D'où le générateur infinitésimal

$$\boxed{A = P'(0) = \begin{bmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \cdots \\ \mu_1 & -(\lambda_1+\mu_1) & \lambda_1 & 0 & \cdots \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2+\mu_2) & \lambda_2 & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}}$$

Or $A_{ij} = \begin{cases} \alpha_i q_{ij} & \text{si } i\neq j \\ -\alpha_i & \text{si } i=j \end{cases}$ d'où $\begin{cases} \alpha_i = \dfrac{1}{\mathbb{E}_i(T_1)} = -A_{ii} = \lambda_i+\mu_i \\ q_{ij} = -\dfrac{A_{ij}}{A_{ii}} = \begin{cases} \dfrac{\lambda_i}{\lambda_i+\mu_i} & \text{si } j=i+1 \\ \dfrac{\mu_i}{\lambda_i+\mu_i} & \text{si } j=i-1 \end{cases}, \text{ 0 sinon} \end{cases}$

→ interprétation : arrivé en i, $(X_t)_{t\geq 0}$ attend un temps $\mathcal{E}(\lambda_i+\mu_i)$ puis saute à l'état suivant $i+1$ ou précédent $i-1$ selon la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1, \frac{\lambda_i}{\lambda_i+\mu_i})$.

2) Equations de Kolmogorov :

forward : $\begin{cases} P'(t)=P(t)A \\ P(0)=I \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} p'_{i0}(t) = -\lambda_0\, p_{i0}(t) + \mu_1\, p_{i1}(t) \quad \text{et } p_{ij}(0)=\delta_{ij} \\ p'_{ij}(t) = \lambda_{j-1}\, p_{i\,j-1}(t) - (\lambda_j+\mu_j)\, p_{ij}(t) + \mu_{j+1}\, p_{i\,j+1}(t), \ j\geq 1 \end{cases}$

backward : $\begin{cases} P'(t)=AP(t) \\ P(0)=I \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} p'_{0j}(t) = -\lambda_0\, p_{0j}(t) + \lambda_0\, p_{1j}(t) \quad \text{et } p_{ij}(0)=\delta_{ij} \\ p'_{ij}(t) = \mu_i\, p_{i-1\,j}(t) - (\lambda_i+\mu_i)\, p_{ij}(t) + \lambda_i\, p_{i+1\,j}(t), \ i\geq 1 \end{cases}$

Sous certaines conditions il y a unicité de la solution et alors $P(t) = \exp(tA)$ → difficile à calculer.

Fonction génératrice : $G_i(t,z) = \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}(t)\, z^j$.

On a : $\boxed{\dfrac{\partial G_i}{\partial t}(t,z) = (z-1)\sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j\, p_{ij}(t) z^j - \left(1-\frac{1}{z}\right)\sum_{j=0}^{\infty} \mu_j\, p_{ij}(t) z^j \text{ avec } G_i(0,z)=z^i}$

Espérance : $M(t) = \mathbb{E}_i(X_t) = \sum_{j=0}^{\infty} j\, p_{ij}(t)$ (taille moyenne de la population à l'instant t)

On a $\boxed{M'(t) = \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda_j-\mu_j)\, p_{ij}(t)}$

3) Exemples

3.1) processus d'immigration (naissance pure à taux constant)

$$\begin{cases} \lambda_j = \lambda, & j \geq 0 \\ \mu_j = 0, & j \geq 0 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \cdots \\ 0 & -\lambda & \lambda & \ddots \\ \vdots & & \ddots & \ddots \end{bmatrix} = \lambda(-I + J) \quad \text{avec } J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \ddots \\ \vdots & & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

$$P(t) = \exp(tA) = e^{-\lambda t} \exp(\lambda t J) = e^{-\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & \lambda t & \frac{(\lambda t)^2}{2!} & \ddots \\ 0 & 1 & \lambda t & \ddots \\ 0 & 0 & 1 & \ddots \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{p_{ij}(t) = \begin{cases} e^{-\lambda t} \dfrac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} & \text{si } j \geq i \geq 0 \\ 0 & \text{si } 0 \leq j \leq i-1 \end{cases}}$$

→ processus de Poisson.

Avec la fonction génératrice: $\dfrac{\partial G_i}{\partial t}(t,z) = \lambda(z-1)\, G_i(t,z)$ et $G_i(0,z) = z^i$

$$\Rightarrow G(t,z) = z^i e^{\lambda t(z-1)} = e^{-\lambda t} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^j}{j!} z^{i+j} = \sum_{j=i}^{\infty} \underbrace{e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}}_{p_{ij}(t).} z^j$$

3.2) processus de naissance pure à croissance linéaire (Yule - Furry)

$$\begin{cases} \lambda_j = \lambda j, & j \geq 0 \\ \mu_j = 0, & j \geq 0 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -2\lambda & 2\lambda & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

→ diagonalisable mais un peu compliqué

$$\frac{\partial G_i}{\partial t}(t,z) = (z-1) \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j\, p_{ij}(t) z^j = \lambda z(z-1) \frac{\partial G_i}{\partial z}(t,z) \quad \text{et} \quad G_i(0,z) = z^i$$

Posons $G_i(t,z) = H\left(e^{\lambda t}, 1 - \frac{1}{z}\right)$. On a $x \dfrac{\partial H}{\partial x} - y \dfrac{\partial H}{\partial y} = 0$ d'où $H(x,y) = \varphi(xy)$ (poser $u = x$, $v = xy$)

donc $G_i(t,z) = \varphi\left(e^{\lambda t}\left(1 - \frac{1}{z}\right)\right)$. $G_i(0,z) = z^i = \varphi\left(1 - \frac{1}{z}\right) \Rightarrow \varphi(z) = \dfrac{1}{(1-z)^i}$.

$$\Rightarrow G_i(t,z) = \left[\frac{z\, e^{-\lambda t}}{1 - (1 - e^{-\lambda t}) z}\right]^i \qquad \boxed{p_{ij}(t) = \begin{cases} C_{j-1}^{j-i}\, e^{-i\lambda t} (1 - e^{-\lambda t})^{j-i} & \text{si } j \geq i \geq 1 \\ 0 & \text{si } 0 \leq j \leq i-1 \end{cases}}$$

On reconnait la loi de Pascal de paramètres $(i, e^{-\lambda t})$.

3.3) processus d'émigration (mort pure à taux constant)

$$\mu_j = \begin{cases} \mu, & j \geq 1 \\ 0, & j = 0 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \mu & -\mu & 0 & \cdots \\ 0 & \mu & -\mu & \ddots \\ \vdots & & \ddots & \ddots \end{bmatrix} = Q B Q^{-1}$$

$$\text{avec } Q = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & \\ \hline 1 & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots \\ & \vdots & & \ddots \end{array}\right], \quad B = \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & \cdots & \\ \hline 0 & -\mu & 0 & \cdots \\ \vdots & \mu & -\mu & \ddots \\ & & \ddots & \ddots \end{array}\right] = \mu(\underbrace{-\tilde{I} + \tilde{J}}_{\text{commutent}}), \quad Q^{-1} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & \\ \hline -1 & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots \\ & \vdots & & \ddots \end{array}\right]$$

$$\exp(tA) = Q \exp(tB)\, Q^{-1}$$

Or $\exp(tB) = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \cdots \\ \hline 0 & \\ \vdots & e^{-\mu t}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \mu t & 1 & 0 & \cdots \\ \frac{(\mu t)^2}{2!} & \mu t & 1 & \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{pmatrix} \end{array}\right]$ d'où $\exp(tA) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \cdots \\ \hline 1-e^{-\mu t} & \\ 1-(1+\mu t)e^{-\mu t} & e^{-\mu t}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \mu t & 1 & 0 & \cdots \\ \frac{(\mu t)^2}{2!} & \mu t & 1 & \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{pmatrix} \\ \vdots & \end{array}\right)$

$$\boxed{\begin{array}{l} p_{i0}(t) = \mathbb{P}_i(X_t = 0) = \mathbb{P}_i(\tau_{extinction} \leq t) = 1 - \left(1 + \mu t + \frac{(\mu t)^2}{2!} + \cdots + \frac{(\mu t)^{i-1}}{(i-1)!}\right)e^{-\mu t} \\ p_{ij}(t) = \begin{cases} \frac{(\mu t)^{i-j}}{(i-j)!}\, e^{-\mu t} & \text{si } 1 \leq j \leq i \\ 0 & \text{si } j \geq i+1 . \end{cases} \end{array}}$$

3.4) <u>processus de mort pure à décroissance linéaire</u>

$$\begin{cases} \lambda_j = 0, & j \geq 0 \\ \mu_j = \mu j, & j \geq 0 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \mu & -\mu & 0 & \cdots \\ 0 & 2\mu & -2\mu & \ddots \\ \vdots & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

$\frac{\partial G_i}{\partial t}(t,z) = \mu(1-z)\frac{\partial G_i}{\partial z}(t,z)$ et $G_i(0,z) = z^i$.

Posons $G_i(t,z) = H(e^{-\mu t}, z-1)$. On a $x\frac{\partial H}{\partial x} - y\frac{\partial H}{\partial y} = 0 \Rightarrow H(x,y) = \varphi(x\,y)$

$\Rightarrow G_i(t,z) = \varphi(e^{-\mu t}(z-1))$; $G_i(0,z) = z^i = \varphi(z-1) \Rightarrow \varphi(z) = (z+1)^i$

$\Rightarrow G_i(t,z) = \left[(1-e^{-\mu t}) + z\,e^{-\mu t}\right]^i$

$$\boxed{p_{ij}(t) = \begin{cases} C_i^j\, e^{-j\mu t}(1-e^{-\mu t})^{i-j} & \text{si } i \geq j \geq 0 \\ 0 & \text{si } 0 \leq j \leq i-1 \end{cases}}$$

On reconnaît $\mathcal{B}(i, e^{-\mu t})$: si i personnes sont servies selon $\mathcal{E}(\mu t)$, il en reste $j \in \{0,\dots,i\}$ à l'instant t en attente qui seront choisies selon la loi binomiale.

4) <u>Régime stationnaire</u> on suppose $\forall i \in \mathbb{N}$, $\lambda_i > 0$, $\mu_i > 0$ (sauf $\mu_0 = 0$)
on pose $\tilde{\pi}_0 = 1$, $\tilde{\pi}_j = \frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{j-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_j}$.

<u>Théorème (Karlin et McGregor)</u> :

1) $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est ergodique (i.e. récurrent positif)
$\Leftrightarrow \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j\tilde{\pi}_j} = \infty$ et $\sum_{j=0}^{\infty}\tilde{\pi}_j < \infty$,

et alors $\begin{cases} \lim_{t\to+\infty} p_{ij}(t) \equiv \pi_j = \frac{1}{\lambda_j \nu_j} & \text{où } \pi_j = \frac{\tilde{\pi}_j}{\sum_{k=0}^{\infty}\tilde{\pi}_k}, \\ \nu_j = \mathbb{E}_j(\tau_j) = \frac{1}{(\lambda_j+\mu_j)\pi_j} . \end{cases}$

2) $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ récurrent nul $\Leftrightarrow \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_j\tilde{\pi}_j} = \infty$ et $\sum_{j=0}^{\infty}\tilde{\pi}_j = \infty$.

et alors $\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) = 0$.

3) $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ transitoire $\Leftrightarrow \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_j\tilde{\pi}_j} < \infty$

et alors $X_t \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$ p.s.

__Eléments de démonstration :__ recherche de la loi stationnaire.

- On a $P'(t)=P(t)A$. Si $P(t)\underset{t\to\infty}{\longrightarrow}\Pi$ alors $P'(t)\to 0$ et donc $\Pi A=0$, et aussi $\pi A=0$

$$\begin{cases}-\lambda_0\pi_0+\mu_1\pi_1 = 0\\ \lambda_0\pi_0-(\lambda_1+\mu_1)\pi_1+\mu_2\pi_2=0\\ \lambda_1\pi_1-(\lambda_2+\mu_2)\pi_2+\mu_3\pi_3=0\\ \dots\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\mu_1\pi_1=\lambda_0\pi_0\\ \mu_2\pi_2=\lambda_1\pi_1\\ \mu_3\pi_3=\lambda_2\pi_2\\ \dots\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\pi_1=\frac{\lambda_0}{\mu_1}\pi_0=\pi_0\tilde{\pi}_1\\ \pi_2=\frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1\mu_2}\pi_0=\pi_0\tilde{\pi}_2\\ \pi_3=\frac{\lambda_0\lambda_1\lambda_2}{\mu_1\mu_2\mu_3}\pi_0=\pi_0\tilde{\pi}_3\\ \dots\end{cases}$$

$$\sum_{j=0}^{\infty}p_{ij}(t)=1 \Rightarrow \sum_{j=0}^{\infty}\pi_j\in[0,1]$$

- Pour avoir $\sum_{j=0}^{\infty}\pi_j=1$ on prend $\pi_0=\frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty}\tilde{\pi}_k}$ (à condition que $\sum_{k=0}^{\infty}\tilde{\pi}_k<\infty$).

- Si $\sum_{k=0}^{\infty}\tilde{\pi}_k=\infty$, $\sum_{k=0}^{\infty}\pi_j=\pi_0\sum_{k=0}^{\infty}\tilde{\pi}_k\in[0,1]\Rightarrow\pi_0=0$ et alors $\forall j,\ \pi_j=0$. $\square$

__Exemples :__

$*$ $\begin{cases}\lambda_j=\lambda,\ j\geq 0\\ \mu_j=\mu,\ j\geq 1\end{cases}$ $(\mu_0=0)$ On a $\tilde{\pi}_j=\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j$, $\frac{1}{\lambda_j\tilde{\pi}_j}=\frac{1}{\lambda}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^j$.

En conséquence :

$$\boxed{\begin{array}{l}\bullet (X_t)_{t\in\mathbb{R}^+} \text{ ergodique} \iff \sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j<\infty \text{ et } \sum_{j=0}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^j=\infty \iff \frac{\lambda}{\mu}<1\\ \quad\text{et dans ce cas } \pi_j=\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j \to \pi:\mathcal{G}\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\\ \bullet (X_t)_{t\in\mathbb{R}^+} \text{ récurrent nul} \iff \sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j=\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^j=\infty \iff \frac{\lambda}{\mu}=1\\ \bullet (X_t)_{t\in\mathbb{R}^+} \text{ transitoire} \iff \sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^j<\infty \iff \frac{\lambda}{\mu}>1\end{array}}$$

$*$ $\begin{cases}\lambda_j=\lambda,\ j\geq 0\\ \mu_j=j\mu,\ j\geq 0\end{cases}$ On a $\tilde{\pi}_j=\frac{1}{j!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j$ et $\sum_{j=0}^{\infty}\tilde{\pi}_j=e^{\lambda/\mu}<\infty$ et $\sum\frac{1}{\lambda_j\tilde{\pi}_j}=\infty$ donc

$$\boxed{(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+} \text{ est ergodique et } \pi_j=e^{-\lambda/\mu}\frac{(\lambda/\mu)^j}{j!} \to \pi:\mathcal{P}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)}$$

$*$ Plus généralement : $\begin{cases}\lambda_j=\lambda j+a,\ j\geq 0\\ \mu_j=\mu j+b,\ j\geq 1\end{cases}$ $(\mu_0=0)$ On a

$$\begin{aligned}\tilde{\pi}_j&=\frac{a(\lambda+a)(2\lambda+a)\dots((j-1)\lambda+a)}{(\mu+b)(2\mu+b)\dots(j\mu+b)}\\ &=\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j\frac{\left(\frac{a}{\lambda}\right)\left(1+\frac{a}{\lambda}\right)\left(2+\frac{a}{\lambda}\right)\dots\left(j-1+\frac{a}{\lambda}\right)}{\left(1+\frac{b}{\mu}\right)\left(2+\frac{b}{\mu}\right)\dots\left(j+\frac{b}{\mu}\right)}\\ &=\frac{\Gamma\left(1+\frac{b}{\mu}\right)}{\Gamma\left(\frac{a}{\lambda}\right)}\underbrace{\frac{\Gamma\left(j+\frac{a}{\lambda}\right)}{\Gamma\left(j+1+\frac{b}{\mu}\right)}}_{\sim j^{\frac{a}{\lambda}-\frac{b}{\mu}-1}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j\end{aligned}$$

Ainsi le comportement des séries $\sum\tilde{\pi}_j$ et $\sum\frac{1}{\lambda_j\tilde{\pi}_j}$ est le même que dans le 1er cas.