Calcul des probabilités

Fondements

I Axiomatisation

Définition intuitive de la probabilité à l'aide de fréquence :

Au cours de n lancers d'une pièce non biaisée on note S_n le nombre de Face sorties.
On observe que $\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2} = p$ ($\frac{S_n}{n}$: fréquence d'apparition de F ; on a une série statistique à un caractère $x_i \in \{0,1\}$ (1 si F, 0 si P), effectifs : $n_0 = n - S_n$, $n_1 = S_n$)
Soit l'épreuve consistant à lancer 10 fois de suite la pièce. $\text{Prob}\{10\ P\} = \frac{1}{2^{10}} \approx 0{,}09\%$.
Si on effectue 4000 épreuves : Prob{ obtenir au moins une fois 10 P }
$= 1 - \text{Prob}\{\text{obtenir chaque fois au moins } 1\ F\}$
$= 1 - \left(1 - \frac{1}{2^{10}}\right)^{4000} \approx 98\%$

Si on effectue une infinité d'épreuves on se heurte à des problèmes : la probabilité de réalisation d'une événement précisé à l'avance est nulle. Dans ce cas chaque cas imaginable est impossible, alors que l'un d'eux se réalise pourtant ($\forall \omega\ P\{\omega\} = 0$, $P(\Omega) = 1$)
Il faut donc préciser que l'impossibilité physique d'observer un événement de probabilité nulle est valable pour un seul événement spécifié avant l'expérience.

Définition : Un espace probabilisé est la donnée de $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, Ω univers, $\mathcal{T}$ tribu, P probabilité.
Chaque élément $\omega \in \Omega$ est une éventualité, $A \in \mathcal{T}$ un événement.

- $\forall A_n \in \mathcal{T}$, $\bigcup_n A_n \in \mathcal{T}$
- $\Omega \in \mathcal{T}$
- $\forall A \in \mathcal{T}$, $A^c \in \mathcal{T}$

P est une application $\begin{array}{l} \mathcal{T} \longrightarrow [0,1] \\ A \longmapsto P(A) \end{array}$ vérifiant
- $P\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n P(A_n)$ si $i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$ (événements 2 à 2 incompatibles)
- $P(\Omega) = 1$ (Ω : événement certain)

Proposition : $\forall A, B \in \mathcal{T}$, $\emptyset, A \setminus B, A \Delta B \in \mathcal{T}$; $\forall A_n \in \mathcal{T}$, $\bigcap_n A_n \in \mathcal{T}$;
$A \cap B$

$P(\emptyset) = 0$ (événement impossible), $P(A^c) = 1 - P(A)$
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, $P(A \Delta B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$
$B \subset A \Rightarrow P(A \setminus B) = P(B) - P(A)$
$(A_n) \nearrow \Rightarrow P\left(\bigcup_n A_n\right) = \sup_n P(A_n)$
$(\searrow)$ $\left(\bigcap_n\right)$ $(\inf)$

démonstration : $A \cup B = A \cup (B \setminus (A \cap B))$

$A \Delta B = (A \setminus (A \cap B)) \cup (B \setminus (A \cap B))$

Si $(A_n) \nearrow$:
- $P(A_n) \leq P\left(\bigcup_n A_n\right)$ donc $\sup_n A_n \leq P\left(\bigcup_n A_n\right)$
- $\bigcup_n A_n = \bigcup_n (A_n \setminus A_{n-1})$ $\Rightarrow P\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n P(A_n) - P(A_{n-1}) = \lim_n P(A_n) = \sup_n P(A_n)$.
$A_{n-1} \subset A_n$ avec $A_{-1} = \emptyset$

Formule de Poincaré : $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k} S_k$ avec $S_k = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k})$

probabilité qu'au moins un des A_i se réalise.

$P(\Delta_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k} 2^{k} S_k$

démonstration par récurrence (un peu technique)

Cas Ω fini : on choisit très souvent $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$ et $P(A) = \frac{\text{card} A}{\text{card}\, \Omega}$ (probabilité uniforme)

P est telle que toutes les éventualités $\{\omega_i\}$ sont équiprobables : $P(\{\omega_i\}) = p = \frac{1}{\text{card}\,\Omega}$.

ex : lancer d'un dé $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $P(\{i\}) = \frac{1}{6}$, $P(\{i, j\}) = \frac{2}{6}$ etc...

lancer de deux dés : 1) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$, $P(\{(i,j)\}) = \frac{1}{36}$ (dés différenciés)

2) (dés non différenciés) $\Omega^* = \{\omega_{ij}, 1 \leq j \leq i \leq 6\}$ $\omega_{ij} = \{(i,j), (j,i)\}$, $\text{card}\,\Omega^* = \Gamma_6^2 = 21$, $P(\{\omega_{ii}\}) = \frac{1}{36}$ $P(\{\omega_{ij}\}) = \frac{1}{18}$

Cas Ω infini dénombrable : si $\mathcal{T}$ contient les singletons, il n'y a pas de probabilité uniforme :

$\forall \omega \in \Omega$ $P(\{\omega\}) = p \Rightarrow P(\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) = \begin{cases} +\infty & \text{si } p > 0 \\ 0 & \text{si } p = 0 \end{cases}$. Si $p_i = P(\{\omega_i\})$, $\Sigma p_i = 1$. → impossible

Cas Ω infini non dénombrable

ex : succession infinie de lancers d'une pièce : $\Omega = \{P, F\}^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$.

Ω n'est pas dénombrable, sinon on pourrait numéroter les suites

e.g. $0 \longmapsto$ P P F P F F ...

$1 \longmapsto$ P P F F P F ...

$2 \longmapsto$ P F F F P P ...

Considérer la diagonale PPF... puis son opposé FFP... qui ne peut pas être numéroté (argument de Cantor 1845-1918).

Si les $\{\omega\}$ sont équiprobables, nécessairement $P(\{\omega\}) = 0$, $\forall \omega \in \Omega$.

* probabilités géométriques : on tire sur une cible Ω et on suppose que tous les coups touchent la cible. Probabilité de toucher une région A de Ω : $\frac{\lambda(A)}{\lambda(\Omega)}$.

Dans le cas fini, on a besoin de dénombrement.

II Dénombrement

Définition : E et F équipotents s'il existe une bijection $E \to F$.

On suppose E, F finis.

Propriétés des cardinaux : E équipotent à F $\Leftrightarrow$ card E = card F

$\forall A, B \subset E$, $\text{card}(A \cup B) = \text{card} A + \text{card} B - \text{card}(A \cap B)$

$\text{card}(A \Delta B) = \text{card} A + \text{card} B - 2\,\text{card}(A \cap B)$

$\text{card}(A^c) = \text{card} E - \text{card} A$; si $B \subset A$ $\text{card}(A \setminus B) = \text{card} A - \text{card} B$

$\text{card}(E \times F) = (\text{card} E) \times (\text{card} F)$

$\text{card}\, \mathcal{P}(E) = 2^{\text{card} E}$.

Dénombrement : E_n désigne un ensemble de cardinal n, e.g. $E_n = \{1, 2, \dots, n\}$.

1) Nombre d'applications de E_p vers E_n : n^p $p \leq n$

ex : - répartition de p boules distinctes dans n boîtes (l'ordre des boules dans les boîtes n'important pas)

- nombre de relevés distincts de numéros de p boules prélevées avec remise après chaque prélèvement.

- on a une bijection $\mathcal{P}(E) \to \mathcal{A}(E, \{0,1\}) = \{0,1\}^E$

$A \mapsto \mathbb{1}_A$

2) Nombre d'injections de E_p dans E_n : $A_n^p = n(n-1)\cdots(n-p+1)$, $p \leq n$.

Cas $n=p$: nombre de bijections (permutations) de E_n : $n!$

ex : – répartition de p boules distinctes dans n boîtes pouvant contenir chacune au plus 1 boule
– nombre de relevés distincts ordonnés de numéro de p boules prélevées sans remise.
– nombre de p-uplets $(x_{i_1}, \dots, x_{i_p})$ avec des $x_i \in \{1, \dots, n\}$ tous distincts.

3) Nombre d'applications strictement croissantes de E_p dans E_n,
ou nombre de parties à p éléments de E_n : $C_n^p = \dfrac{A_n^p}{p!} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p!} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$, $p \leq n$.

ex : – nombre de relevés distincts non ordonnés de numéro de p boules prélevées sans remise.
– nombre de p-listes $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_p}\}$ avec des $x_i \in \{1, \dots, n\}$ tous distincts.
– nombre de solutions $(x_1, \dots, x_n)$, $x_i \in \{0,1\}$, de l'équation $x_1 + \cdots + x_n = p$.
(→ recherche d'éléments de $\{0,1\}^n$ contenant p 1)

Règles de calcul sur C_n^p : symétrie, Pascal, binôme ...
généralisation : coefficient multinomial = nombre de partitions de E_n en sous-ensembles à $p_1, p_2, \dots, p_k$ éléments où $p_1 + \cdots + p_k = n$: $\dfrac{n!}{p_1!\,p_2!\cdots p_k!} = C_n^{p_1} C_{n-p_1}^{p_2} \cdots C_{n-p_1-\cdots-p_{k-1}}^{p_k}$

4) Nombre d'applications croissantes de E_p dans E_n (bijection: $\mathcal{A}(E_p \to E_n) \to \mathcal{A}(E_p \to E_{n+p-1})$, $f \nearrow \mapsto g$ strict. $\nearrow$ où $g(i) = f(i) + i - 1$)
ou combinaisons avec répétitions : nombre de p-listes $[x_{i_1}, \dots, x_{i_p}]$ avec des x_i éventuellement répétés (l'ordre n'est pas considéré) : $\Gamma_n^p = C_{n+p-1}^p$

ex : – répartition de p boules indiscernables dans n boîtes.
– nombre de solutions $(x_1, \dots, x_n)$, $x_i \in \mathbb{N}$ de l'équation $x_1 + \cdots + x_n = p$.

On trouve Γ_n^p à l'aide de la récurrence : $\Gamma_n^p = \Gamma_{n-1}^p + \Gamma_n^{p-1}$ avec $\Gamma_n^0 = 1$, $\Gamma_1^p = 1$.

autre méthode : on introduit des cloisons $\bullet\,\bullet \mid \bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet \mid\mid \bullet\,\bullet \,\dots\, \mid \bullet \mid \bullet\,\bullet\,\bullet$
liste de p boules et n-1 cloisons, i.e. $(p+n-1)$-liste de $\bullet, \mid$.
(on choisit n-1 cloisons dans la $(p+n-1)$-liste → C_{n+p-1}^{n-1} possibilités)

5) Nombre de surjections de E_n dans E_p : $S_n^p = \sum_{i=1}^{p} (-1)^{p-i} C_p^i\, i^n$, $p \leq n$.

ex : – répartition de p boules distinctes dans n boîtes devant contenir chacune au moins 1 boule (l'ordre importe).

On trouve S_n^p à l'aide de la récurrence : $S_n^p = p\left[S_{n-1}^{p-1} + S_{n-1}^p\right]$.

Quelques propriétés des C_n^p : $C_n^{n-p} = C_n^p$, $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$, $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k}$,

$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$, $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0$ $n \geq 1$,

$\sum_{k=0}^{m} C_{n+k}^n = C_{n+m+1}^{n+1}$, $\sum_{k=0}^{m} (-1)^k C_n^k = (-1)^m C_{n-1}^m$ $n \geq 1$,

$\sum_{k=0}^{p} C_n^k C_m^{p-k} = C_{n+m}^p$ et pour $m=n=p$: $\sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2 = C_{2n}^n$

$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k (C_{2n}^k)^2 = (-1)^n C_{2n}^n$, $\sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k (C_{2n+1}^k)^2 = 0$.

III Probabilités conditionnelles

ex : * Probabilité d'obtenir 9 en deux coups de dé : possibilités : $(6,3),(5,4),(4,5),(3,6)$

$$\rightarrow P = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

Probabilité d'obtenir 9 en deux coups sachant qu'on a obtenu 5 au premier coup : $P' = \frac{1}{6}$.

* Tirage de deux boules sans remise dans une urne contenant R rouges, N noires. $P(R_1 N_2) = P(R_1)P(N_2|R_1)$

Définition : soit $A, B \in \mathcal{T}$ avec $P(B) \neq 0$. $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = P_B(A)$.

Proposition : P_B probabilité sur $(\Omega \cap B = B, \mathcal{T}_B)$ $\mathcal{T}_B = \{A\cap B, A \in \mathcal{T}\}$, et aussi sur $(\Omega, \mathcal{T})$.

si $P(A)\neq 0$, $P(B)\neq 0$ on a $P(A\cap B) = P(B)P(A|B) = P(A)P(B|A)$

Probabilités composées : $P(A\cap B\cap C) = P(A)P(B|A)P(C|A\cap B)$ etc...

ex : Anatole a u chemises unies et r à rayures. Chaque matin il met une chemise au hasard. Quelle est la probabilité qu'il ait choisi successivement 2 chemises à rayures puis 1 unie ?

Posons $U_n = \{$Anatole a choisi 1 chemise unie le n^e jour$\}$

$R_n = \{$ " " à rayures " $\}$

$$P(R_1\cap R_2 \cap U_3) = P(R_1)P(R_2|R_1)P(U_3|R_1\cap R_2) = \frac{r}{r+u}\,\frac{r-1}{r+u-1}\,\frac{u}{r+u-2}.$$

Probabilités totales, formule de Bayes : Soit $(B_i)_{1\leq i\leq n}$ une partition de Ω telle que $\forall i, P(B_i)\neq 0$.

(Thomas Bayes 1701-1761) $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A|B_i)$

et $P(B_i|A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B_j)P(A|B_j)}$. Les $P(B_i|A)$ sont les probabilités des causes de A.

interprétation : soit $(B_{i_1}, \dots, B_{i_k})$ les B_i qui coupent A. Lorsque A est réalisé l'un des B_{i_j} l'est aussi, qui est une cause de réalisation de A.

ex : problème du tricheur : On rencontre un inconnu dans le train qui nous propose de jouer aux cartes. Il gagne. Quelle est la probabilité qu'il ait triché ?

On pose $A = \{$l'inconnu gagne$\}$, $B = \{$l'inconnu a triché$\}$. On suppose $P(A|B) = 1$ $(B \subset A)$

Soit $P(A|B^c) = P\{$l'inconnu gagne sans avoir triché$\} = p$

et $P(B) = P\{$l'inconnu triche$\} = q$.

Donc $P\{$l'inconnu a triché sachant qu'il y a gagné$\} = P(B|A) = \frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B)+P(B^c)P(A|B^c)}$

$$= \frac{q}{q+(1-q)p}$$

Remarque : à q fixé, $p \mapsto P(B|A)$ est décroissante.

Le fait que l'inconnu gagne renforce les soupçons, d'autant plus que p est faible ou q est proche de 1.

Autre formulation : Un étudiant répond à une question à choix multiples (n réponses possibles). Soit il connait la réponse, soit il la devine. On suppose que si il la devine, il répond juste avec probabilité $\frac{1}{n} = p$.

$A = \{$il répond juste$\}$

$B = \{$il connait la rép$\}$ Quelle est la probabilité qu'il connaisse la réponse sachant qu'il répond juste ? ex $n=5$, $q=\frac{1}{2}$

$q = P\{$il connait la réponse$\}$ $\Rightarrow P = \frac{5}{6}$

IV Indépendance stochastique

On veut traduire le fait que B n'a pas d'influence sur A et réciproquement.

B n'a pas d'influence sur A $\iff \dfrac{\text{nb de cas où A est réalisé avec B}}{\text{nb de cas où B est réalisé}} = \dfrac{\text{nb de cas où A est réalisé sans B}}{\text{nb de cas où B n'est pas réalisé}}$

$$\iff \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(A\cap B^c)}{P(B^c)} \quad \left(= \frac{P(A)-P(A\cap B)}{1-P(B)}\right)$$

$$\iff P(A\cap B) = P(A)\,P(B)$$

Autre façon : $P(A|B) = P(A) \Rightarrow P(A\cap B) = P(A)\,P(B)$ (et aussi $P(B|A) = P(B)$)

<u>Définition :</u> A, B indépendants $\iff P(A\cap B) = P(A)P(B)$.

<u>Proposition :</u> si A, B sont indépendants, A, B^c le sont aussi, ainsi que A^c, B et A^c, B^c.

<u>Remarque :</u> il faut se méfier de la notion intuitive d'indépendance.

ex : On lance n fois une pièce non biaisée.

Soit $A = \{$au cours des n lancers on obtient au plus 1 fois P$\}$

$B = \{$ " " au moins 1 fois P et 1 fois F$\}$

$\Omega = \{P, F\}^n$ card $\Omega = 2^n$;

$A = \{(F, F, \dots, F), (P, F, \dots, F), \dots, (F, \dots, F, P)\}$ card $A = n+1$;

$B = \{(P, \dots, P), (F, \dots, F)\}^c$, card $B = 2^n - 2$.

$$P(A) = \frac{n+1}{2^n}, \quad P(B) = \frac{2^n-2}{2^n}, \quad P(A\cap B) = \frac{n}{2^n}$$

$P(A\cap B) = P(A)P(B) \iff 2^{n-1} = n+1 \iff n = 3$, i.e. A, B indépendants $\iff n = 3$.

<u>Indépendance mutuelle</u>

ex : * On lance 2 fois un dé.

Soit $A = \{$au 1er coup le numéro obtenu est pair$\}$

$B = \{$au 2e coup " " impair$\}$

$C = \{$aux deux coups les numéros obtenus ont même parité$\}$

$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$, $P(A\cap B) = P(A\cap C) = P(B\cap C) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$, $P(A\cap B\cap C) = 0$.

Les A, B, C sont deux à deux indépendants mais pas globalement.

* lancer de 2 dés. $A = \{$somme $= 7\}$, $B = \{$1er dé $= 4\}$, $C = \{$2e dé $= 3\}$ $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{6}$,

$P(A\cap B) = \frac{1}{36} = P(A)P(B)$

$P(A\cap C) = \frac{1}{36} = P(A)P(C)$

$P(A\cap(B\cap C)) = P(B\cap C) \neq P(A) \times P(B\cap C)$

A indép. de B et C mais pas de $B\cap C$

<u>Définition :</u> A, B, C mutuellement indépendants $\iff \begin{cases} P(A\cap B) = P(A)\,P(B) \\ P(B\cap C) = P(B)\,P(C) \\ P(A\cap C) = P(A)\,P(C) \\ P(A\cap B\cap C) = P(A)P(B)P(C) \end{cases}$

et plus généralement ...

Bibliographie : N. Boccara, probabilités 1995 (Ellipse)

S.M. Ross, Initiation aux probabilités, ch 1, 2, 3.