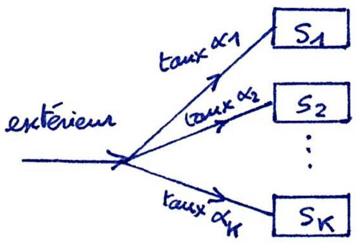
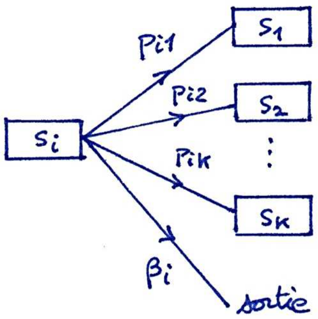
RESEAUX DE JACKSON

I Introduction

On considère un réseau constitué de K stations. Dans chacune des stations $i \in \{1,2,\dots,K\}$ il y a un serveur procurant un temps de service $\mathcal{E}(\mu_i)$. Des clients peuvent arriver de l'extérieur du système à la station i suivant un processus de Poisson $\mathcal{P}(\alpha_i)$, $\alpha_i \geq 0$.
A la sortie de la station i, le client va à la station j avec la probabilité p_{ij} ou sort du système avec probabilité $\beta_i \geq 0$. On a donc $\forall i \in \{1,2,\dots,K\}$, $\beta_i + \sum_{j=1}^{K} p_{ij} = 1$.
On suppose les temps de service, les intervalles inter-arrivées de l'extérieur, les choix des clients indépendants.

On note $Q_t^{(i)}$ le nombre de clients à la station i puis $Q_t = (Q_t^{(1)}, Q_t^{(2)}, \dots, Q_t^{(K)}) = \sum_{i=1}^{K} Q_t^{(i)} e_i$ le vecteur des longueurs de file d'attente, $e_i = (0,\dots,0,\underset{i^e\text{ place}}{1},0,\dots,0)$.





Proposition : $(Q_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ est une chaîne de Markov sur $\mathbb{N}^K$ de générateur A tel que

$\forall i,j \in \{1,2,\dots,K\}$, $\quad n = (n_1,\dots,n_K) \in \mathbb{N}^K$,
$$\begin{cases} A_{n,n+e_i} = \alpha_i \\ A_{n,n-e_i} = \beta_i \mu_i & \text{si } n_i \geq 1 \\ A_{n,n+e_j-e_i} = p_{ij}\mu_i & \text{si } n_i \geq 1 \text{ et } i \neq j \\ A_{n,n} = -\sum_{m \in \mathbb{N}^K \setminus \{n\}} A_{n,m} \\ \text{et les autres } A_{m,n} = 0. \end{cases}$$

Démonstration : • $\mathbb{P}(Q_{t+\varepsilon} = n + e_i \mid Q_t = n) = \mathbb{P}(Q_{t+\varepsilon}^{(i)} - Q_t^{(i)} = 1,\ \forall j \neq i\ Q_{t+\varepsilon}^{(j)} - Q_t^{(j)} = 0 \mid Q_t = n)$

$= \mathbb{P}(1 \text{ seul client a changé de station et est allé en } i \text{ durant } [t,t+\varepsilon] \mid Q_t = n) + o(\varepsilon)$

$= \alpha_i \varepsilon + o(\varepsilon)$

• $\mathbb{P}(Q_{t+\varepsilon} = n - e_i \mid Q_t = n) = \mathbb{P}(1 \text{ seul client est sorti du système et venait de } i \text{ durant } [t,t+\varepsilon] \mid Q_t = n) + o(\varepsilon) = \mu_i \beta_i \varepsilon + o(\varepsilon)$

• $\mathbb{P}(Q_{t+\varepsilon} = n + e_j - e_i \mid Q_t = n) = \mathbb{P}(1 \text{ seul client est passé de } i \text{ vers } j \text{ durant } [t,t+\varepsilon] \mid Q_t = n)$
$= \mu_i p_{ij} \varepsilon + o(\varepsilon)$. □

II Régime stationnaire

En régime stationnaire, le processus des sorties de la station i est un processus de Poisson $\mathcal{P}(\lambda_i)$ pour un certain $\lambda_i \geq 0$. En écrivant qu'à l'équilibre, le flot entrant à la station i est identique au flot sortant, on obtient l'équation du trafic.

<u>Equation du trafic</u> : En régime stationnaire : $\lambda_i = \alpha_i + \sum_{j=1}^{K} \lambda_j p_{ji}, \quad i \in \{1, 2, \dots, K\}$

On pose $\rho_i = \frac{\lambda_i}{\mu_i}$.

<u>Proposition</u> : La mesure π sur $\mathbb{N}^K$ définie par $\pi_n = C \prod_{i=1}^{K} \rho_i^{n_i}$ pour $n = (n_1, \dots, n_K)$, $C > 0$, est une mesure telle que $\pi A = 0$

<u>Démonstration</u> : on a
$$A_{nn} = -\sum_{i=1}^{K} (\alpha_i + \underbrace{\beta_i}_{1-\sum_{j=1}^{K} p_{ij}} \mu_i \mathbb{1}_{\{n_i > 0\}}) - \sum_{\substack{1 \leq i,j \leq K \\ i \neq j}} p_{ij} \mu_i \mathbb{1}_{\{n_i > 0\}}$$
$$= -\sum_{i=1}^{K} \alpha_i - \sum_{i=1}^{K} \mu_i \mathbb{1}_{\{n_i \geq 1\}} + \underbrace{\sum_{1 \leq i,j \leq K} p_{ij} \mu_i \mathbb{1}_{\{n_i \geq 1\}} - \sum_{\substack{1 \leq i,j \leq K \\ i \neq j}} p_{ij} \mu_i \mathbb{1}_{\{n_i \geq 1\}}}_{\sum_{i=1}^{K} p_{ii} \mu_i \mathbb{1}_{\{n_i \geq 1\}}}$$
$$= -\sum_{i=1}^{K} \left[\alpha_i + \mu_i (1 - p_{ii}) \mathbb{1}_{\{n_i \geq 1\}}\right]$$

puis
$$\sum_{m \in \mathbb{N}^K} \pi_m A_{mn} = \sum_{i=1}^{K} \Bigg[\underbrace{\pi_{n+e_i}}_{\pi_n \rho_i} \beta_i \mu_i \mathbb{1}_{\{\underbrace{(n+e_i)_i}_{n_i+1} \geq 1\}} + \underbrace{\pi_{n-e_i}}_{\frac{\pi_n}{\rho_i}} \alpha_i \mathbb{1}_{\{\underbrace{(n-e_i)_i}_{n_i-1} \geq 0\}}$$
$$+ \sum_{\substack{1 \leq j \leq K \\ j \neq i}} \underbrace{\pi_{n-e_i+e_j}}_{\pi_n \frac{\rho_j}{\rho_i}} p_{ji} \mu_j \mathbb{1}_{\{\underbrace{(n-e_i+e_j)_{i \text{ et } j}}_{n_i-1 \text{ et } n_j+1} \geq 0\}}$$
$$- \pi_n \sum_{i=1}^{K} \left[\alpha_i + \mu_i (1 - p_{ii}) \mathbb{1}_{\{n_i \geq 1\}}\right] \Bigg]$$
$$= \pi_n \sum_{i=1}^{K} \Bigg[\lambda_i \beta_i + \frac{\alpha_i}{\rho_i} \mathbb{1}_{\{n_i \geq 1\}} + \underbrace{\sum_{j \neq i} \frac{\lambda_j p_{ji}}{\rho_i}}_{\frac{1}{\rho_i} \sum_{j=1}^{K} \lambda_j p_{ji} - \frac{\lambda_i p_{ii}}{\rho_i}} \mathbb{1}_{\{n_i \geq 1\}} - \alpha_i - \mu_i (1 - p_{ii}) \mathbb{1}_{\{n_i \geq 1\}} \Bigg]$$
$$= \frac{\lambda_i - \alpha_i}{\rho_i} - \mu_i p_{ii}$$
$$= \mu_i (1 - p_{ii}) - \frac{\alpha_i}{\rho_i}$$
$$= \pi_n \sum_{i=1}^{K} \left[\lambda_i \left(1 - \sum_{j=1}^{K} p_{ij}\right) - \alpha_i\right]$$
$$= \pi_n \left[\sum_{i=1}^{K} (\lambda_i - \alpha_i) - \sum_{j=1}^{K} \underbrace{\sum_{i=1}^{K} \lambda_i p_{ij}}_{\lambda_j - \alpha_j}\right] = 0. \quad \square$$

III Réseaux ouverts

On dit que le réseau est ouvert lorsqu'il y a des échanges avec l'extérieur : $\alpha_i, \beta_i > 0$.

Condition (C) : $\forall i, j \in \{1, \dots, K\}$, $\exists\, m, \ell \in \mathbb{N}$ tels que $(\alpha P^m)_i > 0$ et $(P^\ell \beta)_j > 0$

où $P = (p_{ij})_{1 \le i,j \le K}$ est la matrice des changements de stations.

Lemme 1 : $\boxed{\text{Sous la condition (C), } (Q_t)_{t \in \mathbb{R}^+} \text{ est une chaîne irréductible}}$

Démonstration : (C) $\Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, K\}$, $\exists\, i_1, \dots, i_m \in \{1, \dots, K\}$ / $\alpha_{i_1} p_{i_1 i_2} p_{i_2 i_3} \cdots p_{i_{m-1} i_m} p_{i_m i} > 0$

$\Rightarrow$ un client peut venir de l'extérieur et entrer dans le système à la station i_1 puis $i_2, i_3, \dots$ jusqu'à i avec une probabilité > 0

$\Rightarrow$ pour tout état n, on peut passer de l'état n en l'état $n + e_i$

donc une transition vers la station i est toujours possible avec probabilité > 0.

De même :

(C) $\Rightarrow \forall j \in \{1, \dots, K\}$, $\exists\, j_1, \dots, j_\ell \in \{1, \dots, K\}$ / $p_{j j_1} p_{j_1 j_2} \cdots p_{j_{m-1} j_\ell}\, p_{j_\ell}\, \beta_{j_\ell} > 0$

$\Rightarrow$ un client présent en j peut passer par les stations $j_1, j_2, \dots, j_\ell$ puis sortir du système avec une probabilité > 0

$\Rightarrow$ pour tout état n, on peut passe de l'état n en l'état $n - e_j$

donc une transition depuis la station j est toujours possible avec probabilité > 0.

D'où l'irréductibilité. □

Lemme 2 : $\boxed{\text{Sous la condition (C), l'équation du trafic a une solution}}$

Démonstration : On introduit la chaîne de Markov sur $F = \{0, 1, \dots, K\}$ de générateur B défini par

pour $i \neq j$: $B_{ij} = \begin{cases} p_{ij} & \text{si } i, j \geq 1 \\ \beta_i & \text{si } j = 0 \\ \alpha_j & \text{si } i = 0 \end{cases}$ i.e.

$$B = \begin{pmatrix} -\sum_{i=1}^{K} \alpha_i & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_K \\ \beta_1 & p_{11} - 1 & p_{12} & \cdots & p_{1K} \\ \beta_2 & p_{21} & p_{22} - 1 & \cdots & p_{2K} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_K & p_{K1} & p_{K2} & \cdots & p_{KK} - 1 \end{pmatrix}$$

C'est la chaîne des changements de stations, la station 0 étant l'extérieur.

F étant fini, cette chaîne admet une probabilité invariante $\nu = (\nu_i)_{i \in F}$ vérifiant $\nu B = 0$. Ceci donne :

$$\text{si } j \neq 0, \quad 0 = \sum_{i=0}^{K} \nu_i B_{ij} = \alpha_j \nu_0 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{K} \nu_i p_{ij} + \nu_j (p_{jj} - 1)$$

$$\Rightarrow \alpha_j + \sum_{i=1}^{K} \frac{\nu_i}{\nu_0} p_{ij} = \frac{\nu_j}{\nu_0}$$

ainsi $\lambda_j = \frac{\nu_j}{\nu_0}$, $1 \le j \le K$ est solution de l'équation du trafic.

Remarque : le vecteur $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_K)$ est solution de l'équation $\lambda(I-P) = \alpha$. □

<u>Théorème</u> :

> Soit un réseau ouvert vérifiant la condition (C) tel que $\forall i \in \{1, \dots, K\}$, $\rho_i < 1$.
> Alors la chaîne $(Q_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est récurrente positive irréductible de probabilité stationnaire
> $\pi = (\pi_n)_{n\in\mathbb{N}^K}$: $\pi_n = \prod_{i=1}^{K} (1-\rho_i)\rho_i^{n_i}$ pour $n = (n_1, \dots, n_K)$.

<u>Démonstration</u> : $\begin{cases} \pi_n = C \prod_{i=1}^{K} \rho_i^{n_i} \text{ vérifie } \pi A = 0 \\ \text{où } C = \prod_{i=1}^{K}(1-\rho_i) \end{cases}$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}^K} \pi_n = C \prod_{i=1}^{K} \left(\sum_{n_i=0}^{\infty} \rho_i^{n_i} \right) = \frac{C}{\prod_{i=1}^{K}(1-\rho_i)} = 1$. □

<u>Remarques</u> :
- Si un $\rho_i > 1$ alors $Q_t^{(i)} \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$ p.s.
- En régime stationnaire, les $Q_\infty^{(i)}$ sont des v.a. indépendantes $\mathcal{G}(\rho_i)$.

IV Réseaux fermés

On dit que le réseau est fermé lorsqu'il n'y a pas d'échange avec l'extérieur : $\alpha_i = \beta_i = 0$.

Le nombre de clients est donc constant $= N$. On se place sur l'espace d'états $E_N = \{ n \in \mathbb{N}^K : \sum_{i=1}^{K} n_i = N \}$. L'équation du trafic s'écrit alors $\lambda_i = \sum_{j=1}^{K} \lambda_j p_{ji}$, $i \in \{1, \dots, K\}$ i.e. $\lambda = \lambda P$.

<u>Lemme</u> :

> L'équation du trafic admet une solution

<u>Démonstration</u> : il suffit de prendre une probabilité invariante de la chaîne de Markov finie de matrice de transition P. □

<u>Théorème</u> :

> Soit un réseau fermé. On suppose la chaîne de Markov de matrice P irréductible. Alors, $\forall N \in \mathbb{N}$, la chaîne de Markov $(Q_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ sur E_N est récurrente positive irréductible de probabilité stationnaire $\pi = (\pi_n)_{n\in E_N}$:
> $$\pi_n = C \prod_{i=1}^{K} \rho_i^{n_i} \text{ pour } n \in E_N \text{ avec } C = \left(\sum_{n\in E_N} \prod_{i=1}^{K} \rho_i^{n_i} \right)^{-1}.$$

<u>Démonstration</u> : Comme P est irréductible, pour toute station i, j, on a $i \leftrightarrow j$ sous P.

Donc $\forall n \in E_N$ et $\forall i, j$, $n \leftrightarrow n + e_j - e_i$ pour (Q_t),

la chaîne $(Q_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est donc irréductible sur un espace fini donc ergodique. □