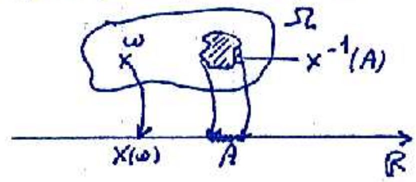
VARIABLES ALEATOIRES

I Variables aléatoires

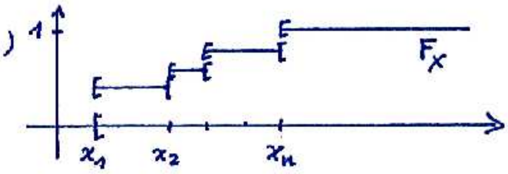
Définition :
- $X : (\Omega, \mathcal{E}) \longrightarrow X(\Omega) \subset \mathbb{R}$ v.a. $\iff \forall x \in \mathbb{R}$, $(X \leq x) = X^{-1}(]-\infty, x]) \in \mathcal{E}$
- Fonction de répartition : $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$.
- Loi de X : $\mathbb{P}_X = \mathbb{P} \circ X^{-1}$ probabilité sur $\mathbb{R}$



Proposition : F_X est croissante, $F_X(-\infty) = 0$, $F_X(+\infty) = 1$, $\mathbb{P}(X \in]a,b]) = F(b) - F(a)$
$\mathbb{P}(X \in [a,b]) = F(b) - F(a^-)$

- si F_X est constante par morceaux admettant $\{x_i,\ 1 \leq i \leq n\}$ ou $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ comme ensemble de points de discontinuité alors $X(\Omega) = \{x_i,\ 1 \leq i \leq n\}$ ou $\{x_n, n \in \mathbb{N}\} \to$ v.a. discrète.

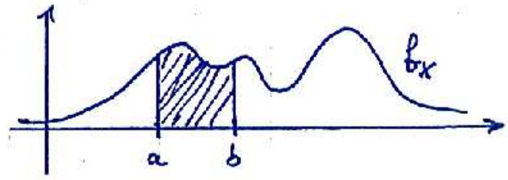
$$\left.\begin{array}{l} F_X(x_i) = \mathbb{P}(X \leq x_i) \\ F_X(x_i -) = \mathbb{P}(X < x_i) \end{array}\right\} \Longrightarrow \underbrace{\mathbb{P}(X = x_i) = F_X(x_i) - F_X(x_i -)}_{\text{saut en } x_i}$$



- si F_X est C^1 sur $I = F_X^{-1}(]0,1[)$ et $X(\Omega) = I$ intervalle de $\mathbb{R}$, alors X est une v.a. continue

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X = x) = 0$. Soit $f_X = F'_X$: densité de X.

$$\boxed{\mathbb{P}(X \in [a,b]) = \int_a^b f_X(x)\,dx}$$



Exemples :
- v.a.d. : Bernoulli $\mathcal{B}(1,p)$, loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$
- v.a.c. : loi uniforme $\mathcal{U}([a,b])$, loi de Gauss $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$.

Proposition : si X et Y sont des v.a., alors $\alpha X + Y$, XY, $\max(X,Y)$, $\min(X,Y)$ sont des v.a.

Proposition :
soit $\varphi : X(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$, $Y = \varphi(X)$.
- si X v.a.d., Y aussi et $\mathbb{P}(Y = y) = \sum_{\varphi(x_i) = y} \mathbb{P}(X = x_i)$
- si X v.a.c. et φ injective C^1, Y aussi et $f_Y(y) = f_X(\varphi^{-1}(y))(\varphi^{-1})'(y)$.

Exemple : loi du Khi-deux $\chi^2(1)$. $Y = X^2$ avec $X : \mathcal{N}(0,1)$. $f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{y}{2}} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(y)$.

II Couples de variables aléatoires

Soit $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ deux v.a.

Définition :
- Fonction de répartition : $F_{(X,Y)}(x,y) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y)$
- Lois marginales : $F_X(x) = F_{(X,Y)}(x, +\infty)$, $F_Y(y) = F_{(X,Y)}(+\infty, y)$

  v.a.d. : $\mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{y_j} \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)$

  v.a.c. : $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\,dy$ avec $f_{(X,Y)} = \frac{\partial^2 F_{(X,Y)}}{\partial x \partial y}$

Indépendance : X, Y indépendantes $\iff \forall x,y \in \mathbb{R}$, $(X \leq x)$ et $(Y \leq y)$ indépendants
$\iff F_{(X,Y)} = F_X \otimes F_Y$

Somme de v.a. indépendantes : • v.a.d. : $\mathbb{P}(X+Y=z_k) = \sum_{x_i+y_j=z_k} \mathbb{P}(X=x_i)\mathbb{P}(Y=y_j)$

ex. sur $\mathbb{N}$: $\mathbb{P}(X+Y=k) = \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}(X=i)\mathbb{P}(Y=k-i)$

• v.a.c. : $f_{(X,Y)} = f_X \otimes f_Y$ et $f_{X+Y} = f_X * f_Y$.

Exemples : • loi géométrique $\mathcal{G}(p)$: $T = \min\{n \geq 1 : X_n = 1\}$, $(X_n)_{n\geq 1}$ iid $\mathcal{B}(1,p)$.

• loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$: $S = X_1 + \cdots + X_n$, $(X_n)_{n\geq 1}$ iid $\mathcal{B}(1,p)$.

• loi normale : $X : \mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$, $Y : \mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2) \overset{\text{indép}}{\Rightarrow} X+Y = \mathcal{N}(m_1+m_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$
(avec la convolution)

Théorème : Soit $\varphi : (X,Y)(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un C^1-difféomorphisme

$$f_{\varphi(X,Y)}(x,y) = f_{(X,Y)}(\varphi^{-1}(x,y))\, |J_{\varphi^{-1}}(x,y)|$$

Exemples : • Loi de Gauss sur $\mathbb{R}^2$: loi normale (U,V), U,V : $\mathcal{N}(0,1)$ indépendantes.

$$f_{(U,V)}(u,v) = \frac{e^{-(u^2+v^2)/2}}{2\pi}$$

loi générale : $(X,Y) = \varphi(U,V)$ avec $\varphi(u,v) = (au+bv+\alpha, cu+dv+\beta)$

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{1}{2\pi|ad-bc|} \exp\left\{-\frac{1}{2(ad-bc)^2}\left[(c^2+d^2)(x-\alpha)^2 + (a^2+b^2)(y-\beta)^2 - 2(ac+bd)(x-\alpha)(y-\beta)\right]\right\}$$

Posons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, $\Gamma = A\,{}^tA = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix}$.

$$\Gamma^{-1} = \frac{1}{(ad-bc)^2}\begin{pmatrix} c^2+d^2 & -(ac+bd) \\ -(ac+bd) & (a^2+b^2) \end{pmatrix}.$$

• Loi du Khi-deux $\chi^2(2)$: X, Y : $\mathcal{N}(0,1)$ indépendantes, $Z = X^2+Y^2$.

a) $\varphi(x,y) = (x, x^2+y^2)$ → pas injective. Par contre $\varphi_1 = \varphi|_{I_1}$ et $\varphi_2 = \varphi|_{I_2}$ avec $I_1 = \mathbb{R} \times]-\infty, 0[$, $I_2 = \mathbb{R} \times]0, +\infty[$, C^1-difféo.

$$f_{\varphi(X,Y)} = \sum_{i=1}^{2} f_{(X,Y)} \circ \varphi_i^{-1} \cdot |J_{\varphi_i^{-1}}|$$

b) autre méthode : convolution (somme de deux $\chi^2(1)$)
c) autre méthode : directement $\mathbb{P}(Z \leq z)$ $\qquad f_Z(z) = \frac{1}{2} e^{-\frac{z}{2}} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(z)$

III Variables aléatoires conditionnelles

1) v.a.d. : X, Y v.a.d. telles que $\mathbb{P}(Y = y_j) > 0$ (j fixé)

• Fonction de répartition : $F_{(X|Y)}(x|y) = \mathbb{P}(X \leq x | Y = y_j)$
• Loi de probabilité : $\mathbb{P}(X = x_i | Y = y_j) = \mathbb{P}_{(X|Y=y_j)}(\{x_i\}) = \dfrac{\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)}{\mathbb{P}(Y = y_j)}$

2) v.a.c. : X, Y v.a.c. Ici on a $\mathbb{P}(Y=y)=0$.

- Fonction de répartition : $\mathbb{P}(X \leq x \mid Y=y) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \mathbb{P}(X \leq x \mid Y \in [y-\varepsilon, y+\varepsilon])$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\int_{-\infty}^{x} \int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} f_{(X,Y)}(u,v)\,du\,dv}{\int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} f_Y(v)\,dv}$$

$$\Longrightarrow \quad F_{(X|Y)}(x|y) = \frac{\int_{-\infty}^{x} f_{(X,Y)}(u,y)\,dy}{f_Y(y)}$$

- Densité : $f_{(X|Y)}(x|y) = \dfrac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_Y(y)}$

Théorème : $\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \begin{cases} \sum_{y_j} \mathbb{P}(X \in A \mid Y = y_j)\, \mathbb{P}(Y = y_j) \\ \text{ou } \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{P}(X \in A \mid Y=y)\, f_Y(y)\,dy \end{cases}$

Exemples :
- Loi géométrique $\mathcal{G}(p)$: $\mathbb{P}(T > n + n_0 \mid T > n_0) = \mathbb{P}(T > n) = (1-p)^n$
- Loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$: $\mathbb{P}(T > t + t_0 \mid T > t_0) = \mathbb{P}(T > t) = e^{-\lambda t}$

IV Espérance, variance, covariance

1) Espérance, variance

Définition :
- X v.a.d. : $\mathbb{E}(X) = \sum_{x_i} x_i\, \mathbb{P}(X = x_i)$, $\mathbb{E}(X^2) = \sum_{x_i} x_i^2\, \mathbb{P}(X = x_i)$ (si convergence)

  $var(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2 \geq 0$, $\sigma(X) = \sqrt{var(X)}$.

  Plus généralement : moments centrés $\mathbb{E}(X^n) = \sum_{x_i} x_i^n\, \mathbb{P}(X = x_i)$

  moments : $\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)^n]$
- X v.a.c. : $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\,dx$; $\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\,dx$ (si convergence)...

Proposition :
- E est linéaire
- Inégalité de Cauchy-Schwarz : $\mathbb{E}(|X|) \leq \sqrt{\mathbb{E}(X^2)}$ et donc $\mathbb{E}(X^2) < \infty \Rightarrow \mathbb{E}|X| < \infty$.
- Si $X \geqslant 0$: pour X v.a.d., $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$: $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > n)$

  pour X v.a.c., $X(\Omega) \subset \mathbb{R}^+$: $\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X > x)\,dx$
- Si X v.a.c. et φ continue : $\mathbb{E}[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f_X(x)\,dx$.

Exemples : • v.a.d $B(1,p)$, $B(n,p)$, $\mathcal{P}(\lambda)$, $\mathcal{G}(p)$
• v.a.c. $\mathcal{U}([a,b])$, $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$, $\mathcal{E}(\lambda)$.

Inégalités de Markov et Bienaymé-Tchebychev :

$$\mathbb{P}(|X| \geqslant x) \leq \frac{\mathbb{E}[\varphi(|X|)]}{\varphi(x)} \quad \text{si } \varphi \text{ croissante}$$

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant x) \leq \frac{var(X)}{x^2}$$

Andréi Markov 1856-1922
Jules Bienaymé 1796-1878
Tchebychev 1821-1894

2) Covariance

Définition. On suppose $\mathbb{E}(X^2), \mathbb{E}(Y^2) < \infty$. $\quad \mathrm{cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sigma(X)\,\sigma(Y)} .$$

matrice des covariances : $\Gamma = \begin{pmatrix} \mathrm{var}(X) & \mathrm{cov}(X,Y) \\ \mathrm{cov}(X,Y) & \mathrm{var}(Y) \end{pmatrix}$

Proposition :

- Inégalité de Cauchy-Schwarz : $|\mathbb{E}(XY)| \le \mathbb{E}(|XY|) \le \sqrt{\mathbb{E}(X^2)}\sqrt{\mathbb{E}(Y^2)}$ et donc $|\rho(X,Y)| \le 1$
- La covariance est bilinéaire symétrique de forme quadratique la variance :
  $\mathrm{cov}(aX+bY, cX+dY) = ac\,\mathrm{var}(X) + (ad+bc)\,\mathrm{cov}(X,Y) + bd\,\mathrm{var}(Y)$.
  $\mathrm{var}(aX) = a^2\,\mathrm{var}(X)$, $\quad \mathrm{var}(X \pm Y) = \mathrm{var}(X) + \mathrm{var}(Y) \pm 2\,\mathrm{cov}(X,Y)$
- Invariance par translation : $\mathrm{cov}(X+\alpha, Y+\beta) = \mathrm{cov}(X,Y)$, $\mathrm{var}(X+\alpha) = \mathrm{var}(X)$.
- Indépendance : si X, Y sont indépendantes alors $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$
  i.e. $\mathrm{cov}(X,Y) = 0$ (contre-ex : $X, X' : B(1,p)$ indépendantes $Y = X + X'$. $\mathrm{cov}(X,Y) = 0$ mais X, Y non indép)
  Plus généralement, $X_1, \dots, X_n$ indépendantes $\Rightarrow \mathrm{var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathrm{var}(X_i)$.

Exemple : loi de Gauss sur $\mathbb{R}^2$: $(X,Y) = \varphi(U,V)$ avec $f_{(U,V)} = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(u^2+v^2)}$

$$\varphi(u,v) = (au + bv + \alpha,\ cu + cd + \beta)$$

$\mathbb{E}(X) = a\,\mathbb{E}(U) + b\,\mathbb{E}(V) + \alpha = \alpha$, $\quad \mathbb{E}(Y) = \beta$

$\mathrm{var}(X) = \mathrm{var}(aU + bV) = a^2 + b^2$, $\mathrm{var}(Y) = \mathrm{var}(cU + dV) = c^2 + d^2$,

$\mathrm{cov}(X,Y) = \mathrm{cov}(aU + bV, cU + dV) = ac + bd$.

$$\Gamma = A\,{}^tA = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} .$$

V. Fonction génératrice - fonction caractéristique

1) v.a.d.

Définition : $G_X(z) = \mathbb{E}(z^X)$ (convergence pour $|z| \le 1$)

Proposition :

- G_X caractérise la loi de X : $G_X = G_Y \Rightarrow \mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$
- $\mathbb{E}(X) = G'_X(1)$ et $\mathbb{E}(X(X-1)) = G''_X(1)$ (si convergence)
- $X_1, \dots, X_n$ indépendantes $\Rightarrow G_{\sum_{i=1}^n X_i} = \prod_{i=1}^n G_{X_i}$.

Exemples :
- $B(1,p)$; $B(n,p)$ et $B(n_1,p) + B(n_2,p)$; $\mathcal{P}(\lambda)$ et $\mathcal{P}(\lambda_1) + \mathcal{P}(\lambda_2)$; $\mathcal{G}(p)$.
- $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ i.i.d, $X_0 = 0$, $S_n = \sum_{i=0}^n X_i$. On a $G_{S_N} = G_N \circ G_{X_1}$ et donc $\mathbb{E}(S_N) = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(X_1)$
  N indépendante de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $N(\Omega) \subset \mathbb{N}$ $\quad$ ex : $X_1 : B(1,p)$ $\to N : B(n,q)$ $\quad G_N(z) = (qz + 1 - q)^n \Rightarrow S_N : B(n, pq)$
  $\to N : \mathcal{P}(\lambda)$ $\quad G_N(z) = e^{\lambda(z-1)} \Rightarrow S_N : \mathcal{P}(\lambda p)$

2) v.a.c.

Définition : $\varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX})$, $\quad \varphi_{(X,Y)}(s,t) = \mathbb{E}(e^{i(sX+tY)})$.

Proposition :

- φ_X caractérise la loi de X : $\varphi_X = \varphi_Y \Rightarrow f_X = f_Y$ p.p.
  si $\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi_X(t)|\,dt < \infty$, $f_X(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}\varphi_X(t)\,dt$ p.p.
- $\varphi_{aX+b}(t) = e^{itb}\varphi_X(at)$, si $L(x,y) = (ax + by + \alpha, cx + dy + \beta)$
  $\varphi_{L(X,Y)}(s,t) = e^{i(\alpha s + \beta t)}\varphi_{(X,Y)}(L^*(s,t))$
- Si X, Y sont indépendantes : $\varphi_{(X,Y)} = \varphi_X \otimes \varphi_Y$ et $\varphi_{X+Y} = \varphi_X\varphi_Y$.
- $\mathbb{E}(X) = -i\varphi'_X(0)$ et $\mathbb{E}(X^2) = -\varphi''_X(0)$ (si convergence).

Exemples : $\mathcal{U}([0,1])$; $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ et $\mathcal{N}(m_1,\sigma_1^2) + \mathcal{N}(m_2,\sigma_2^2)$; $\mathcal{E}(\lambda)$ et $\mathcal{E}(\lambda_1) + \dots + \mathcal{E}(\lambda_n) \to$ loi Gamma.
ex : processus de Poisson $(T_{n+1} - T_n)$ i.i.d $\mathcal{E}(\lambda)$ $\quad N_t : \mathcal{P}(\lambda t)$
$N_t = n \Leftrightarrow T_n \le t < T_{n+1}$ donne