Chapitre 3

FILES D'ATTENTE

I Généralités

Type de file (notations de Kendall) : $A/S/C(/K/L/DS)$

- A : arrivées
- S : service
- C : nombre de serveurs
- K : capacité
- L : effectif de la population
- DS : discipline

Type d'arrivées et de service :

- M : Markov (arrivées poissoniennes, service exponentiel)
- G : loi générale
- GI : lois générales indépendantes
- D : déterministe
- E_k : loi d'Erlang de paramètre k
- H_k : loi hyperexponentielle

Type de discipline :

- FIFO : first in, first out, ou FCFS : first come, first served
- LIFO : last in, first out, ou LCFS : last come, first served
- PRIOR : priorité
- PREEMPT : préemption du client en service
- PS : processor sharing
- RANDOM : aléatoire ...

Modèle :

processus d'arrivées :
- s_n : instant d'arrivée de la n^e personne
- T_n : temps inter-arrivées $T_n = s_n - s_{n-1}$
- S_n : temps de service de la n^e personne.
- A_t : nombre de clients arrivés durant $[0,t]$.

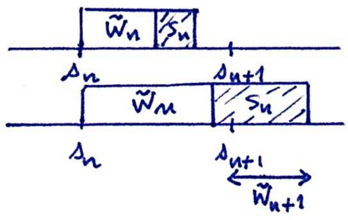
processus des départs : D_t : nombre de clients sortis durant $[0,t]$.

longueur de la queue : $Q_t = A_t - D_t$: nombre de clients en attente ou en service

temps d'attente : $\tilde{W}_n$: temps d'attente du n^e client depuis son arrivée jusqu'à son service.

temps de séjour dans le système : $W_n = \tilde{W}_n + S_n$.

On a $\tilde{W}_{n+1} = \begin{cases} 0 & \text{si } s_{n+1} > s_n + \tilde{W}_n + S_n \\ \tilde{W}_n + S_n - T_{n+1} & \text{sinon} \end{cases}$



Equation de Lindley : $\boxed{\tilde{W}_{n+1} = (\tilde{W}_n + S_n - T_{n+1})^+}$

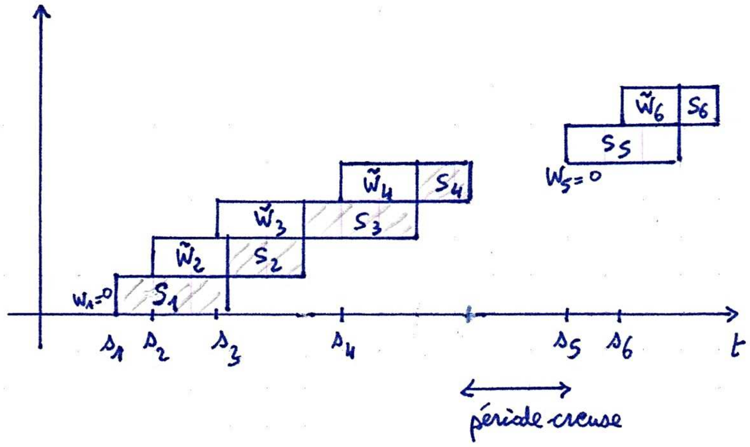
Supposons les $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ iid ainsi que les $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et les deux suites indépendantes.

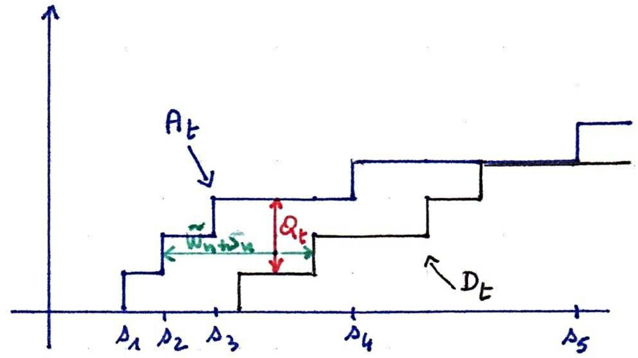
Posons $U_n = S_n - T_{n+1}$. On a donc $\tilde{W}_{n+1} = (\tilde{W}_n + U_n)^+$. On montre facilement que

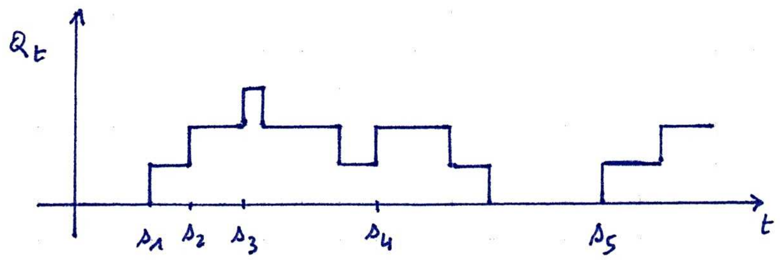
$$\tilde{W}_n \overset{loi}{=} \max_{1\leq j\leq n-1} \left(\sum_{i=1}^{j} U_i\right)^+ .$$

Intensité du trafic : $\rho = \dfrac{E(S_1)}{E(T_1)}$

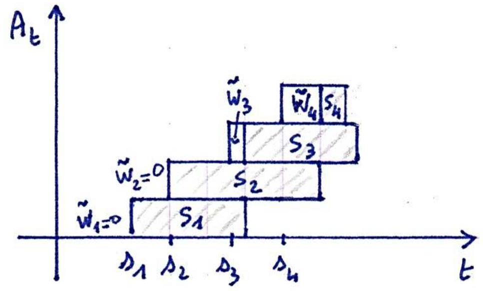
FCFS, 1 serveur.



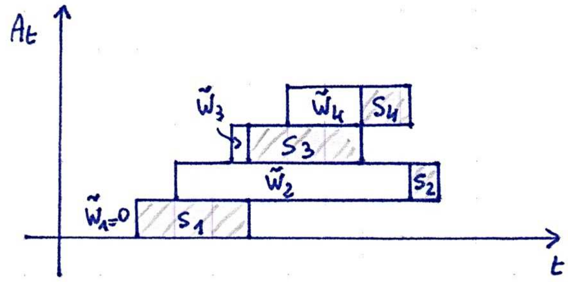




FCFS, 2 serveurs.



LCFS, 1 serveur



II File $M(\lambda)/M(\mu)/1$

1) Modèle : $s_n : \mathcal{E}(\lambda)$ $\Rightarrow$ arrivées poissoniennes $A_t : \mathcal{P}(\lambda t)$ $\quad s_n = \inf\{t>0 : A_t = n\}$; $E(s_n) = \frac{n}{\lambda}$.
$S_n : \mathcal{E}(\mu)$; $E(S_n) = \frac{1}{\mu}$

$\Rightarrow (Q_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$: processus de naissance-mort $\begin{cases} \lambda_j = \lambda, & j \geq 0 \\ \mu_j = \begin{cases} \mu, & j\geq 1 \\ 0, & j=0 \end{cases} \end{cases}$.

On a $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$. On a vu que : Q ergodique $\iff \rho < 1$ i.e. le taux d'arrivée est $<$ à la capacité de service.

Equations progressives : $\quad P'(t) = P(t)A \quad \begin{cases} p'_{i0}(t) = -\lambda p_{i0}(t) + \mu p_{i1}(t) \\ p'_{ij}(t) = \lambda p_{i,j-1}(t) - (\lambda+\mu) p_{ij}(t) + \mu p_{i,j+1}(t), \; j\geq 1. \end{cases}$

2) Etat stationnaire

Proposition :

si $\rho < 1$, $\quad p_{ij}(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \pi_j = (1-\rho)\rho^j$ et donc $Q_\infty : \mathcal{G}(1-\rho)$

si $\rho > 1$, $\quad p_{ij}(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et en fait $Q_\infty = +\infty$ p.s.

si $\rho = 1$, $\quad p_{ij}(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et en fait Q oscille indéfiniment, non bornée.

Démonstration : π est solution de $\pi A = 0$: $\begin{cases} -\lambda \pi_0 + \mu \pi_1 = 0 \\ \lambda \pi_{j-1} - (\lambda+\mu)\pi_j + \mu \pi_{j+1} = 0, \quad j \geq 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow (\lambda+\mu)\pi_j = \lambda \pi_{j-1} + \mu \pi_{j+1} \qquad \text{équation de balance globale (en } j)$$

$$\begin{tikzcd} j-1 \arrow[r, bend left, "\lambda"] & j \arrow[l, bend left, "\mu"] \arrow[r, bend left, "\lambda"] & j+1 \arrow[l, bend left, "\mu"] \end{tikzcd}$$

à interpréter par :

$$\begin{tikzcd} j-1 \arrow[r, bend left, "\lambda"] & j \arrow[l, bend left, "\mu"] \arrow[r, bend right, "\lambda"'] & j+1 \arrow[l, bend right, "\mu"'] \end{tikzcd} \qquad \frac{\text{arrivées en } j}{\text{départs de } j}$$

Solution : $\quad \mu(\pi_{j+1} - \pi_j) = \lambda(\pi_j - \pi_{j-1})$

$$\Rightarrow \pi_j - \pi_{j-1} = \rho^{j-1}(\pi_1 - \pi_0) = \pi_0 \rho^{j-1}(\rho-1) \Rightarrow \pi_j - \pi_0 = \sum_{k=1}^{j} \pi_0 \rho^{k-1}(\rho-1)$$

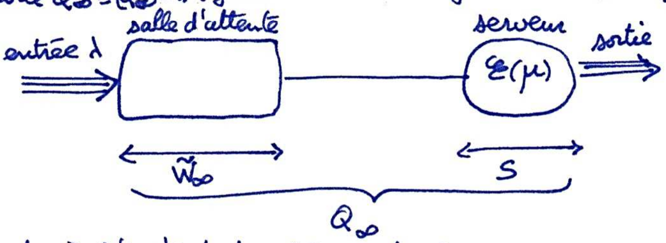
$$\Rightarrow \pi_j = \pi_0\left[1 + (\rho-1) + (\rho^2-\rho) + \cdots + (\rho^j - \rho^{j-1})\right] = \pi_0 \rho^j$$

$\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1 \Rightarrow \pi_0 = (1-\rho)$ d'où le résultat pour $\rho < 1$.

Equation de balance locale (en j) : $\begin{cases} \mu \pi_{j+1} = \lambda \pi_j, \\ \lambda \pi_{j-1} = \mu \pi_j \end{cases}$ $\begin{tikzcd} j \arrow[r, bend right, "\lambda"'] & j+1 \arrow[l, bend right, "\mu"'] \end{tikzcd}$ $\begin{tikzcd} j-1 \arrow[r, bend left, "\lambda"] & j \arrow[l, bend left, "\mu"] \end{tikzcd}$ $\quad \pi_j = \rho \pi_{j-1} \cdots \quad \square$

3) En régime stationnaire

- Probabilité de trouver la queue vide : $\mathbb{P}(Q_\infty = 0) = \pi_0 = \boxed{1-\rho} \longrightarrow \lambda = \mu[1 - \mathbb{P}(Q_\infty = 0)]$.
- Longueur moyenne de la queue : $E(Q_\infty) = \sum_{j=0}^{\infty} j\, \mathbb{P}(Q_\infty = j) = \sum_{j=0}^{\infty} j \pi_j = \frac{\rho}{1-\rho} = \boxed{\frac{\lambda}{\mu-\lambda}}$
  Nombre de clients en attente de service $\tilde{Q}_\infty = (Q_\infty - 1)^+$.
- Temps d'attente :



Considérons un client arrivant à l'instant t trouvant $Q_t = n$ personnes devant lui. Son temps d'attente avant d'être servi est alors (temps virtuel)

$$\tilde{V}_t = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ \tilde{S}_1^* + \tilde{S}_2 + \cdots + \tilde{S}_n & \text{si } n \geq 1 \end{cases} \qquad \text{i.e.} \quad \tilde{V}_t \overset{\text{loi}}{\equiv} \sum_{i=1}^{Q_t} \tilde{S}_i \quad \text{avec } \sum_{i=1}^{0} = 0.$$

où $\tilde{S}_1^*$ est la fraction de temps de service de la première personne restant depuis l'arrivée du nouveau client. On a $\tilde{S}_1^* \overset{\text{loi}}{\equiv} \tilde{S}_1$ d'après l'absence de mémoire de la loi exponentielle.

Fonction de répartition de $\tilde{W}_\infty = \tilde{V}_\infty$:

$$F_{\tilde{W}_\infty}(t) = \mathbb{P}(\tilde{W}_\infty \leq t) = \underbrace{\mathbb{P}(Q_\infty = 0)}_{\text{queue vide}} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\mathbb{P}(\tilde{W}_\infty \leq t \mid Q_\infty = n)}_{\text{loi d'Erlang } \Gamma(n,\mu)} \underbrace{\mathbb{P}(Q_\infty = n)}_{\pi_n}$$

$$= (1-\rho) + \sum_{n=1}^{\infty} (1-\rho)\rho^n \int_0^t \frac{\mu^n s^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\mu s}\, ds$$

$$= (1-\rho) + \rho(\mu-\lambda) \int_0^t e^{-(\mu-\lambda)s}\, ds$$

$$= 1 - \rho e^{-(\mu-\lambda)t}, \quad t \geq 0.$$

D'où $\mathbb{P}(\tilde{W}_\infty = 0) = 1-\rho$ et $f_{\tilde{W}_\infty}(t) = F'_{\tilde{W}_\infty}(t) = \rho(\mu-\lambda)e^{-(\mu-\lambda)t} \longrightarrow \tilde{W}_\infty : \mathcal{E}(\mu-\lambda)$ pondérée en 0

$$\Rightarrow \boxed{(\tilde{W}_\infty \mid \tilde{W}_\infty > 0) : \mathcal{E}(\mu-\lambda)}$$

Si $Q_t = n$, $\tilde{V}_t + S_{n+1}$ est le temps passé dans le système (attente + service) par le $(n+1)^e$ client

$W_\infty = \tilde{W}_\infty + S : \mathcal{E}(\mu-\lambda) \longrightarrow$ ne dépend pas que de ρ. On peut avoir des temps d'attente très longs et des queues très courtes et vice-versa.

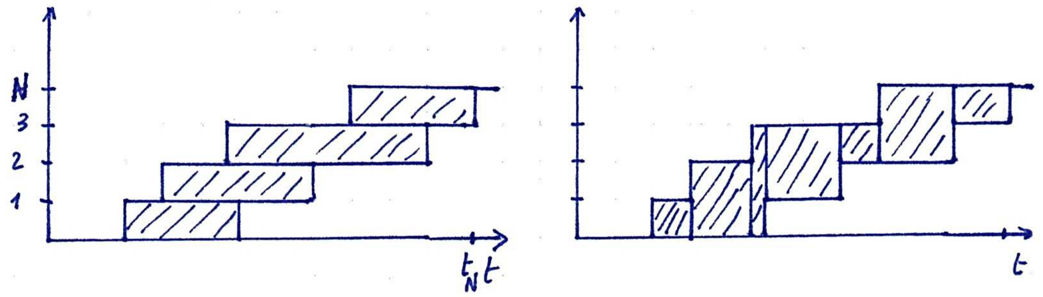
<u>Formule de Little</u> (1961) $\boxed{\mathbb{E}(Q_\infty) = \mu\, \mathbb{E}(\tilde{W}_\infty) = \lambda\, \mathbb{E}(W_\infty)}$

<u>Interprétation</u> :
- temps d'attente moyen = nombre moyen de clients × temps moyen de service
- temps de séjour ~~moyen~~ = nombre moyen de clients × temps moyen d'arrivée

<u>Démonstration</u> : $1^{ère}$ dém : $\mathbb{E}(Q_\infty) = \dfrac{\lambda}{\mu-\lambda}$, $\mathbb{E}(\tilde{W}_\infty) = \dfrac{\rho}{\mu-\lambda}$, $\mathbb{E}(W_\infty) = \dfrac{1}{\mu-\lambda} \to$ vérification OK.

2^e dém : $\mathbb{E}(\tilde{W}_\infty) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\mathbb{E}(\tilde{W}_\infty \mid Q_\infty = n)}_{\Gamma(n,\mu)} \pi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n\pi_n}{\mu} = \dfrac{1}{\mu}\mathbb{E}(Q_\infty)$.

3^e dém : sur le graphique $t \mapsto A_t, D_t$:



Aire hachurée = $\sum$ temps de séjour = $\int$ longueur de la queue

$$\sum_{n=1}^{N} W_n = \int_0^{t_N} Q_s\, ds$$

t_N : instant de sortie du N^e client : $D_{t_N} = N$. On démontre que $(D_t)_{t\geq 0}$ est un processus de poisson (λ).

$$\underbrace{\frac{1}{t_N}\int_0^{t_N} Q_s\, ds}_{\substack{\longrightarrow\ \mathbb{E}(Q_\infty) \text{ p.s.} \\ t\to+\infty}} = \frac{N}{t_N} \times \underbrace{\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} W_n}_{\substack{\longrightarrow\ \mathbb{E}(W_\infty) \text{ p.s.} \\ N\to+\infty}}$$

(théorème ergodique) (loi des grands nombres)

$\dfrac{N}{t_N} = \dfrac{D_{t_N}}{t_N} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \mathbb{E}(D_1) = \lambda$ p.s.

d'où le résultat. □

III File $M(\lambda)/M(\mu)/1/N$

Le système dispose d'une salle d'attente de capacité $(N-1)$. Le système ~~ne~~ peut donc contenir pas plus de N personnes (en comptant celle qui se fait servir) $\to$ refoulement.

1) <u>Modèle</u> : $(Q_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ processus de naissance-mort sur $E = \{0, 1, \dots, N\}$, $\begin{cases} \lambda_j = \begin{cases} 0 & \text{si } j = N \\ \lambda & \text{si } 0 \leq j < N \end{cases} \\ \mu_j = \begin{cases} \mu & \text{si } 1 \leq j \leq N \\ 0 & \text{si } j = 0 \end{cases} \end{cases}$

Générateur : $A = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & & \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & & \\ 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda \\ & & & 0 & \mu & -\mu \end{pmatrix}$

2) Etat stationnaire

Proposition :
$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Si } \rho \neq 1 : p_{ij}(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} \pi_j = \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} \rho^j , \quad 0 \leq j \leq N . \\ \text{Si } \rho = 1 : p_{ij}(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} \pi_j = \dfrac{1}{N+1} , \quad 0 \leq j \leq N . \end{array}}$$

Démonstration : $\pi A = 0 \iff \begin{cases} -\lambda \pi_0 + \mu \pi_1 = 0 \\ \lambda \pi_{j-1} - (\lambda+\mu)\pi_j + \mu \pi_{j+1} = 0, \quad 1 \leq j \leq N-1 \\ \lambda \pi_{N-1} - \mu \pi_N = 0 \end{cases}$

Solution : $\pi_j - \pi_{j-1} = \rho(\pi_{j-1} - \pi_{j-2}) = \cdots = \pi_0 \rho^{j-1}(\rho-1)$ et $\pi_N = \rho \pi_{N-1}$

$$\Rightarrow \pi_j = \pi_0 \left[1 + (\rho-1) + (\rho^2-\rho) + \cdots + (\rho^j - \rho^{j-1})\right] = \pi_0 \rho^j \quad 0 \leq j \leq N$$

$$\sum_{j=0}^{N} \pi_j = 1 \Rightarrow \pi_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} . \quad \square$$

(Q_t) est une chaîne de Markov irréductible sur un espace fini, elle est donc ergodique.

3) En régime stationnaire

- Probabilité de trouver la queue vide : $\pi_0 = \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}$, queue pleine : $\pi_N = \dfrac{(1-\rho)\rho^N}{1-\rho^{N+1}}$.
- Temps d'attente : $F_{\tilde{W}_\infty}(t) = \sum_{n=0}^{N} \pi_n \underbrace{\mathbb{P}(\tilde{W}_\infty < t \mid Q_\infty = n)}_{\text{Erlang}}$ → difficile à écrire car somme finie

Voir suite p. 8 bis.

IV File $M(\lambda)/M(\mu)/n_0$

1) Modèle :

$(Q_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est un processus de naissance - mort, $\begin{cases} \lambda_j = \lambda, \ j \geq 0 \\ \mu_j = (j \wedge n_0)\mu, \ j \geq 0 \end{cases}$

car jusqu'à l'arrivée du $(n_0-1)^e$ client, il y a des serveurs inactifs, à partir du n^e client, tous les serveurs sont actifs.

Appliquons le critère de Karlin - McGregor : $\tilde{\pi}_j = \dfrac{\lambda_0 \cdots \lambda_{j-1}}{\mu_1 \cdots \mu_j} = \begin{cases} \dfrac{\lambda^j}{j!\mu^j} & \text{si } j < n_0 \\ \dfrac{n_0^{n_0}}{n_0!} \left(\dfrac{\lambda}{n_0 \mu}\right)^j & \text{si } j \geq n_0 \end{cases}$

On a $\begin{cases} \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{\pi}_j < \infty \iff \lambda < n_0 \mu \iff \rho < n_0 \\ \sum_{j=0}^{\infty} \dfrac{1}{\lambda_j \tilde{\pi}_j} = \infty \iff \lambda \leq n_0\mu \iff \rho \leq n_0 \end{cases}$ (toujours avec $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$)

Ainsi :

si $\rho < n_0$, la chaîne est ergodique
si $\rho = n_0$, la chaîne est récurrente nulle
si $\rho > n_0$, la chaîne est transitoire

2) <u>Etat stationnaire</u> on suppose $\rho < n_0$.

On a $$p_{ij}(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} \pi_j = \begin{cases} \pi_0 \dfrac{\rho^j}{j!} & , j < n_0 \\ \pi_0 \dfrac{n_0^{n_0}}{n_0!}\left(\dfrac{\rho}{n_0}\right)^j & , j \geq n_0 \end{cases}$$

avec $$\pi_0^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{\pi}_j = \sum_{j=0}^{n_0-1} \frac{\rho^j}{j!} + \frac{n_0^{n_0}}{n_0!} \sum_{j=n_0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{n_0}\right)^j = \sum_{j=0}^{n_0-1} \frac{\rho^j}{j!} + \frac{\rho^{n_0}}{n_0!(1-\frac{\rho}{n_0})}.$$

3) <u>En régime stationnaire</u>

Soit N_t le nombre de serveurs occupés à l'instant t.

- Probabilité que tous les serveurs soient occupés : $\mathbb{P}(N_\infty = n_0) = \mathbb{P}(Q_\infty \geq n_0) = \sum_{j=n_0}^{\infty} \pi_j$

→ formule d'Erlang (1917) : $$\boxed{\mathbb{P}(N_\infty = n_0) = \frac{\pi_0 \rho^{n_0}}{n_0!(1-\frac{\rho}{n_0})}}$$

- Nombre moyen de serveurs occupés : $$\begin{aligned} E(N_\infty) &= \sum_{j=0}^{n_0} j\,\mathbb{P}(Q_\infty = j) + n_0\,\mathbb{P}(Q_\infty > n_0) \\ &= \sum_{j=0}^{n_0} \pi_0\, j \frac{\rho^j}{j!} + n_0 \sum_{j=n_0+1}^{\infty} \pi_0 \frac{n_0^{n_0}}{n_0!}\left(\frac{\rho}{n_0}\right)^j \\ &= \rho \sum_{j=0}^{n_0-1} \pi_0 \frac{\rho^j}{j!} + \rho \sum_{j=n_0}^{\infty} \pi_0 \frac{n_0^{n_0}}{n_0!}\left(\frac{\rho}{n_0}\right)^j = \rho \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j \end{aligned}$$

→ $\boxed{\mathbb{E}(N_\infty) = \rho}$

- Longueur moyenne de la queue : $$\begin{aligned} \mathbb{E}(Q_\infty) &= \sum_{j=0}^{\infty} j\,\mathbb{P}(Q_\infty = j) = E(N_\infty) + \sum_{j=n_0+1}^{\infty} (j-n_0)\,\mathbb{P}(Q_\infty = j) \\ &= \rho + \pi_0 \frac{\rho^{n_0}}{n_0!} \sum_{j=n_0+1}^{\infty} (j-n_0)\left(\frac{\rho}{n_0}\right)^{j-n_0} \\ &= \rho + \pi_0 \frac{\rho^{n_0}}{n_0!} \frac{\rho}{n_0} \underbrace{\sum_{j=1}^{\infty} j\left(\frac{\rho}{n_0}\right)^{j-1}}_{1/(1-\frac{\rho}{n_0})^2} \end{aligned}$$

→ $$\boxed{\mathbb{E}(Q_\infty) = \rho + \pi_0 \frac{\rho^{n_0+1}}{(n_0-1)!(n_0-\rho)^2}}$$

Si $\frac{\rho}{n_0} = 1-\varepsilon$, $\pi_0 \underset{\varepsilon\to 0^+}{\sim} \frac{n_0!}{n_0^{n_0}}\varepsilon$ et $E(Q_\infty) \underset{\varepsilon\to 0^+}{\sim} \frac{1}{\varepsilon}$.

En effet : $$\frac{1}{\pi_0} = \sum_{j=0}^{n_0-1} \frac{\rho^j}{j!} + \frac{\rho^{n_0}}{n_0!\,\varepsilon} \underset{\varepsilon\to 0^+}{\sim} \frac{n_0^{n_0}}{n_0!\,\varepsilon}$$

et alors $$\mathbb{E}(Q_\infty) \underset{\varepsilon\to 0^+}{\sim} \frac{\varepsilon . n_0!}{n_0^{n_0}} \frac{n_0^{n_0+1}}{(n_0-1)!\, n_0^2 \varepsilon^2} = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Nombre de clients en attente de service : $\tilde{Q}_\infty = (Q_\infty - n_0)^+ \Rightarrow \mathbb{E}(\tilde{Q}_\infty) = \mathbb{E}[(Q_\infty - n_0)\mathbb{1}_{\{Q_\infty \geq n_0\}}]$

$$= \sum_{n \geq n_0} n\pi_n - n_0\,\mathbb{P}(Q_\infty \geq n_0) = \mathbb{E}(Q_\infty) - \sum_{n=0}^{n_0-1} n\pi_n - \frac{\pi_0 \rho^{n_0}}{(n_0-1)!(1-\frac{\rho}{n_0})}$$

d'où $$\begin{aligned} \mathbb{E}(Q_\infty) - \mathbb{E}(\tilde{Q}_\infty) &= \pi_0 \left[\sum_{j=1}^{n_0-1} \frac{\rho^j}{(j-1)!} + \frac{\rho^{n_0}}{(n_0-1)!(1-\frac{\rho}{n_0})}\right] = \pi_0 \rho \left[\sum_{j=0}^{n_0-2} \frac{\rho^j}{j!} + \frac{\rho^{n_0-1}}{(n_0-1)!(1-\frac{\rho}{n_0})}\right] \\ &= \pi_0 \rho \left(\sum_{j=0}^{n_0-1} \frac{\rho^j}{j!} + \frac{\rho^{n_0}}{n_0!(1-\frac{\rho}{n_0})}\right) = \rho. \end{aligned}$$

or $\frac{1}{1-\frac{\rho}{n_0}} = 1 + \frac{\rho/n_0}{1-\rho/n_0}$

• Temps d'attente. Remarque préliminaire : si un client arrivant à l'instant t trouve $Q_t = n < n_0$ personnes devant lui, il reste au moins un serveur disponible et alors $W_t = 0$. Sinon $Q_t = n \geq n_0$, le service est dans ce cas équivalent à celui d'un serveur de service exponentiel $\tilde{S} = \min(S_1, \dots, S_{n_0})$ qui a pour loi $\mathcal{E}(n_0\mu)$; et alors $\tilde{V}_t = \tilde{S}_1 + \dots + \tilde{S}_{n-n_0+1}$ (en toute rigueur S_1^* au lieu de $S_1 \dots$)

En résumé $\tilde{V}_t = \sum_{i=1}^{Q_t - n_0 + 1} \tilde{S}_i$ avec $\sum_{i=a}^{b} = 0$ si $b < a$.

Fonction de répartition de $\tilde{W}_\infty = \tilde{V}_\infty$:

$$F_{\tilde{W}_\infty}(t) = \mathbb{P}(\tilde{W}_\infty \leq t) = \mathbb{P}(\tilde{W}_\infty = 0) + \sum_{n=1 \text{ ou } n_0}^{\infty} \mathbb{P}(0 < \tilde{W}_\infty \leq t \mid Q_\infty = n)\,\mathbb{P}(Q_\infty = n)$$

$$= \mathbb{P}(Q_\infty < n_0) + \sum_{n=0}^{\infty} \pi_{n+n_0} \underbrace{F_{(\tilde{W}_\infty \mid Q_\infty = n+n_0)}(t)}_{\text{Erlang } \Gamma(n+1,\, n_0\mu)}$$

$$= (1-\alpha) + \pi_0 \frac{\rho^{n_0}}{n_0!} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{n_0}\right)^n \int_0^t \frac{(n_0\mu)^{n+1}}{n!} s^n e^{-n_0\mu s}\, ds \quad , \quad \alpha = \frac{\pi_0 \rho^{n_0}}{n_0!\,(1-\frac{\rho}{n_0})} = \mathbb{P}(N_\infty = n_0)$$

$$= (1-\alpha) + \pi_0 \frac{\rho^{n_0}}{n_0!} n_0\mu \int_0^t \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\rho\mu s)^n}{n!}}_{e^{\rho\mu s}} e^{-n_0\mu s}\, ds$$

$$= (1-\alpha) + \alpha\left[1 - e^{-(n_0 - \rho)\mu t}\right]$$

$\longrightarrow$ $\tilde{W}_\infty$: $\mathcal{E}(n_0\mu - \lambda)$ pondérée en 0 $\quad \boxed{(\tilde{W}_\infty \mid \tilde{W}_\infty > 0) : \mathcal{E}(n_0\mu - \lambda)}$

On a $\mathbb{E}(\tilde{W}_\infty) = \dfrac{\alpha}{n_0\mu - \lambda} = \dfrac{\pi_0 \, \rho^{n_0}}{n_0 . n_0! (1-\frac{\rho}{n_0})^2 \mu}$

$$\mathbb{E}(Q_\infty) = \rho + \frac{\pi_0 \, \rho^{n_0+1}}{n_0 . n_0!\,(1-\frac{\rho}{n_0})^2} = \rho\left[1 + \frac{\pi_0 \rho^{n_0}}{n_0 . n_0!\,(1-\frac{\rho}{n_0})^2}\right]$$

On a $\mathbb{E}(W_\infty) = \dfrac{1}{\mu}\left[1 + \dfrac{\pi_0 \rho^{n_0}}{n_0 . n_0!\,(1-\frac{\rho}{n_0})^2}\right] = \dfrac{1}{\lambda}\mathbb{E}(Q_\infty)$ d'où la formule de Little :

$$\boxed{\mathbb{E}(Q_\infty) = \lambda\, \mathbb{E}(W_\infty)}$$

Cas limite :

File $M(\lambda)/M(\mu)/\infty$

Il y a une infinité de serveurs $\rightarrow$ pas d'attente.

modèle : $\begin{cases} \lambda_j = \lambda , & j \geq 0 \\ \mu_j = \mu j , & j \geq 0 \end{cases}$ $\rightarrow$ chaîne ergodique pour tout $\lambda, \mu > 0$ et $p_{ij}(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} \pi_j = e^{-\rho}\dfrac{\rho^j}{j!}$

donc $\boxed{Q_\infty : \mathcal{P}(\rho)}$

Probabilité de trouver une queue vide : $\mathbb{P}(Q_\infty = 0) = \pi_0 = \boxed{e^{-\rho}}$

Longueur moyenne de la queue : $\boxed{\mathbb{E}(Q_\infty) = \rho}$.

Cas limité :

File $M(\lambda)/M(\mu)/n_0/n_0$

Il s'agit d'une file servie par n_0 guichets avec rejet dès que tous les serveurs sont occupés.

Modèle : $(Q_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ chaîne de Markov sur $E=\{0,1,\dots,n_0\}$, $\begin{cases} \lambda_j = \begin{cases}\lambda & \text{si } j<n_0 \\ 0 & \text{si } j=n_0\end{cases} \\ \mu_j = \mu j \text{ si } j\leq n_0 \end{cases}$

Cette chaîne est irréductible sur E fini $\Rightarrow$ ergodique pour tous $\lambda,\mu>0$.

On a $p_{ij}(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \pi_j = \pi_0 \dfrac{\rho^j}{j!}$, $j\leq n_0$ avec $\pi_0^{-1} = \sum_{k=0}^{n_0} \dfrac{\rho^k}{k!}$

Formule d'Erlang : $\boxed{\pi_{n_0} = \dfrac{\rho^{n_0}}{n_0!\left(1+\rho+\frac{\rho^2}{2!}+\dots+\frac{\rho^{n_0}}{n_0!}\right)}}$ $\to$ c'est la probabilité que tous les serveurs soient occupés ou encore qu'un commutateur téléphonique qui possède n_0 joncteurs rejettent des appels.

Généralisation :

File $M(\lambda)/M(\mu)/n_0/m_0/K$ $\quad n_0\leq m_0\leq K$

File comportant n_0 guichets, d'une capacité de m_0 clients provenant d'une population d'effectif K.

Modèle : $E=\{0,1,\dots,m_0\}$, $\begin{cases} \lambda_j = \begin{cases}\lambda(K-j) & \text{si } 0\leq j<m_0 \\ 0 & \text{si } j=m_0\end{cases} \\ \mu_j = \mu(j\wedge n_0) \text{ si } j\leq m_0 \end{cases}$ chaîne ergodique

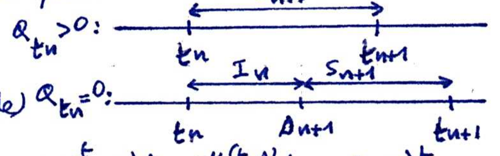
$$\pi_j = \begin{cases} \pi_0 \prod_{k=0}^{j-1} \dfrac{\lambda(K-k)}{\mu(k+1)} = \pi_0\, C_K^j \rho^j & \text{si } 0\leq j\leq n_0 \\ \pi_0 \prod_{k=0}^{n_0-1} \dfrac{\lambda(K-k)}{\mu(k+1)} \prod_{k=n_0}^{j-1} \dfrac{\lambda(K-k)}{\mu n_0} = \pi_0\, C_K^j \dfrac{j!\, n_0^{n_0}}{n_0!}\left(\dfrac{\rho}{n_0}\right)^j & \text{si } n_0<j\leq m_0 \end{cases}$$

Cas particuliers :

- $m_0=n_0$: $\pi_j = \dfrac{C_K^j \rho^j}{\sum_{k=0}^{n_0} C_K^k \rho^k}$, $j\leq n_0$
- $n_0=1$, $m_0=K$: $\pi_j = \dfrac{\frac{K!}{(K-j)!}\rho^j}{\sum_{k=0}^{K} \frac{K!}{(K-k)!}\rho^k}$, $j\leq K$ (loi d'Engset)

Complément à la file $M(\lambda)/M(\mu)/1$: processus des sorties en régime stationnaire

$T_n = t_{n+1}-t_n$ est le laps de temps séparant les départs des n^e et $(n+1)^e$ personnes.



On a $T_n = \begin{cases} S_{n+1} & \text{si } Q_{t_n}>0 \text{ (temps de service de la } (n+1)^e \text{ personne)} \\ I_n+S_{n+1} & \text{si } Q_{t_n}=0 \text{ (} I_n \text{ : période d'inactivité du serveur après la } n^e \text{ personne si la queue est vide)} \end{cases}$

I_n est le temps d'attente d'une arrivée $\Rightarrow (I_n | Q_{t_n}=0) \sim \mathcal{E}(\lambda)$

$f_{T_n}(t) = \mathbb{P}(Q_{t_n}>0) f_{S_{n+1}}(t) + \mathbb{P}(Q_{t_n}=0)(f_{I_n} * f_{S_{n+1}})(t) = \rho\cdot\mu e^{-\mu t} + (1-\rho)\int_0^t \lambda e^{-\lambda s}\mu e^{-\mu(t-s)}\,ds = \lambda e^{-\lambda t}$

ou encore avec les transformées de Laplace : $L_T(s) = (1-\pi_0)L_S(s) + \pi_0 L_I(s) L_S(s) = \dfrac{\lambda+(1-\pi_0)s}{\lambda+s} L_S(s)$ (valable pour $M/G/1$)

$\Rightarrow T_n : \mathcal{E}(\lambda)$. En fait $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est i.i.d. (théorème de P. J. Burke 1956) et le processus des sorties est un processus de Poisson d'intensité λ.

Suite de la file $M(\lambda)/M(\mu)/1/N$

3) <u>En régime stationnaire</u>

- Longueur moyenne de la queue : $E(Q_\infty) = \sum_{j=0}^{N} j\pi_j = \begin{cases} \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} \sum_{j=0}^{N} j\rho^j & \text{si } \rho \neq 1 \\ \dfrac{1}{N+1} \sum_{j=0}^{N} j & \text{si } \rho = 1 \end{cases}$

soit $\boxed{E(Q_\infty) = \begin{cases} \dfrac{\rho\left[1-(N+1)\rho^N + N\rho^{N+1}\right]}{(1-\rho^{N+1})(1-\rho)} & \text{si } \rho \neq 1 \\ \dfrac{N}{2} & \text{si } \rho = 1 \end{cases}}$

- Nombre moyen de clients en attente : $E(\tilde{Q}_\infty) = E\left[(Q_\infty - 1)^+\right] = E(Q_\infty) - P(Q_\infty \geq 1)$

$$= \begin{cases} \dfrac{\rho(1-(N+1)\rho^N + N\rho^{N+1})}{(1-\rho^{N+1})(1-\rho)} - \dfrac{\rho-\rho^{N+1}}{1-\rho^{N+1}} \\ \dfrac{N}{2} - \dfrac{N}{N+1} \end{cases}$$

soit $\boxed{E(\tilde{Q}_\infty) = \begin{cases} \dfrac{\rho^2\left[1-N\rho^{N-1} + (N-1)\rho^N\right]}{(1-\rho^{N+1})(1-\rho)} & \text{si } \rho \neq 1 \\ \dfrac{N(N-1)}{2(N+1)} & \text{si } \rho = 1 \end{cases}}$

- Temps d'attente moyen : $E(\tilde{W}_\infty) = \sum_{n=0}^{N} \underbrace{E(\tilde{W}_\infty \mid Q_\infty = n)}_{\begin{cases} \frac{n}{\mu} & \text{si } n<N \text{ car il y a } n \text{ personnes à servir} \\ 0 & \text{si } n=N \text{ car rejet} \end{cases}} P(Q_\infty = n) = \dfrac{1}{\mu} \sum_{n=0}^{N-1} n\pi_n$

$$= \frac{1}{\mu}\left[E(Q_\infty) - N\pi_N\right] = \begin{cases} \dfrac{1}{\mu}\left[\dfrac{\rho\left[1-(N+1)\rho^N + N\rho^{N+1}\right]}{(1-\rho^{N+1})(1-\rho)} - \dfrac{N(1-\rho)\rho^N}{1-\rho^{N+1}}\right] & \text{si } \rho \neq 1 \\ \dfrac{1}{\mu}\left[\dfrac{N}{2} - \dfrac{N}{N+1}\right] & \text{si } \rho = 1 \end{cases}$$

soit $\boxed{E(\tilde{W}_\infty) = \begin{cases} \dfrac{\rho\left[1-N\rho^{N-1} + (N-1)\rho^N\right]}{\mu(1-\rho^{N+1})(1-\rho)} & \text{si } \rho \neq 1 \\ \dfrac{N(N-1)}{2\mu(N+1)} & \text{si } \rho = 1 \end{cases}}$

- Temps de séjour moyen : $E(W_\infty) = \sum_{n=0}^{N} \underbrace{E(W_\infty \mid Q_\infty = n)}_{\begin{cases} \frac{n+1}{\mu} & \text{si } n<N \\ 0 & \text{si } n=N \end{cases}} P(Q_\infty = n) = \dfrac{1}{\mu} \sum_{n=0}^{N-1} (n+1)\pi_n$

$$= E(\tilde{W}_\infty) + \frac{1}{\mu}(1-\pi_N) \quad \text{avec} \quad 1-\pi_N = \begin{cases} \dfrac{1-\rho^N}{1-\rho^{N+1}} & \text{si } \rho \neq 1 \\ \dfrac{N}{N+1} & \text{si } \rho = 1 \end{cases}$$

soit $\boxed{E(W_\infty) = \begin{cases} \dfrac{1-(N+1)\rho^N + N\rho^{N+1}}{\mu(1-\rho^{N+1})(1-\rho)} & \text{si } \rho \neq 1 \\ \dfrac{N}{2\mu} & \text{si } \rho = 1 \end{cases}}$

- Formules de Little : $\boxed{E(\tilde{Q}_\infty) = \lambda E(\tilde{W}_\infty) \text{ et } E(Q_\infty) = \lambda E(W_\infty)}$ (vérifications immédiates)

V File $M(\lambda)/GI/1$

Données : Q_t : nombre de clients dans le système ;
S_n : temps de service du n^e client, $(S_n)_{n\geq 1}$ iid, de loi commune S ;
t_n : date de départ du n^e client.

Alors Q_{t_n} est le nombre de clients que laisse derrière lui le n^e à son départ $(= Q_{t_n^+})$

Etude de la suite $(Q_{t_n})_{n\in\mathbb{N}^*}$.

si $Q_{t_n} > 0$, le $(n+1)^e$ client commence son service juste après t_n. Son service dure S_{n+1}, temps pendant lequel arrivent N_{n+1} autres personnes.
Donc le $(n+1)^e$ client laisse $Q_{t_n} + N_{n+1} - 1$ clients après son départ.

si $Q_{t_n} = 0$, le serveur doit attendre le $(n+1)^e$ client. Quand celui-là a fini son service, il laisse N_{n+1} personnes après son départ.

d'où $\boxed{Q_{t_{n+1}} = N_{n+1} + (Q_{t_n} - 1)^+}$ (formule valable pour $G/G/1$)

L_n ne dépend que de S_{n+1} et est indépendant de Q_{t_n} donc (N_n) est iid

$\Rightarrow (Q_{t_n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une chaîne de Markov

Proposition : La chaîne $(Q_{t_n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ a pour matrice de transition $P = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \cdots \\ b_0 & b_1 & b_2 & \cdots \\ 0 & b_0 & b_1 & \ddots \\ 0 & 0 & b_0 & \ddots \\ \vdots & \vdots & & \end{bmatrix}$
où $b_j = \mathbb{E}\left(\frac{(\lambda S)^j}{j!} e^{-\lambda S}\right) = \mathbb{P}(N = j)$

Démonstration : $p_{0j} = \mathbb{P}(Q_{t_{n+1}} = j \mid Q_{t_n} = 0) = \mathbb{P}(N_{n+1} = j \mid Q_{t_n} = 0) = \mathbb{P}(N_{n+1} = j)$ par indépendance

$= \mathbb{E}[\mathbb{P}(N_{n+1} = j \mid S_{n+1})] = \mathbb{E}[\mathbb{P}(j \text{ personnes arrivent pendant le temps } S_{n+1})]$

$= \mathbb{E}\left[e^{-\lambda S}\frac{(\lambda S)^j}{j!}\right] = b_j$ $\quad\downarrow$ arrivées poissoniennes

si $i \geq 1$, $p_{ij} = \mathbb{P}(Q_{t_{n+1}} = j \mid Q_{t_n} = i) = \mathbb{P}(N_{n+1} = j - i + 1 \mid Q_{t_n} = i) = \mathbb{E}[\mathbb{P}(N_{n+1} = j-i+1 \mid S_{n+1})]$

$= \begin{cases} b_{j-i+1} \geq 0 & \text{si } j-i+1 \geq 0 \\ 0 & \text{si } j-i+1 < 0 \end{cases}$. $\square$

Remarque : on a $\mathbb{E}(N_n) = \sum_{j=0}^{\infty} j b_j = \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{\infty} j e^{-\lambda S}\frac{(\lambda S)^j}{j!}\right] = \mathbb{E}(\lambda S) = \lambda\,\mathbb{E}(S) = \rho$.

Longueur moyenne à l'état stationnaire

Théorème : Soit $\rho = \lambda\, \mathbb{E}(S)$ l'intensité du trafic.

1) si $\rho < 1$: $(Q_{t_n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est ergodique de loi stationnaire π dont la fonction génératrice est donnée par la formule de Pollaczek-Khintchine :

$$G_{Q_\infty}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j z^j = (1-\rho)(z-1)\frac{L_S(\lambda(1-z))}{z - L_S(\lambda(1-z))}, \quad \text{où } L_S(z) = \mathbb{E}(e^{-zS}).$$

Et alors $(Q_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est aussi ergodique de même limite.

2) si $\rho = 1$, $(Q_{t_n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est récurrente nulle.

3) si $\rho > 1$, $(Q_{t_n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est transitoire et $\lim_{n\to+\infty} Q_{t_n} = +\infty$ p.s.

Démonstration: $(Q_{t_n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est irréductible apériodique. On cherche une solution de $\pi = \pi P$ avec $\forall j\in\mathbb{N}, \pi_j > 0$.

- $\pi_j = \pi_0 b_j + \sum_{i=1}^{j+1} \pi_i b_{j-i+1}$, $j \geq 0 \longrightarrow$ équation de convolution $\pi_j = \pi_0 b_j + \underbrace{\sum_{i=0}^{j} \pi_{i+1} b_{j-i}}_{\pi_{1+\cdot} * b}$

  $\Rightarrow$ la solution est entièrement déterminée à partir de π_0.

  et $G(\pi_{1+\cdot})(z) = \dfrac{G(z) - \pi_0}{z}$

- On a en additionnant les équations $\pi_{n+1} b_0 = \pi_0 c_n + \sum_{i=1}^{n} \pi_i c_{n-i+1}$ où $c_n = 1 - b_0 - \cdots - b_n > 0$. Ainsi si $\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_n > 0$ alors $\pi_{n+1} > 0$.

  D'où $\forall n\in\mathbb{N}, \pi_n > 0$ dès que $\pi_0 > 0$.

- Posons $B(z) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j z^j = \mathbb{E}\left[\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda z S)^j}{j!} e^{-\lambda S}\right] = \mathbb{E}\left[e^{-\lambda(1-z)S}\right] = L_S(\lambda(1-z))$

  On a donc $G(z) = \pi_0 B(z) + \dfrac{G(z) - \pi_0}{z} \Rightarrow G(z) = \pi_0 \dfrac{(z-1)B(z)}{z - B(z)}$.

  Méthode directe : $Q_{t_{n+1}} = (Q_{t_n} - 1)^+ + N_{n+1} \Rightarrow G(z) = G_{L_\infty}(z)\, \mathbb{E}\left[z^{(Q_{t_\infty}-1)^+}\right] = B(z)\left\{\mathbb{E}\left[z^{Q_{t_\infty}-1}, Q_{t_\infty} > 0\right] + \mathbb{P}(Q_{t_\infty} = 0)\right\}$

  $= B(z)\left[\frac{1}{z}(G(z) - \pi_0) + \pi_0\right]$.

  Déterminons π_0.

  $$1 = \lim_{z\to 1^-} G(z) = \pi_0 \underbrace{B(1)}_{1} \lim_{z\to 1^-} \frac{z-1}{z - B(z)} = \frac{\pi_0}{1 - B'(1)} \Rightarrow \pi_0 = 1 - B'(1)$$

  or $B'(z) = \lambda\, \mathbb{E}[S e^{\lambda(z-1)S}] \Rightarrow B'(1) = \lambda\, \mathbb{E}(S) = \rho \Rightarrow \pi_0 = 1 - \rho$.

  $\pi_0 > 0 \iff \rho < 1$. Donc si $\rho \geq 1$ la chaîne n'est pas ergodique.

Cas transitoire : $Q_{t_{n+1}} = N_{n+1} + (Q_{t_n} - 1)^+ \geq N_{n+1} + Q_{t_n} - 1 \Rightarrow Q_{t_n} \geq Q_{t_0} + \sum_{k=1}^{n} N_k - n$

$$\geq n\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} N_k - 1\right]$$

Ainsi, si $\rho = \mathbb{E}(N_1) > 1$ d'après la loi des grands nombres $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} N_k \xrightarrow[n\to\infty]{} \rho > 1$ p.s.

d'où $Q_{t_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ p.s. (le cas récurrent nul peut se traiter avec Foster) $\square$

Corollaire : $\boxed{\text{Si } \rho<1,\ \mathbb{E}(Q_\infty) = \rho + \dfrac{\lambda^2 \mathbb{E}(S^2)}{2(1-\rho)} = \rho + \dfrac{\rho^2}{1-\rho}\,\dfrac{1+k_S^2}{2} \text{ avec } k_S^2 = CV(S) = \dfrac{var(S)}{[\mathbb{E}(S)]^2}}$

Démonstration : $E(Q_\infty) = G'_{Q_\infty}(1)$

$$\text{or } G_{Q_\infty}(h+1) = (1-\rho)\,h \times \frac{1+\lambda h E(S)+o(h)}{(1-\rho)h - \frac{\lambda^2 h^2}{2}E(S^2)+o(h)} = \frac{1+\lambda h E(S)+o(h)}{1-\frac{\lambda^2 h}{2(1-\rho)}E(S^2)+o(h)}$$

$$= 1 + \left(\lambda E(S) + \frac{\lambda^2 E(S^2)}{2(1-\rho)}\right)h + o(h)$$

$$\Rightarrow G'_{Q_\infty}(1) = \rho + \frac{\lambda^2 E(S^2)}{2(1-\rho)}. \ \square$$

Remarques : 1) $E(Q_\infty)$ est minimale pour des temps moyens d'arrivées et de services donnés lorsque que le temps de service est déterministe ($E(S^2) = (ES)^2 + var\,S$)

2) On retrouve la file $M(\lambda)/M(\mu)/1$: $G_{Q_\infty}(z) = \dfrac{(1-\rho)(z-1)\mu}{-\lambda z^2+(\lambda+\mu)z-\mu} = \dfrac{\mu-\lambda}{\mu-\lambda z} = \dfrac{1-\rho}{1-\rho z} \Rightarrow \pi : \mathcal{G}(1-\rho)$.

Temps d'attente à l'état stationnaire

Soit $\tilde{W}_n$ le temps d'attente du n^e client. On suppose $\rho<1$.

Théorème : $\boxed{\text{On a } L_{\tilde{W}_\infty}(z) = \dfrac{(1-\rho)z}{\lambda L_S(z)+z-\lambda} \quad \text{où } L_{\tilde{W}_\infty}(z) = \mathbb{E}(e^{-z\tilde{W}_\infty}).}$

Démonstration : Soit un client qui attend un temps $\tilde{W}_\infty$ avant d'être servi, puis est servi durant le temps S_∞. Il part au bout du laps de temps $\tilde{W}_\infty + S_\infty$ laissant derrière lui Q_∞ clients arrivés pendant ce temps.

On a $(Q_\infty \mid \tilde{W}_\infty, S_\infty) : \mathcal{P}(\lambda(\tilde{W}_\infty + S_\infty))$.

$$\Rightarrow \text{d'une part : } E(z^{Q_\infty}) = \mathbb{E}[E(z^{Q_\infty} \mid \tilde{W}_\infty, S_\infty)] = \mathbb{E}[e^{\lambda(\tilde{W}_\infty+S_\infty)(z-1)}]$$

$$= \mathbb{E}[e^{\lambda(z-1)\tilde{W}_\infty}]\,\mathbb{E}[e^{\lambda(z-1)S}]$$

$$= L_{W_\infty}(\lambda(1-z))\,L_S(\lambda(1-z)) \quad (W_\infty, S \text{ indépendants})$$

$$\text{d'autre part : } E(z^{Q_\infty}) = G_{Q_\infty}(z) = (1-\rho)(z-1)\frac{L_S(\lambda(1-z))}{z-L_S(\lambda(1-z))}$$

d'où $L_{\tilde{W}_\infty}(\lambda(1-z)) = \dfrac{(1-\rho)(z-1)}{z-L_S(\lambda(1-z))}$ puis le résultat. $\square$

Corollaire : $\boxed{\mathbb{E}(\tilde{W}_\infty) = \dfrac{\lambda\,\mathbb{E}(S^2)}{2(1-\rho)} = \dfrac{\rho}{1-\rho}\,\dfrac{1+k_S^2}{2}\,E(S)}$

Démonstration :
$$E(\tilde{W}_\infty) = -L'_{\tilde{W}_\infty}(0) = \lambda(1-\rho)\lim_{z\to 0}\frac{1-L_S(z)+zL'_S(z)}{[\lambda L_S(z)+z-\lambda]^2} = \lambda(1-\rho)\lim_{z\to 0}\frac{z L''_S(z)}{2(\lambda L_S+z-\lambda)\underbrace{(1+\lambda L'_S(z))}_{\to 1-\rho}}$$

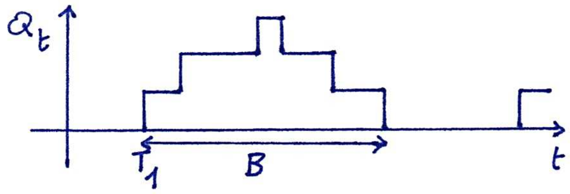
$$= \frac{\lambda}{2} \times L''_S(0)\lim_{z\to 0}\frac{1}{1+\lambda L'_S(z)} = \frac{\lambda\,E(S^2)}{2(1-\rho)}. \ \square$$

Remarque : on retrouve la file $M(\lambda)/M(\mu)/1$: $L_{\tilde{W}_\infty}(z) = \dfrac{(1-\rho)z(\mu+z)}{z^2+(\mu-\lambda)z} = (1-\rho)\dfrac{\mu+z}{(\mu-\lambda)+z} \Rightarrow \tilde{W}_\infty : \mathcal{E}(\mu-\lambda)$ modifiée en 0.

Formule de Little : $\boxed{E(Q_\infty) = \lambda\,\mathbb{E}(W_\infty)}$ (Vérification directe)

Période d'activité

Soit $B = \inf\{t > 0 : Q_{t+T_1} = 0\}$, $\inf \emptyset = +\infty$.



Théorème : $\boxed{\begin{array}{l} \text{On a } L_B(z) = L_S(z + \lambda - \lambda L_B(z)) \text{ où } L_B(z) = \mathbb{E}(e^{-zB}) \\ \text{De plus } \mathbb{P}(B < \infty) \begin{cases} = 1 & \text{si } \rho \leq 1 \\ < 1 & \text{si } \rho > 1 \end{cases} \text{ et } \mathbb{E}(B) = \begin{cases} \frac{\mathbb{E}(S)}{1-\rho} & \text{si } \rho < 1 \\ +\infty & \text{si } \rho \geq 1 \end{cases} \end{array}}$

Démonstration : On définit un processus de branchement comme suit : soit N_n le nombre de clients ayant rejoint la queue pendant que le n^e client se faire servir.

On a $N_n = \text{longueur}(E_n)$ où $E_0 = \{1^{er} \text{ client}\}$

$E_{n+1} = \{\text{descendants des clients de } E_n\}$

les descendants d'un client étant les clients arrivant pendant le service du client.

Alors $\mathbb{P}(B < \infty) = \mathbb{P}\{\exists n \in \mathbb{N} : N_n = 0\}$.

$$E(B) = E(S_1) + \sum_{n=0}^{\infty} E\Big(\sum_{j=0}^{n} B_j 1_{N_1=n}\Big)$$
$$= E(S_1) + \sum_{n=0}^{\infty} E\Big(\sum_{j=0}^{n} (B_j \mid N_1 = n, S_1) \times P(N_1 = n \mid S_1)\Big)$$
$$= E(S_1) + \sum_{n=0}^{\infty} n\, E\Big(B \times \frac{(\lambda S_1)^n}{n!} e^{-\lambda S_1}\Big)$$
$$= E(S_1) + E(B)\, E(\lambda S_1)$$
$$= E(S)[1 + \lambda E(B)]$$

Ecrivons B comme la somme des temps de service de chaque E_n :

$$B = S_1 + \sum_{j=0}^{N_1} B_j, \quad B_0 = 0$$

B_j : temps de service du j^e client de E_1 et de tous ses descendants, $j \geq 1$.

si $\rho < 1$:
$$\mathbb{E}(B) = -L_B'(0)$$
$$= -L_S'(\lambda - \lambda L_B(0))(1 - \lambda L_B'(0))$$
$$= \mathbb{E}(S)[1 + \lambda \mathbb{E}(B)]$$
$$\Rightarrow \mathbb{E}(B) = \frac{\mathbb{E}(S)}{1 - \lambda \mathbb{E}(S)} = \frac{\mathbb{E}(S)}{1 - \rho}$$

Alors
$$L_B(z) = \mathbb{E}(e^{-zB}) = \mathbb{E}\Big[\mathbb{E}\Big(e^{-zS_1} e^{-z\sum_{j=0}^{N_1} B_j} \mid S_1\Big)\Big]$$
$$= \mathbb{E}\Big[\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\Big(e^{-zS_1} e^{-z\sum_{j=0}^{n} B_j} \mid S_1, N_1 = n\Big)\, \mathbb{P}(N_1 = n \mid S_1)\Big]$$
$$= \mathbb{E}\Big[e^{-zS_1} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}(e^{-zB_1})^n \frac{(\lambda S_1)^n}{n!} e^{-\lambda S_1}\Big]$$

car les $(B_j \mid S_1, N_1)$, $1 \leq j \leq N_1$, sont indépendants i.d. et $(N_1 \mid S_1) : \mathcal{P}(\lambda S_1)$.

D'où $L_B(z) = \mathbb{E}\Big[e^{-(z+\lambda)S + \lambda S L_B(z)}\Big] = L_S(z + \lambda - \lambda L_B(z))$. $\square$

Exemple : file $M(\lambda)/M(\mu)/1$: $\lambda L_B(z)^2 - (\lambda + \mu + z) L_B(z) + \mu = 0 \Rightarrow \begin{cases} L_B(z) = \frac{(\lambda+\mu+z) - \sqrt{(\lambda+\mu+z)^2 - 4\lambda\mu}}{2\lambda}. \\ \mathbb{E}(B) = -L_B'(0) = \frac{1}{\mu - \lambda}. \quad \text{var}(B) = (\lambda+\mu)/(\mu-\lambda)^3 \end{cases}$

$f_B(t) = \frac{\sqrt{\mu/\lambda}}{t} e^{-(\lambda+\mu)t} I_1(2t\sqrt{\lambda\mu})$ (cf. p. suiv. 12 bis)

VI File $GI/M(\mu)/1$

Données : Q_t : nombre de clients dans le système ;

S_n : temps de service du n^e client, $(S_n)_{n \geq 1}$ iid de loi $\mathcal{E}(\mu)$;

A_n : date d'arrivée du n^e client ; $T_n = A_{n+1} - A_n$, $(T_n)_{n \geq 1}$ i.i.d. de loi commune T.

Alors $Q_{A_n^-}$ est le nombre de clients dans le système avant l'arrivée du n^e client.

Etude de la suite $(Q_{A_n^-})_{n \in \mathbb{N}^*}$.

On a $\boxed{Q_{A_{n+1}^-} = \left(Q_{A_n^-} + 1 - N_n'\right)^+}$ où N_n' est le nombre de départs du système entre les n^e et $(n+1)^e$ arrivées (i.e. sur $[A_n, A_{n+1}[$)

N_n' dépend de $Q_{A_n^-}$ et $(N_n' \mid Q_{A_n^-}, T_n)$ suit une loi de Poisson tronquée :

$$\mathbb{P}(N_n' = \ell \mid Q_{A_n^-} = q, T_n = t) = \begin{cases} \frac{(\mu t)^\ell}{\ell!} e^{-\mu t} & \text{si } \ell \leq q \\ \sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{(\mu t)^k}{k!} e^{-\mu t} & \text{si } \ell = q+1 \end{cases}$$

($\to$ ℓ départs ayant eu un service $\mathcal{E}(\mu t)$ sur une période durant t) $(Q_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ se comporte entre deux arrivées successives comme un processus de mort pure de taux μ.

suite : p.13 →

Période d'activité : cas de la file M(λ)/M(μ)/1.

$$\lambda L_B(z)^2-(\lambda+\mu+z)L_B(z)+\mu=0 \implies L_B(z)=\frac{(\lambda+\mu+z)-\sqrt{(\lambda+\mu+z)^2-4\lambda\mu}}{2\lambda}$$

Théorème : $\boxed{f_B(t)=\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}\,\frac{1}{t}\,e^{-(\lambda+\mu)t}I_1(2t\sqrt{\lambda\mu})}$

dém : On part de $\int_0^{+\infty}e^{-\alpha t}I_\nu(\beta t)\,dt=\frac{\beta^\nu}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}\left[\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta^2}\right]^\nu}=\frac{\left[\alpha-\sqrt{\alpha^2-\beta^2}\right]^\nu}{\beta^\nu\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}$

$$=\frac{e^{-\nu\,\mathrm{argch}(\alpha/\beta)}}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}\qquad\text{(Gradshteyn \& Ryzhik, p.729)}$$

Pour $\nu=1$: $\int_0^{+\infty}e^{-\alpha t}I_1(\beta t)\,dt=\frac{\alpha-\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}{\beta\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}=\frac{1}{\beta}\left[\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}-1\right]$

On intègre par rapport à α sur $[\gamma,+\infty[$:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}e^{-\gamma t}I_1(\beta t)\frac{dt}{t}&=\int_0^{+\infty}\left[\int_\gamma^{+\infty}e^{-\alpha t}d\alpha\right]I_1(\beta t)\,dt\\&=\int_\gamma^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty}e^{-\alpha t}I_1(\beta t)\,dt\right]d\alpha\\&=\int_\gamma^{+\infty}\frac{1}{\beta}\left[\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}-1\right]d\alpha\\&=\frac{1}{\beta}\left[\sqrt{\alpha^2-\beta^2}-\alpha\right]_\gamma^{+\infty}=\frac{1}{\beta}\left[\gamma-\sqrt{\gamma^2-\beta^2}\right]\end{aligned}$$

d'où $(\lambda+\mu+z)-\sqrt{(\lambda+\mu+z)^2-4\lambda\mu}=2\sqrt{\lambda\mu}\int_0^{+\infty}e^{-(\lambda+\mu+z)t}I_1(2\sqrt{\lambda\mu}\,t)\frac{dt}{t}$

$\implies L_B(z)=\int_0^{+\infty}e^{-zt}f_B(t)\,dt=\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}\int_0^{+\infty}e^{-zt}\times e^{-(\lambda+\mu)t}I_1(2\sqrt{\lambda\mu}\,t)\frac{dt}{t}$

ce qui donne $f_B(t)=\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}\,\frac{1}{t}\,e^{-(\lambda+\mu)t}I_1(2\sqrt{\lambda\mu}\,t)$. □

Corollaire : $\boxed{E(B)=\frac{1}{\mu-\lambda}\text{ et }\mathrm{var}(B)=\frac{\lambda+\mu}{(\mu-\lambda)^3}}$ (pour $\lambda<\mu$)

dém 1 : en dérivant L_B, $E(B)=-L_B'(0)=-\frac{1}{2\lambda}\left(1-\frac{\lambda+\mu}{|\lambda-\mu|}\right)=\frac{1}{\mu-\lambda}$

$E(B^2)=L_B''(0)=\frac{1}{2\lambda}\frac{d}{dz}\left.\frac{\lambda+\mu+z}{\sqrt{(\lambda+\mu+z)^2-4\lambda\mu}}\right|_{z=0}=-\frac{1}{2\lambda}\left[\frac{1}{|\lambda-\mu|}-\frac{(\lambda+\mu)^2}{|\lambda-\mu|^3}\right]=\frac{2\mu}{(\mu-\lambda)^3}$

$\implies\mathrm{var}(B)=\frac{2\mu}{(\mu-\lambda)^3}-\frac{1}{(\mu-\lambda)^2}=\frac{\mu+\lambda}{(\mu-\lambda)^3}$.

dém 2 : en utilisant f_B, $E(B)=\int_0^{+\infty}t f_B(t)\,dt=\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}\int_0^{+\infty}e^{-(\lambda+\mu)t}I_1(2\sqrt{\lambda\mu}\,t)\,dt$

$$=\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}\times\frac{1}{2\sqrt{\lambda\mu}}\left[\frac{\lambda+\mu}{|\lambda-\mu|}-1\right]=\frac{1}{2\lambda}\times\frac{2\lambda}{\mu-\lambda}=\frac{1}{\mu-\lambda}$$

$E(B^2)=\int_0^{+\infty}t^2f_B(t)\,dt=\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}\int_0^{+\infty}t\,e^{-(\lambda+\mu)t}I_1(2\sqrt{\lambda\mu}\,t)\,dt$.

Dérivons par rapport à α : $\int_0^{+\infty}t e^{-\alpha t}I_1(\beta t)\,dt=-\frac{d}{d\alpha}\int_0^{+\infty}e^{-\alpha t}I_1(\beta t)\,dt=-\frac{1}{\beta}\left[\frac{1}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}-\frac{\alpha^2}{(\alpha^2-\beta^2)^{3/2}}\right]$

$$=\frac{\beta}{(\alpha^2-\beta^2)^{3/2}}$$

$\implies E(B^2)=\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}\times\frac{2\sqrt{\lambda\mu}}{|\lambda-\mu|^3}=\frac{2\mu}{(\mu-\lambda)^3}$. □

Proposition : $(Q_{\Delta_n^-})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une chaîne de Markov de matrice de transition

$$P = \begin{bmatrix} 1-\alpha_0 & \alpha_0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1-\alpha_0-\alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_0 & 0 & \cdots \\ 1-\alpha_0-\alpha_1-\alpha_2 & \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & & & & \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad \alpha_j = \mathbb{E}\left[\frac{(\mu T)^j}{j!} e^{-\mu T}\right] = \mathbb{P}(N'_n = j \mid Q_{\Delta_n^-} \geq j)$$

Démonstration :

$$p_{i0} = \mathbb{P}(Q_{\Delta_{n+1}^-} = 0 \mid Q_{\Delta_n^-} = i) = \mathbb{P}(N'_n \geq i+1 \mid Q_{\Delta_n^-} = i)$$

$$= \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(N'_n \geq i+1 \mid Q_{\Delta_n^-} = i, T_n = t)\, f_{T_n}(t)\,dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \left[1 - \sum_{k=0}^{i} \frac{(\mu t)^k}{k!} e^{-\mu t}\right] f_T(t)\,dt = 1 - \alpha_0 - \alpha_1 - \cdots - \alpha_i$$

si $j \geq 1$, $p_{ij} = \mathbb{P}(N'_n = i-j+1 \mid Q_{\Delta_n^-} = i)$

$$= \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(N'_n = i-j+1 \mid Q_{\Delta_n^-} = i, T_n = t)\, f_{T_n}(t)\,dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{(\mu t)^{i-j+1}}{(i-j+1)!} e^{-\mu t} f_T(t)\,dt = \alpha_{i-j+1} \quad \text{si } j \leq i+1$$

$p_{ij} = 0$ si $j \geq i$.

Et alors $\alpha_j = p_{j+k-1,k} = \mathbb{P}(N'_n = j \mid Q_{\Delta_n^-} = j+k-1) \quad \forall k \geq 1$
$= \mathbb{P}(N'_n = j \mid Q_{\Delta_n^-} \geq j)$. □

Remarque : On a $\mathbb{E}(N'_n \mid Q_{\Delta_n^-} \geq N'_n) = \sum_{j=0}^{\infty} j\alpha_j = \mathbb{E}\left[\sum_{j=0}^{\infty} j\, e^{-\mu T} \frac{(\mu T)^j}{j!}\right] = \mathbb{E}(\mu T) = \frac{1}{\rho}$.

Longueur moyenne à l'état stationnaire

Théorème : Soit $\rho = \frac{1}{\mu \mathbb{E}(T)}$ l'intensité du trafic.

1) si $\rho < 1$: $(Q_{\Delta_n^-})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est ergodique de loi stationnaire $\pi_j = (1-\eta)\eta^j$, $j \geq 0$,
où η est la solution sur $]0,1[$ de $\eta = L_T(\mu(1-\eta))$, $L_T(z) = \mathbb{E}(e^{-zT})$.

2) si $\rho = 1$: $(Q_{\Delta_n^-})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est récurrente nulle.

3) si $\rho > 1$: $(Q_{\Delta_n^-})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est transitoire et $\lim_{n\to+\infty} Q_{\Delta_n^-} = +\infty$ p.s.

Démonstration : On résout l'équation $\pi = \pi P$ avec $\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1$, $\pi_j > 0$.

$$\pi = \pi P \iff \begin{cases} \pi_0 = \sum_{i=0}^{\infty} (1-\alpha_0-\alpha_1-\cdots-\alpha_i)\pi_i \\ \pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \pi_{i+j-1}, \quad j \geq 1. \end{cases}$$

On pose $x_0 = 0$ et $x_j = \pi_0 + \pi_1 + \cdots + \pi_{j-1}$, $j \geq 1$.

Pour $j \geq 2$ on a $x_j = \sum_{i=0}^{\infty} (1-\alpha_0-\alpha_1-\cdots-\alpha_i)\pi_i + \sum_{k=1}^{j-1}\left(\sum_{i=0}^{\infty}\alpha_i \pi_{i+k-1}\right)$

$$= \sum_{i=0}^{\infty}(1-\alpha_0-\alpha_1-\cdots-\alpha_i)(x_{i+1}-x_i) + \sum_{i=0}^{\infty}\alpha_i \underbrace{\sum_{k=1}^{j-1}(x_{i+k}-x_{i+k-1})}_{x_{i+j-1}-x_i}$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty}\left[(1-\alpha_0-\alpha_1-\cdots-\alpha_i)x_{i+1} - (1-\alpha_0-\cdots-\alpha_{i-1})x_i + \alpha_i x_{i+j-1}\right]$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty}\alpha_i x_{i+j-1}.$$

Pour $j=1$, $x_1 = \pi_0 = \sum_{i=0}^{\infty}(1-\alpha_0-\alpha_1-\cdots-\alpha_i)(x_{i+1}-x_i) = \sum_{i=0}^{\infty}\left[(1-\alpha_0-\cdots-\alpha_i)x_{i+1} - (1-\alpha_0-\cdots-\alpha_{i-1})x_i + \alpha_i x_i\right]$

$$= \sum_{i=0}^{\infty}\alpha_i x_i.$$

Donc $\forall j \geq 1$, $x_j = \sum_{i=0}^{\infty}\alpha_i x_{i+j-1}$; puis on pose $y_j = 1-x_j$, $j \geq 0$. $(y_0 = 1)$

Comme $\sum_{i=0}^{\infty}\alpha_i = 1$, on a pour $j \geq 1$:

$$y_j = 1-x_j = \sum_{i=0}^{\infty}\alpha_i - \sum_{i=0}^{\infty}\alpha_i x_{i+j-1} = \sum_{i=0}^{\infty}\alpha_i y_{i+j-1},$$

soit :

$$\begin{cases} \alpha_0 y_0 + \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \cdots = y_1 \\ \qquad \alpha_0 y_1 + \alpha_1 y_2 + \cdots = y_2 \\ \qquad\qquad \alpha_0 y_1 + \cdots = y_3 \\ \qquad\qquad\qquad \ddots \qquad \vdots \end{cases}$$

puis $\pi_j = x_{j+1} - x_j = y_j - y_{j+1} = (1-r)r^j$.

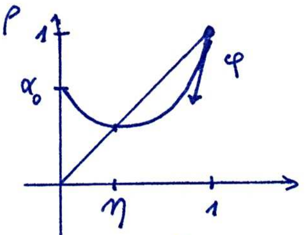
Cherchons une solution de la forme $y_i = r^i$ avec $r \in]0,1[$. On doit avoir

$$\varphi(r) \equiv \alpha_0 + \alpha_1 r + \alpha_2 r^2 + \cdots = r.$$

On a $\varphi(r) = \mathbb{E}\left[\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\mu r T)^j}{j!}e^{-\mu T}\right] = \mathbb{E}\left[e^{\mu(r-1)T}\right] = L_T(\mu(1-r))$.

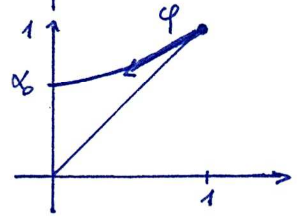
$\varphi'(r) = \alpha_1 + 2\alpha_1 r + \cdots \Rightarrow \varphi'(1) = \sum_{j=1}^{\infty} j\alpha_j = \mathbb{E}(\mu T) = \frac{1}{\rho}$

$\varphi''(r) \geq 0$ pour $r \in [0,1] \Rightarrow \varphi$ convexe



- si $\rho < 1$ on a $\varphi'(1) > 1$ et alors :

r	0	η	1
$\varphi'(r)-1$	$-$		$+$
$\varphi(r)-r$	$\alpha_0 \searrow$	0	$\nearrow 0$



- si $\rho \geq 1$ on a $\varphi'(r) \leq \varphi'(1) \leq 1$ et alors

r	0	1
$\varphi'(r)-1$	$-$	
$\varphi(r)-r$	$\alpha_0 \longrightarrow$	0

Cas transitoire : $Q_{\Delta_{n+1}^-} \geq Q_{\Delta_n^-} + 1 - N'_n \Rightarrow Q_{\Delta_{n+1}^-} \geq Q_{\Delta_1^-} + n - \sum_{k=1}^{n} N'_k \geq n\left(1 - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}N'_k\right)$

puis on conclut à l'aide de la loi des grands nombres. □

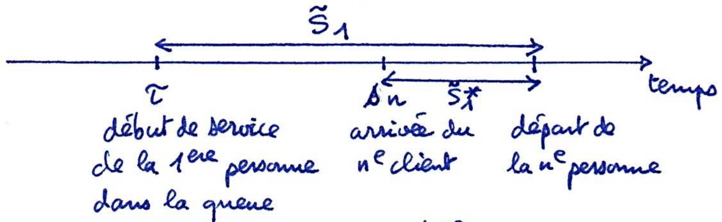
Remarque : on retrouve la file $M(\lambda)/M(\mu)/1$: $\eta = \frac{\lambda}{\lambda-(\eta-1)\mu} \iff \eta = 1$ ou ρ et π : $\mathcal{G}(1-\rho)$.

Corollaire : $\boxed{\text{si } \rho < 1,\ \mathbb{E}(Q_\infty) = \frac{\eta}{1-\eta}}$

Temps d'attente à l'état stationnaire

Soit $\tilde{W}_n$ le temps d'attente du n^e client. On a $\tilde{W}_n = \begin{cases} \tilde{S}_1^* + \tilde{S}_2 + \dots + \tilde{S}_{Q_{s_n^-}} & \text{si } Q_{s_n^-} \geq 1, \\ 0 & \text{si } Q_{s_n^-} = 0 \end{cases}$

$\tilde{S}_2, \dots, \tilde{S}_{Q_{s_n^-}}$ étant les temps de service des clients en attente et $\tilde{S}_1^*$ celui restant du client déjà en train de se faire servir. En fait $\tilde{S}_1^* \overset{\text{loi}}{=} \tilde{S}_1$. En effet, si τ est l'instant de début de service de ce client, on sait qu'à l'instant d'arrivée du n^e, il a déjà ~~eu un service durant~~ $s_n - \tau$. Ainsi $\tilde{S}_1^* = (\tilde{S}_1 - (s_n - \tau) \mid \tilde{S}_1 > s_n - \tau)$.



On a $$P(\tilde{S}_1^* > s) = \frac{P(\tilde{S}_1 - (s_n - \tau) > s)}{P(\tilde{S}_1 > s_n - \tau)} = \frac{\int_0^{+\infty} P(\tilde{S}_1 > s+u)\, f_{s_n - \tau}(u)\, du}{P(\tilde{S}_1 > s_n - \tau)}$$
$$= P(\tilde{S}_1 > s) \frac{\int_0^{+\infty} P(\tilde{S}_1 > u)\, f_{s_n - \tau}(u)\, du}{P(\tilde{S}_1 > s_n - \tau)} \qquad (\tilde{S}_1 : \text{loi exponentielle})$$
$$= P(\tilde{S}_1 > s)$$

d'où $\tilde{S}_1^* = \tilde{S}_1$ et alors $\tilde{W}_n$ suit la loi d'Erlang $\Gamma(m, \mu)$ si $Q_{s_n^-} = m \geq 1$.

* Fonction de répartition de $\tilde{W}_\infty$:

$$F_{\tilde{W}_\infty}(t) = P(\tilde{W}_\infty \leq t) = \underbrace{P(Q_\infty = 0)}_{\pi_0} + \sum_{n=1}^{\infty} P(\tilde{W}_\infty \leq t \mid Q_\infty = n) \underbrace{P(Q_\infty = n)}_{\pi_n}$$
$$= 1 - \eta e^{-\mu(1-\eta)t}, \ t \geq 0 \qquad (\text{analogue au cas de la file } M(\lambda)/M(\mu)/1)$$

* Autre méthode : ~~transformée~~ de Laplace de W_∞

$$L_{\tilde{W}_\infty}(z) = P(Q_\infty = 0) + \sum_{n=1}^{\infty} E(e^{-zS})^n P(Q_\infty = n) = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n \left(\frac{\mu}{\mu+z}\right)^n = G_{Q_\infty}\left(\frac{\mu}{\mu+z}\right)$$

or $Q_\infty : \mathcal{G}(1-\eta)$ donc $G_{Q_\infty}(z) = \frac{1-\eta}{1-\eta z}$, d'où

$$L_{\tilde{W}_\infty}(z) = (1-\eta) \frac{\mu + z}{(1-\eta)\mu + z} \implies \boxed{\tilde{W}_\infty : \mathcal{E}((1-\eta)\mu) \text{ modifiée en } 0, P(\tilde{W}_\infty = 0) = 1-\eta.}$$

On a donc $$\boxed{E(\tilde{W}_\infty) = \frac{\eta}{(1-\eta)\mu} = \frac{\eta}{1-\eta} E(S)}$$

Formule de Little : $\boxed{E(Q_\infty) = \mu E(\tilde{W}_\infty)}$ (vérification directe)

Suite de la file $M/GI/1$

Processus des sorties en régime stationnaire

Soit $\tau_n = t_{n+1} - t_n$ le laps de temps séparant les instants de sortie des n^e et $(n+1)^e$ personnes.

On a $\tau_n = \begin{cases} S_{n+1} \text{ si } Q_{t_n} > 0 \\ S_{n+1} + I_n \text{ si } Q_{t_n} = 0 \end{cases} = S_{n+1} + I_n \mathbb{1}_{\{Q_{t_n}=0\}}$ avec $(I_n \mid Q_{t_n}=0)$ = temps d'attente d'un nouveau client $\to \mathcal{E}(\lambda)$

• $L_{\tau_n}(s) = \mathbb{E}(e^{-s\tau_n}) = L_{S_{n+1}}(s)\left[\mathbb{E}(e^{-sI_n}, Q_{t_n}>0) + \mathbb{P}(Q_{t_n}=0)\right] = \left[\pi_0 \frac{\lambda}{\lambda+s} + (1-\pi_0)\right] L_S(s)$

$$\Rightarrow \boxed{L_\tau(s) = \frac{\lambda + (1-\pi_0)s}{\lambda+s} L_S(s)}$$

• $\operatorname{cov}(\tau_{n-1}, \tau_n) = \operatorname{cov}(S_n + I_{n-1}\mathbb{1}_{\{Q_{t_{n-1}}=0\}}, S_{n+1} + I_n \mathbb{1}_{\{Q_{t_n}=0\}})$

$$= \underbrace{\operatorname{cov}(S_n, S_{n+1})}_{0} + \underbrace{\operatorname{cov}(S_{n+1}, I_{n-1}\mathbb{1}_{\{Q_{t_{n-1}}=0\}})}_{0} + \operatorname{cov}(S_n, I_n \mathbb{1}_{\{Q_{t_n}=0\}}) + \operatorname{cov}(I_{n-1}\mathbb{1}_{\{Q_{t_{n-1}}=0\}}, I_n \mathbb{1}_{\{Q_{t_n}=0\}})$$

$$= \mathbb{E}[S_n I_n \mathbb{1}_{\{Q_{t_n}=0\}}] - \mathbb{E}(S_n)\mathbb{E}[I_n \mathbb{1}_{\{Q_{t_n}=0\}}] + \mathbb{E}[I_{n-1} I_n \mathbb{1}_{\{Q_{t_{n-1}}=Q_{t_n}=0\}}] + [\mathbb{E}(I_n \mathbb{1}_{\{Q_{t_n}=0\}})]^2$$

or $*$ $\mathbb{E}[I_n \mathbb{1}_{\{Q_{t_n}=0\}}] = \mathbb{P}\{Q_{t_n}=0\} \, \mathbb{E}[I_n \mid Q_{t_n}=0] = \frac{\pi_0}{\lambda}$

$*$ $\mathbb{E}[I_{n-1} I_n \mathbb{1}_{\{Q_{t_{n-1}}=Q_{t_n}=0\}}] = \mathbb{P}(Q_{t_{n-1}}=0)\, \mathbb{E}[I_{n-1} I_n \mathbb{1}_{\{Q_{t_n}=0\}} \mid Q_{t_{n-1}}=0]$

$$= \pi_0 \, \mathbb{E}(I_{n-1} \mid Q_{t_{n-1}}=0) \underbrace{\mathbb{E}(I_n \mathbb{1}_{\{Q_{t_n}=0\}} \mid Q_{t_{n-1}}=0)}_{\substack{\mathbb{P}(Q_{t_n}=0 \mid Q_{t_{n-1}}=0)\, \mathbb{E}(I_n \mid Q_{t_{n-1}}=Q_{t_n}=0) \\ = \mathbb{P}(\text{pas d'arrivée pendant } S_n)\, \mathbb{E}(I_n \mid Q_{t_n}=0)}}$$

$$= \frac{\pi_0}{\lambda^2} \mathbb{E}(e^{-\lambda S})$$

$*$ $\mathbb{E}[S_n I_n \mathbb{1}_{\{Q_{t_n}=0\}}] = \mathbb{P}(Q_{t_n}=0)\, \mathbb{E}[S_n I_n \mid Q_{t_n}=0] = \pi_0 \, \mathbb{E}(S_n \mid Q_{t_n}=0)\, \mathbb{E}(I_n \mid Q_{t_n}=0)$

$= \frac{1}{\lambda} \mathbb{E}[S_n \mathbb{1}_{\{Q_{t_n}=0\}}]$, or $Q_{t_n}=0 \Leftrightarrow Q_{t_{n-1}} \in \{0,1\}$ et pas d'arrivée pendant S_n

$$= \frac{1}{\lambda} \mathbb{E}\Big[S_n \mathbb{1}_{\{Q_{t_{n-1}} \in \{0,1\}\}} \underbrace{\mathbb{P}(\text{pas d'arrivée pendant } S_n \mid S_n)}_{e^{-\lambda S_n}}\Big]$$

$$= \frac{1}{\lambda} \mathbb{P}(Q_{t_{n-1}} \le 1)\, \mathbb{E}[S_n e^{-\lambda S_n}]$$

$$= \frac{\pi_0 + \pi_1}{\lambda} \underbrace{\mathbb{E}(S e^{-\lambda S})}_{-L_S'(\lambda)}$$

Comme $G_Q(z) = (1-\rho)\frac{(z-1)L_S(\lambda(1-z))}{z - L_S(\lambda(1-z))}$, $\pi_0 = G_Q(0) = 1-\rho$

$\pi_1 = G_Q'(0) = (1-\rho)\left[-\frac{L_S(\lambda)+\lambda L_S'(\lambda)}{L_S(\lambda)} + \frac{L_S(\lambda)(1+\lambda L_S'(\lambda))}{L_S(\lambda)^2}\right]$

$= \pi_0 \left(\frac{1}{L_S(\lambda)} - 1\right)$

donc $\mathbb{E}[S_n I_n \mathbb{1}_{\{Q_{t_n}=0\}}] = -\frac{\pi_0 L_S'(\lambda)}{\lambda L_S(\lambda)}$.

D'où $\operatorname{cov}(\tau_{n-1}, \tau_n) = \pi_0 \left[-\frac{L_S'(\lambda)}{\lambda L_S(\lambda)} - \frac{\mathbb{E}(S)}{\lambda} + \frac{L_S(\lambda)}{\lambda^2} - \frac{\pi_0}{\lambda^2}\right]$ soit $\operatorname{cov}(\tau_{n-1}, \tau_n) = \frac{\pi_0}{\lambda L_S(\lambda)}\left[-\lambda L_S'(\lambda) + L_S(\lambda)^2 - L_S(\lambda)\right]$

Et alors τ_{n-1}, τ_n non corrélées pour toute file $M(\lambda)/GI/1 \Longleftrightarrow \forall \lambda > 0,\ -\lambda L_S'(\lambda) + L_S(\lambda)^2 - L_S(\lambda) = 0$

Équation de Bernoulli : $\left(\frac{1}{L_S}\right)'(z) = \frac{1}{z}\left(\frac{1}{L_S(z)} - 1\right) \Rightarrow \frac{1}{L_S(z)} - 1 = Cz \Rightarrow L_S(z) = \frac{1}{1+Cz}$,

soit, en posant $C = \frac{1}{\mu}$: $L_S(z) = \frac{\mu}{\mu+z}$ et alors $S : \mathcal{E}(\mu)$. Ainsi, la file $M(\lambda)/M(\mu)/1$ est la seule file $M/G/1$ pour laquelle les temps de sortie sont non corrélés.

VII File GI/GI/1

Rappelons l'équation de Lindley : $\tilde{W}_{n+1} = (\tilde{W}_n + S_n - T_{n+1})^+ = (\tilde{W}_n + U_n)^+$ avec $U_n = S_n - T_{n+1}$.

On a $\tilde{W}_{n+1} = \max(0, \tilde{W}_n + U_n) = \max(0, \max(U_n, U_n + \tilde{W}_{n-1} + U_{n-1})) = \max(0, U_n, \max(U_n + U_{n-1}, U_n + U_{n-1} + \tilde{W}_{n-2} + U_{n-2}))$

$= \cdots = \max(0, U_n, U_n + U_{n-1}, \ldots, U_n + U_{n-1} + \cdots + U_1)$

D'où $\tilde{W}_{n+1} \overset{loi}{\equiv} \max(0, U_1, U_1 + U_2, \ldots, U_1 + \cdots + U_n)$

Posons $\Sigma_0 = 0$, $\Sigma_n = U_1 + \cdots + U_n$ pour $n \geq 1$, $\overline{W}_{n+1} = \max(0, \Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n)$.

Théorème (Lindley 1952) :

> Soit $\rho = \dfrac{E(S)}{E(T)}$ l'intensité du trafic.
>
> - si $\rho < 1$, $\tilde{W}_n \xrightarrow[n \to \infty]{\mathcal{L}} \tilde{W}_\infty$
> - si $\rho > 1$ ou $[\rho = 1$ et $\mathbb{P}(S - T \neq 0) > 0]$, $\overline{W}_n \xrightarrow[n \to \infty]{} +\infty$ p.s.

Démonstration : 1) Pour $t \geq 0$: $F_{\tilde{W}_{n+1}}(t) = \mathbb{P}((\tilde{W}_n + U_n)^+ \leq t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\mathbb{P}((\tilde{W}_n + s)^+ \leq t)}_{\mathbb{P}(\tilde{W}_n \leq t - s) \text{ si } s \leq t, \ 0 \text{ si } s > t} f_{U_n}(s)\,ds$

$= \int_{-\infty}^{t} F_{\tilde{W}_n}(t - s) f_{U_n}(s)\,ds$

$\tilde{W}_1 = 0 \Rightarrow F_{\tilde{W}_1}(t) = 1 \Rightarrow F_{\tilde{W}_2}(t) - F_{\tilde{W}_1}(t) \leq 0$

puis $F_{\tilde{W}_{n+1}}(t) - F_{\tilde{W}_n}(t) \leq \int_{-\infty}^{t} [F_{\tilde{W}_n}(t-s) - F_{\tilde{W}_{n-1}}(t-s)] f_{U_n}(s)\,ds$

Ainsi, par récurrence, $(F_{\tilde{W}_n})_{n \in \mathbb{N}^*} \downarrow$ donc convergente : $\forall t \geq 0$, $F_{\tilde{W}_n}(t) \xrightarrow[n \to \infty]{} F(t)$.

2) La suite de v.a. $(\overline{W}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante, ce qui n'était pas le cas pour $(\tilde{W}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$,

donc convergente : $\overline{W}_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \overline{W}_\infty$, éventuellement $\overline{W}_\infty = +\infty$ avec probabilité > 0.

Comme $F_n(t) = \mathbb{P}(\tilde{W}_n \leq t) = \mathbb{P}(\overline{W}_n \leq t) = \mathbb{P}(\forall k \leq n, \ \Sigma_k \leq t)$ on a $F(t) = \mathbb{P}(\forall n, \Sigma_n \leq t)$

La loi des grands nombres nous enseigne que $\frac{1}{n} \Sigma_n \xrightarrow[n \to \infty]{} E(\Sigma_1) = E(S) - E(T)$ p.s., donc :

- si $E(S) < E(T)$ (i.e. $\rho < 1$) : $\mathbb{P}(\Sigma_n > 0$ pour une infinité de $n)$
  $= \mathbb{P}(\frac{1}{n} \Sigma_n - E(\Sigma_1) > |E(\Sigma_1)|$ pour une infinité de $n)$
  $= 0$

  et alors $\mathbb{P}(\overline{W}_\infty = \max(0, \Sigma_1, \ldots, \Sigma_{n_0})$ pour un $n_0) = 1$, i.e. $\overline{W}_\infty < \infty$ p.s.
  soit encore $F = F_{\tilde{W}_\infty}$: $\tilde{W}_n \xrightarrow[n \to \infty]{\mathcal{L}} \tilde{W}_\infty = \overline{W}_\infty$.

- si $E(S) > E(T)$ (i.e. $\rho > 1$) : $\mathbb{P}(\Sigma_n \geq t) = \mathbb{P}(\frac{1}{n} \Sigma_n - E(\Sigma_1) \geq \frac{t}{n} - E(\Sigma_1))$

  $\geq \mathbb{P}(\frac{1}{n} \Sigma_n - E(\Sigma_1) \geq -\frac{1}{2} E(\Sigma_1))$ si $n \geq \frac{2t}{E(\Sigma_1)}$

  et alors $\mathbb{P}(\Sigma_n \geq t) \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$ et $F(t) = 0$ i.e. $\overline{W}_\infty = +\infty$ p.s.

- si $E(S) = E(T)$ et $\mathbb{P}(S \neq T) > 0$ (i.e. $\rho = 1$ et $var(S - T) > 0$) on peut conclure à l'aide de la loi du logarithme itéré. □

Théorème : (Spitzer 1955)

> $$L(u, z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} L_{\tilde{W}_{n+1}}(z) u^n = \exp\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u^n}{n} L_{(\sum_{k=1}^{n} U_k)^+}(z)\right]$$
> $$L_{\tilde{W}_\infty}(z) = \exp\left[-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left[1 - L_{(\sum_{k=1}^{n} U_k)^+}(z)\right]\right]$$

2^e^ formule : $L_{\tilde{W}_\infty}(z) = \lim_{u \to 1^-} (1-u) L(u,z) = \lim_{u \to 1^-} e^{\ln(1-u)} L(u,z) = \lim_{u \to 1^-} L(u,z) \exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u^n}{n}\right)$.

Temps d'attente moyen en régime stationnaire

Pour étudier les variations de Σ_n on introduit les instants de croissance :

$$\begin{cases} \ell_0 = 0 \\ \ell_{n+1} = \min\{k > \ell_n : \Sigma_k > \Sigma_{\ell_n}\}, \ +\infty \text{ si } \emptyset \end{cases}$$

puis $\Lambda =$ nombre de points de croissance $= \operatorname{card}\{n \in \mathbb{N}^* : \ell_n < +\infty\}$
$=$ dernier instant de croissance $= \max\{n \in \mathbb{N}^* : \ell_n < +\infty\}$

Posons $\eta = \mathbb{P}\{\exists n \in \mathbb{N}^* : \Sigma_n > 0\}$ et $Z_n = \Sigma_{\ell_n} - \Sigma_{\ell_{n-1}}$.

<u>Lemme</u> : $\Lambda : \mathcal{G}(1-\eta)$ i.e. $\mathbb{P}(\Lambda = \ell) = \eta^\ell (1-\eta)$, $\ell \geq 0$ et $\mathbb{E}(\Lambda) = \dfrac{\eta}{1-\eta}$.

<u>Démonstration</u> : en effet $\dfrac{\mathbb{P}(\Lambda \geq \ell+1)}{\mathbb{P}(\Lambda \geq \ell)} = \dfrac{\mathbb{P}(\Lambda \geq \ell)\mathbb{P}(\exists n \in \mathbb{N}^* : \Sigma_n > 0)}{\mathbb{P}(\Lambda \geq \ell)} = \eta$. □

Par ailleurs, $(Z_n)_{0 \leq n \leq \Lambda}$ est i.i.d. de moyenne $\mathbb{E}(Z_1) = \mathbb{E}(\Sigma_{\ell_1}) = \mathbb{E}(\ell_1)\mathbb{E}(S-T)$

et $\tilde{W}_\infty \overset{\text{loi}}{=} \Sigma_{\ell_\Lambda}$.

Alors $L_{\tilde{W}_\infty}(z) = \mathbb{E}(e^{-z\tilde{W}_\infty}) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}(e^{-z\Sigma_{\ell_n}})\,\mathbb{P}(\Lambda = n)$

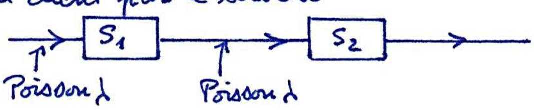
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (L_{Z_1}(z))^n\, \mathbb{P}(\Lambda = n) = G_\Lambda(L_{Z_1}(z))$$

$$\boxed{L_{\tilde{W}_\infty}(z) = \frac{1-\eta}{1-\eta L_Z(z)}} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathbb{E}(\tilde{W}_\infty) = \frac{\eta}{1-\eta}\,\mathbb{E}(\ell_1)\,\mathbb{E}(U)}$$

avec $\eta = \mathbb{P}(W > 0)$.
$\ell_1 = \min\{k > 0 : \Sigma_k > 0\}$

<u>Prolongements</u> : autres types de discipline :

- par paquets (arrivées ou/et service)
- priorités → avec achèvement de service (sans préemption)
  → avec interruption de service (préemption) → reprise du service en l'état
  → reprise du service depuis le début
- LCFS
- RANDOM : choix aléatoire du client par le serveur
- services en série
  cas M/M/1 :



- réseaux de Jackson (ouverts, fermés)
- PROCESSOR SHARING : partage du service par plusieurs files

Calculs de variance pour compléter ceux de moyenne ...

<u>Simulation</u>

- simuler les temps inter-arrivées indépendants T_n
- $s_1 = T_1$, $s_{n+1} = s_n + T_{n+1}$: instants d'arrivée
- simuler les temps de service indépendants S_n
- $\tilde{W}_1 = 0$, $\tilde{W}_{n+1} = (\tilde{W}_n + S_n - T_{n+1})^+$: temps d'attente
- $\sigma_n = s_n + \tilde{W}_n + S_n$: instants de sortie
- trier les s_n, σ_n
- tracer les graphes en escaliers $t \mapsto A_t, D_t, Q_t$.

File GI/GI/k

Soit σ_n l'instant de sortie de la n^e personne et d_n l'instant de la n^e sortie (pas nécessairement la n^e personne).

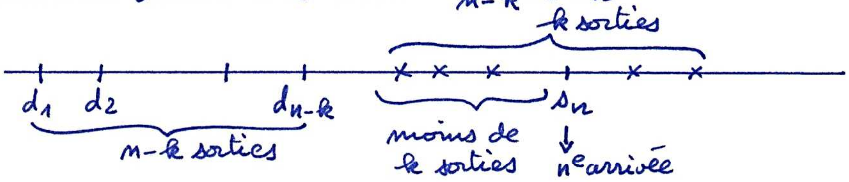
Avec k serveurs, les k premières personnes n'ont pas d'attente :

$$\tilde{W}_1 = \dots = \tilde{W}_k = 0 \quad \text{et donc} \quad \sigma_i = s_i + S_i,\ 1 \le i \le k .$$

Supposons connus les $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ $(n>k)$. On les ordonne : $\sigma_1^{(n-1)} \le \dots \le \sigma_{n-1}^{(n-1)}$ ce qui donne les $d_1 \le \dots \le d_{n-1}$ avant la n^e arrivée.

Lorsque la n^e personne arrive :

1) soit il y a un serveur libre et alors $\tilde{W}_n = 0$. Ceci se produit ssi il y a au plus $k-1$ personnes devant elle i.e. $d_{n-k} \le s_n$



2) soit tous les serveurs sont occupés, il y a au moins k personnes devant elle (dont la $(n-1)^e$) et on a $d_{n-k} > s_n$. Notons alors $j_1, \dots, j_k$ les numéros d'ordre d'arrivées de ces k personnes. On a

$$\{\sigma_{j_1}, \dots, \sigma_{j_k}\} = \{d_{n-k}, d_{n-k+1}, \dots, d_{n-1}\} \quad \text{avec } d_{n-k} \le \dots \le d_{n-1}.$$

La première de ces personnes qui a terminé son service sort à l'instant $d_{n-k} = \sigma_{j_1} \wedge \dots \wedge \sigma_{j_k}$ et la n^e personne démarre alors son service.

Dans ce cas $\tilde{W}_n = d_{n-k} - s_n = \min(\sigma_{j_1} - s_n, \dots, \sigma_{j_n} - s_n)$ avec $\sigma_j = s_j + \tilde{W}_j + S_j$

$$= \min\left(W_{j_1} + S_{j_1} - (s_n - s_{j_1}), \dots, W_{j_n} + S_{j_n} - (s_n - s_{j_n})\right)$$

D'où l'équation (analogue à celle de Lindley) :

$$\boxed{\tilde{W}_n = (d_{n-k} - s_n)^+}$$

ex : pour la $(k+1)^e$ personne, $\tilde{W}_{k+1} = (d_1 - s_{k+1})^+ = (\sigma_1 \wedge \dots \wedge \sigma_k - s_{k+1})^+$

Puis $\sigma_n = s_n + \tilde{W}_n + S_n$, puis réordonner les $\sigma_1, \dots, \sigma_n$: ceci donne $\sigma_1^{(n)} \le \dots \le \sigma_n^{(n)}$ soit encore $d_1 \le \dots \le d_n$ avant la $(n+1)^e$ arrivée.