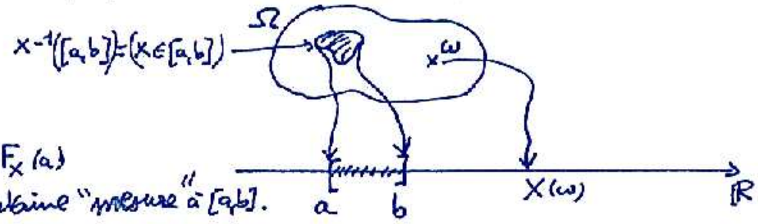
VARIABLES ALÉATOIRES CONTINUES

I Variables aléatoires continues

<u>Définition</u> : Soit $X : (\Omega, \mathcal{E}) \to \mathbb{R}$. X est une v.a. $\iff \forall x \in \mathbb{R},\ (X \le x) = X^{-1}(]-\infty, x]) \in \mathcal{E}$
(il est inutile de parler de Boréliens)

* Fonction de répartition : $F_X(x) = \mathbb{P}(X \le x) = \mathbb{P}(X^{-1}(]-\infty, x])) = \mathbb{P}_X(]-\infty, x])$
* $\mathbb{P}_X$ est la loi de X : $\mathbb{P}_X = \mathbb{P} \circ X^{-1}$, c'est une probabilité sur $\mathbb{R}$.



$\mathbb{P}_X(]a,b]) = F_X(b) - F_X(a)$
$\mathbb{P}_X$ affecte une certaine "mesure" à $[a,b]$.

Si X est une v.a. discrète, F_X a des discontinuités (fonction constante par morceaux)
si F_X est continue, $F_X(a) = F_X(a-)$ et alors $\forall a \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X = a) = 0$.
Dans ce cas :

$$\mathbb{P}(X \in [a,b]) = \sum_{a < \frac{i}{n} < \frac{i+1}{n} < b} \mathbb{P}\left(X \in \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]\right) + \mathbb{P}\left(X \in \left[a, \frac{[na]+1}{n}\right]\right) + \mathbb{P}\left(X \in \left[\frac{[nb]}{n}, b\right]\right)$$

i_0 tel que $0 < \frac{i_0}{n} - a < \frac{1}{n} \Rightarrow i_0 = [na] + 1$
i_1 tel que $0 < b - \frac{i_1}{n} < \frac{1}{n} \Rightarrow i_1 = [nb]$

$$\mathbb{P}(X \in [a,b]) = \frac{1}{n} \sum_{na < i < nb-1} n\left[F_X\left(\frac{i+1}{n}\right) - F_X\left(\frac{i}{n}\right)\right] + \underbrace{\left[F_X\left(\frac{[na]+1}{n}\right) - F_X(a)\right]}_{\xrightarrow[n \to +\infty]{} 0} + \underbrace{\left[F_X(b) - F_X\left(\frac{[nb]}{n}\right)\right]}_{\xrightarrow[n \to +\infty]{}}$$

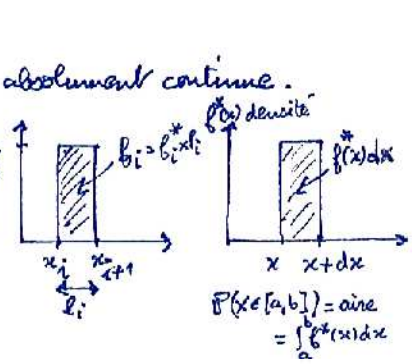
Si on suppose en plus que F_X est C^1 $\quad n\left[F_X\left(\frac{i+1}{n}\right) - F_X\left(\frac{i}{n}\right)\right] \underset{n \to +\infty}{=} F'_X\left(\frac{i}{n}\right) + o(1)$

et $\mathbb{P}(X \in [a,b]) = \frac{1}{n} \sum_{a < \frac{i}{n} < b - \frac{1}{n}} F'_X\left(\frac{i}{n}\right) + \underbrace{\frac{i_1 - i_0}{n}} o(1) + o(1) \longrightarrow \int_a^b F'_X(x)\,dx$

Ou plus simplement : $\mathbb{P}(X \in [a,b]) = F(b) - F(a) = \int_a^b F'_X(x)\,dx$! $\le b-a$

* $F'_X = f_X$ est la densité de X, on dit que X est une v.a. absolument continue.

$$\boxed{\mathbb{P}(X \in [a,b]) = \int_a^b f_X(x)\,dx} .$$



* interprétation : limite de l'histogramme (densité de fréquences)

<u>Exemples</u> :

distribution	densité
loi uniforme $\mathcal{U}[a,b]$	$\frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(x)$
loi gaussienne $N(m, \sigma^2)$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$
loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$	$\lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$

<u>A traiter en exercice</u> : loi de Cauchy (= tangente loi uniforme), loi Gamma (= somme d'exponentielles), loi Bêta, loi de Weibull (fiabilité), lois du χ^2, Student, Fisher (statistique)

Proposition : Soit X une v.a. absolument continue de densité f_X.
Soit $\varphi : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ une injection C^1. Alors $Y = \varphi(X)$ est une v.a. absolument continue de densité $f_Y(y) = f_X(\varphi^{-1}(y))\,|(\varphi^{-1})'(y)|$.

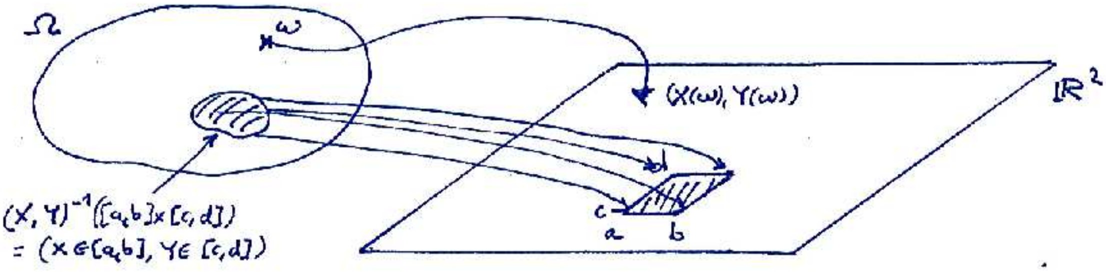
Exemple : loi du Khi-deux à 1 d.d.l. : $X : N(0,1)$, $Y = X^2$, $F_Y(y) = \mathbb{P}(X \in [-\sqrt{y}, \sqrt{y}]) = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f_X(x)dx$

donc $f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}\left[f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{y}{2}}$.

II Couples de variables aléatoires

Définition : Soit $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ deux v.a. $(X,Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ est un couple aléatoire ssi $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $(X \leq x, Y \leq y) = X^{-1}(]-\infty, x]) \cap Y^{-1}(]-\infty, y]) \in \mathcal{T}$.

* Fonction de répartition : $F_{(X,Y)}(x,y) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) = \mathbb{P}_{(X,Y)}(]-\infty, x] \times]-\infty, y])$
* $\mathbb{P}_{(X,Y)} = \mathbb{P} \circ (X,Y)^{-1}$: loi du couple (X,Y) $\to$ probabilité sur $\mathbb{R}^2$.



* Si on peut écrire $\mathbb{P}((X,Y) \in [a,b] \times [c,d]) = \int_a^b \int_c^d f_{(X,Y)}(x,y)\,dxdy$ on dit que le couple (X,Y) est absolument continu de densité $f_{(X,Y)}$.
On a alors $f_{(X,Y)} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$.

Indépendance : X et Y v.a. indépendantes $\iff F_{(X,Y)} = F_X \otimes F_Y \iff f_{(X,Y)} = f_X \otimes f_Y$
(notation : $(f \otimes g)(x,y) = f(x)g(y)$) On a alors $f_{X+Y} = f_X * f_Y$ $\left((f*g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(x-y)dy\right)$

Lois marginales : $F_X(x) = F_{(X,Y)}(x, +\infty) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(u,v)\,du\,dv$
$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y)dy$

Complément facultatif : lois conditionnelles

Les lois marginales seules de (X,Y) ne suffisent pas à reconstruire la loi de (X,Y). On a besoin de conditionnement. (sauf si X, Y indépendantes)

Soit (X,Y) un couple aléatoire absolument continu. On cherche à donner un sens à $\mathbb{P}(X \leq x \mid Y = y)$ (ici $\mathbb{P}(Y = y) = 0$).
Soit $\varepsilon > 0$.

$$\mathbb{P}(X \leq x \mid y \leq Y \leq y+\varepsilon) = \frac{\mathbb{P}(X \leq x, y \leq Y \leq y+\varepsilon)}{\mathbb{P}(y \leq Y \leq y+\varepsilon)} = \frac{\int_y^{y+\varepsilon}\int_{-\infty}^{x} f_{(X,Y)}(u,v)\,du\,dv}{\int_y^{y+\varepsilon} f_Y(v)dv}$$
(ou $y-\varepsilon \leq Y \leq y$)

$$\xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} \frac{\int_{-\infty}^{x} f_{(X,Y)}(u,y)\,dy}{f_Y(y)}$$

Définition : On suppose $f_Y(y) > 0$. Fonction répartition conditionnelle de X sachant $Y = y$:

$$F_{X|Y}(x|y) = \frac{\int_{-\infty}^{x} f_{(X,Y)}(u,y)\,du}{f_Y(y)}$$

Densité conditionnelle : $f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_Y(y)}$

Théorème : $\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \int_B \mathbb{P}(X \in A \mid Y = y)\, f_Y(y)dy$

Exercice facile sur le conditionnement : soit X une v.a. suivant la loi $\mathcal{E}(\lambda)$.

$$\mathbb{P}(X>x+y \mid X>y) = \frac{\mathbb{P}(X>x+y)}{\mathbb{P}(X>y)} = \frac{e^{-\lambda(x+y)}}{e^{-\lambda y}} = e^{-\lambda x} = \mathbb{P}(X>x).$$

On dit que la loi exponentielle est <u>sans mémoire</u>.
En pratique, X modélise le temps d'attente dans une file. Sachant qu'on a déjà attendu le temps y, on pourra encore attendre le temps x indépendamment de y.

Réciproquement soit X une v.a. absolument continue telle que $\mathbb{P}(X>x+y \mid X>y) = \mathbb{P}(X>x)$.
On a $\mathbb{P}(X>x+y) = \mathbb{P}(X>x)\,\mathbb{P}(Y>y)$ d'où $\mathbb{P}(X>x) = e^{-\lambda x} \to X$ suit $\mathcal{E}(\lambda)$.

Proposition : Soit (X,Y) un couple aléatoire absolument continu de densité $f_{(X,Y)}$.
Soit $\varphi : (X,Y)(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un C^1-difféomorphisme. Alors $(U,V) = \varphi(X,Y)$ est un couple aléatoire absolument continu de densité $f_{(U,V)}(u,v) = f_{(X,Y)}(\varphi^{-1}(u,v))\,|J_{\varphi^{-1}}(u,v)|$

Exemple : loi du Khi-deux à 2 d.d.l. $X,Y : N(0,1)$ indépendantes, $V = X^2+Y^2$. Introduire $U=X$

3 méthodes : 1) introduire $U=X$ et $\varphi(x,y) = (u,v) = (x, x^2+y^2)$ $\quad I_1 = \mathbb{R}\times]0,\infty[$, $I_2 = \mathbb{R}\times]-\infty,0[$, $\varphi(I_1) = \varphi(I_2) = \{v>u^2>0\}$

2) $F_V(v) = \iint_{x^2+y^2\leq v} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\frac{dx\,dy}{2\pi} = \int_0^{\sqrt{v}} \rho e^{-\rho^2/2} d\rho$ (polaires) | $\varphi_1 = \varphi|_{I_1} : I_1 \to \varphi(I_1)$ et $\varphi_2 : I_2 \to$ difféo.

3) Convolution.

$f_V(v) = \frac{1}{2}e^{-\frac{v}{2}}$. $\quad$ donc $f_{(U,V)}(u,v) = \sum_{i=1}^{2} |J_{\varphi_i^{-1}}(u,v)|\, f_{(X,Y)}(\varphi_i^{-1}(u,v))$

III Espérance mathématique, variance

Considérons X une v.a. discrète d'image $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ avec $x_i = a + \frac{i}{n}(b-a)$, $0\leq i\leq n$, (donc $X\in[a,b]$) d'espérance finie.

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=0}^{n} x_i\,\mathbb{P}(X=x_i) = \sum_{i=0}^{n}\left(a+\frac{i}{n}(b-a)\right)\mathbb{P}\left(X = a+\frac{i}{n}(b-a)\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{n}\left(a+\frac{i}{n}(b-a)\right)\mathbb{P}\left(X\in\left]a+\frac{i-1}{n}(b-a), a+\frac{i}{n}(b-a)\right]\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{n}\left(a+\frac{i}{n}(b-a)\right)\left[F_X\left(a+\frac{i}{n}(b-a)\right) - F_X\left(a+\frac{i-1}{n}(b-a)\right)\right]$$

Si F_X était C^1 et les x_i très proches les uns des autres (n grand), on aurait en notant $f_X = F_X'$:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=0}^{n}\left[a+\frac{i}{n}(b-a)\right]\left[\frac{b-a}{n} f_X\left(a+\frac{i}{n}(b-a)\right) + o\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$= \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n}\left(a+\frac{i}{n}(b-a)\right) f_X\left(a+\frac{i}{n}(b-a)\right) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n} x_i f_X(x_i)$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b x f_X(x)\,dx.$$

autre approche : si X abs. cont.,
$\mathbb{E}(X) \approx \sum_{i=-\infty}^{+\infty} i\varepsilon\, \mathbb{P}(i\varepsilon \leq X < (i+1)\varepsilon) = \mathbb{E}\left(E\left[\frac{X}{\varepsilon}\right]\right)$
$= \sum_{i=-\infty}^{\infty} i\varepsilon \int_{i\varepsilon}^{(i+1)\varepsilon} f_X(x)\,dx$
$\in \left[\sum \int_{i\varepsilon}^{(i+1)\varepsilon}(x-\varepsilon) f_X(x)\,dx, \sum_i \int_{i\varepsilon}^{(i+1)\varepsilon} x f_X(x)\,dx\right]$
$\in \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx - \varepsilon, \int x f_X(x)\,dx\right]$
$\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \left\{\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx\right\}$

Ceci nous amène à la définition suivante :

Définition : Soit X une v.a. absolument continue de densité f_X. On appelle espérance mathématique de X le nombre, s'il existe,

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx}.$$

Autre écriture : si $X\geq 0$, $\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} f_X(x)\left(\int_0^x dy\right)dx = \iint_{\{0<y<x\}} f_X(x)\,dx\,dy = \int_0^{+\infty} dy \int_y^{+\infty} f_X(x)\,dx$

$$= \int_0^{+\infty}\mathbb{P}(X>x)\,dx.$$

De même si $X\leq 0$: $\mathbb{E}(X) = -\int_{-\infty}^{0}\mathbb{P}(X<x)\,dx$.

Cas général :

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty}\mathbb{P}(X>x)\,dx - \int_{-\infty}^{0}\mathbb{P}(X<x)\,dx.}$$

Plus généralement, pour $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (continue e.g.) :

$$\mathbb{E}(\varphi(X)) = \int_0^{+\infty} \underbrace{\mathbb{P}(\varphi(X) > y)}_{\int_{\{x:\varphi(x)>y\}} f_X(x)dx} dy - \int_{-\infty}^0 \underbrace{\mathbb{P}(\varphi(X) < y)}_{\int_{\{x:\varphi(x)<y\}} f_X(x)dx} dy = \int_{\{\varphi(x)>0\}} f_X(x)dx \int_0^{\varphi(x)} dy - \int_{\{\varphi(x)<0\}} f_X(x)dx \int_{\varphi(x)}^0 dy$$

d'où $\boxed{\mathbb{E}(\varphi(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\varphi(x)dx}$.

Méthode plus simple en supposant φ bijection $C^1 \nearrow$:

densité de $\varphi(X)$: $f_{\varphi(X)}(x) = f_X(\varphi^{-1}(x))(\varphi^{-1})'(x) = \frac{f_X(\varphi^{-1}(x))}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))}$

$$\mathbb{E}(\varphi(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\varphi(X)}(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) f_{\varphi(X)}(\varphi(y))\ \varphi'(y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) f_X(y)\,dy.$$

Moments d'ordre n : $E(X^n) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f_X(x)dx$ si l'intégrale converge.

Moments centrés d'ordre n : $\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^n] = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(X)]^n f_X(x)dx$

variance : $\boxed{\operatorname{var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2] = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2}$

Exemples :

distribution	espérance	variance
$\mathcal{U}[a,b]$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
$N(m,\sigma^2)$	m	σ^2
$\mathcal{E}(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda}$

Covariance : $\operatorname{cov}(X,Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))] = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$

avec $E(XY) = \iint_{\mathbb{R}^2} f_{(X,Y)}(x,y)\,dx\,dy$

coefficient de corrélation : $\rho_{(X,Y)} = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} \in [-1,1]$

Exemple : Loi de Gauss sur $\mathbb{R}^2$ (Carl Friedrich Gauss, 1777–1855)

Loi normale : $f_{(U,V)}(u,v) = \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \times \frac{e^{-\frac{v^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(u^2+v^2)}$, U,V : normales sur $\mathbb{R}$ indépendantes

Cas général : $(X,Y) = L(U,V)$ avec $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ application affine

$$X = aU + bV + \alpha, \quad Y = cU + dV + \beta.$$

On a $E(X) = \alpha$, $E(Y) = \beta$, $\operatorname{var}(X) = a^2+b^2$, $\operatorname{var}(Y) = c^2+d^2$, $\operatorname{cov}(X,Y) = ac+bd$

Si L bijective : $f_{(X,Y)}(x,y) = |J_{L^{-1}}(x,y)|\ f_{(U,V)}(L^{-1}(x,y))$

$$= \frac{1}{2\pi|ad-bc|} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\left(\frac{d(x-\alpha) - b(y-\beta)}{ad-bc}\right)^2 + \left(\frac{-c(x-\alpha) + a(y-\beta)}{ad-bc}\right)^2\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi|ad-bc|} \exp\left[-\frac{(c^2+d^2)(x-\alpha)^2 - 2(ac+bd)(x-\alpha)(y-\beta) + (a^2+b^2)(y-\beta)^2}{2(ad-bc)^2}\right]$$

Posons alors $Q(x,y) = \mathrm{var}(X)\,x^2 + 2\,\mathrm{cov}(X,Y)\,xy + \mathrm{var}(Y)\,y^2$.

Q est la forme quadratique de matrice $Q = \begin{pmatrix} \mathrm{var}(X) & \mathrm{cov}(X,Y) \\ \mathrm{cov}(X,Y) & \mathrm{var}(Y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \rho\,\sigma_X\sigma_Y \\ \rho\,\sigma_X\sigma_Y & \sigma_Y^2 \end{pmatrix}$

Ainsi $\quad f_{(X,Y)}(x,y) = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{\det Q}} \exp\left[-\frac{1}{2} Q^{-1}(x-\alpha, y-\beta)\right]$

$$\boxed{f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{1}{2\pi\,\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\left(\frac{x-m_X}{\sigma_X}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-m_X}{\sigma_X}\right)\left(\frac{y-m_Y}{\sigma_Y}\right) + \left(\frac{y-m_Y}{\sigma_Y}\right)^2\right)\right]}$$

avec $m_X = \mathbb{E}(X)$, $m_Y = \mathbb{E}(Y)$.

IV Fonctions caractéristiques

Définition : $\quad \varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_X(x)\,dx$

$\varphi_{(X,Y)}(s,t) = \mathbb{E}\left(e^{i(sX+tY)}\right) = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{i(sx+ty)} f_{(X,Y)}(x,y)\,dx\,dy$

Proposition :

$\varphi_{aX+b}(t) = e^{itb}\varphi_X(at)$

Si $L(x,y) = (ax+by+\alpha,\ cx+dy+\beta)$, $\varphi_{L(X,Y)}(s,t) = e^{i(\alpha s+\beta t)}\varphi_{(X,Y)}(L^*(s,t))$

Si X et Y sont indépendantes $\quad \varphi_{(X,Y)} = \varphi_X \otimes \varphi_Y \quad$ (i.e. $\varphi_{(X,Y)}(s,t) = \varphi_X(s)\varphi_Y(t)$)

$\varphi_{X+Y} = \varphi_X \cdot \varphi_Y \quad$ (i.e. $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t)$)

Théorème :

Si $\mathbb{E}(|X|^n) < +\infty$ alors $\varphi_X(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathbb{E}(X^k)}{k!}(it)^k + o(t^n)$. ($\left|e^{ix} - \sum_{k=0}^{n}\frac{(ix)^k}{k!}\right| \leq \frac{2|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ car

En particulier : $\boxed{\mathbb{E}(X) = -i\,\varphi_X'(0), \quad \mathbb{E}(X^2) = -\varphi_X''(0)}$

$e^{ix} = \sum_{k=0}^{n}\frac{(ix)^k}{k!} + i^n \underbrace{\int_0^x \frac{(x-y)^n}{n!}\underbrace{ie^{iy}dy}_{d(e^{iy}-1)}}_{\int_0^x \frac{(x-y)^{n-1}}{(n-1)!}\underbrace{(e^{iy}-1)}_{|\cdot|\leq 2}dy}$)

Exemple :

distribution	fonction caractéristique
loi uniforme $\mathcal{U}[0,1]$	$e^{it/2}\,\dfrac{\sin t/2}{t/2}$
loi gaussienne $N(m,\sigma^2)$	$e^{imt - \frac{\sigma^2}{2}t^2}$
loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$	$\dfrac{\lambda}{\lambda - it}$

Théorème d'injectivité et d'inversion :

1) Si les v.a. X et Y ont même f.c. alors X et Y ont même loi.

2) Si $\varphi_X \in L^1$ (i.e. $\int_{-\infty}^{+\infty}|\varphi_X(t)|\,dt < \infty$) alors $f_X(x) = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}\varphi_X(t)\,dt$.

Exemple : * si X, Y sont indépendantes de lois $N(m_X,\sigma_X^2)$ et $N(m_Y,\sigma_Y^2)$ alors $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_X(t)$

$\varphi_{X+Y}(t) = \exp\left[i(m_X+m_Y)t - \frac{1}{2}(\sigma_X^2+\sigma_Y^2)t^2\right] \implies X+Y$ suit la loi $N(m_X+m_Y, \sigma_X^2+\sigma_Y^2)$

* Soit $\varphi_X(t) = 2\,\dfrac{1-\cos t}{t^2} = \left(\dfrac{\sin t/2}{t/2}\right)^2 = \varphi_{X_1+X_2}(t)$ avec X_1, X_2 suivant $\mathcal{U}[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ indépendantes

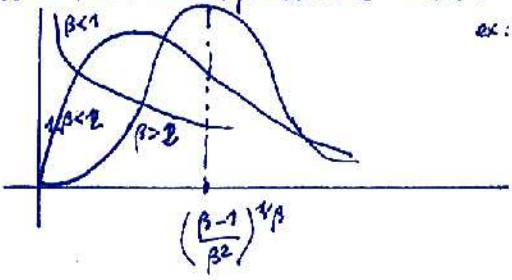
d'où $f_{X_1+X_2}(x) = (f_{X_1} * f_{X_2})(x) = (1-|x|)^+$.

ANNEXE 1 : autres v.a. absolument continues (voir aussi fiche TD n° 6 : Khi-deux, Fisher, Student)

Loi de Weibull $W(\alpha,\beta,\gamma)$: $F_X(x) = \left[1 - \exp\left(-\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^\beta\right)\right] 1\!\!1_{]\gamma,+\infty[}(x)$, $\alpha, \beta > 0$.

$$f_X(x) = \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^{\beta-1} \exp\left(-\left(\frac{x-\gamma}{\alpha}\right)^\beta\right) 1\!\!1_{]\gamma,+\infty[}(x)$$

$\left(\frac{X-\gamma}{\alpha}\right)^\beta$ suit une loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$.



ex : $\alpha = 1$, $\gamma = 0$
$\beta x^{\beta-1} e^{-x^\beta}$

$$\mathbb{E}(X) = \alpha\Gamma(1+\tfrac{1}{\beta}) + \gamma \quad var(X) = \alpha^2\left[\Gamma(1+\tfrac{2}{\beta}) - \Gamma(1+\tfrac{1}{\beta})^2\right]$$

Loi Gamma $\gamma(\alpha,\lambda)$: $f_X(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} 1\!\!1_{]0,+\infty[}(x)$, $\lambda, \alpha > 0$.

* Si $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes suivant des lois $\gamma(\alpha_1,\lambda), \dots, \gamma(\alpha_n,\lambda)$, alors $X_1 + \dots + X_n$ suit une loi $\gamma(\alpha_1 + \dots + \alpha_n, \lambda)$.
En particulier si les X_i suivent la loi $\mathcal{E}(\lambda)$, $X_1 + \dots + X_n$ suit la loi $\gamma(\lambda, n)$.
(temps d'attente avant la ne occurence)

$$\varphi_X(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - it}\right)^\alpha, \quad \mathbb{E}(X) = \frac{\alpha}{\lambda}, \quad var(X) = \frac{\alpha}{\lambda^2}.$$

* La loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ avec le paramètre aléatoire λ suivant $\gamma(\frac{p}{1-p}, n)$ donne la loi binomiale négative de paramètres p, n :

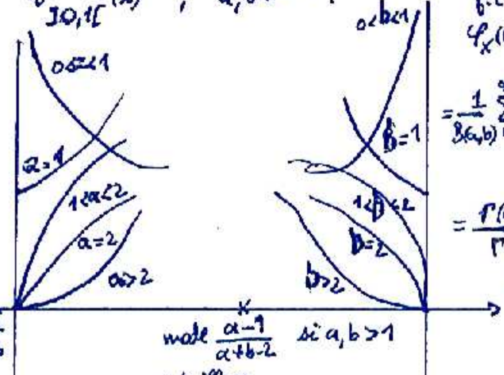
$$\mathbb{P}(\mathcal{P}(\lambda) = k) = \int \mathbb{P}(\mathcal{P}(x) = k)\, \mathbb{P}(\lambda \in dx) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\frac{x^k}{k!}\left(\frac{p}{1-p}\right)^n \frac{x^{n-1}}{\Gamma(n)} e^{-\frac{p}{1-p}x} dx$$
$$= C_{n+k-1}^{n-1}\, p^n (1-p)^k.$$

Si $\alpha = n$:
$$F_X(x) = \int_0^x \frac{\lambda^n}{(n-1)!} y^{n-1} e^{-\lambda y} dy = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(\lambda x)^k}{k!} e^{-\lambda x} = \mathbb{P}(\mathcal{P}(\lambda x) \geq n).$$

Loi Bêta $B(a,b)$: $f_X(x) = \frac{1}{B(a,b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1} 1\!\!1_{]0,1[}(x)$, $a, b > 0$.

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a}{a+b}$$

$$var(X) = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$$



f.c. :
$$\varphi_X(t) = \int_0^1 \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{B(a,b)} e^{itx} dx$$
$$= \frac{1}{B(a,b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} \underbrace{\int_0^1 x^{a+n-1}(1-x)^{b-1} dx}_{\frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b+n)}}$$
$$= \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)} \sum_n \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a+b+n)} \frac{(it)^n}{n!}$$
$\varphi_X(t) = M(a; a+b; it)$.

* X a même loi que $\frac{\chi^2_{2a}}{\chi^2_{2a} + \chi^2_{2b}}$

* Les statistiques d'ordre $X_{(i)}$ d'un échantillon de taille n de la loi uniforme sur [0,1] suivent les lois $B(i, n-i+1)$.

* Les cos et sinus de la loi uniforme sur $[0, 2\pi]$ suivent la loi Bêta $B(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ sur $]-1, 1[$ (loi de l'arc-sinus)

* Si $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes suivant les lois $B(a_1, b_1), \dots, B(a_n, b_n)$ avec $a_i = a_{i+1} + b_{i+1}$ alors $X_1 \cdots X_2$ suit la loi $B(a_n, b_1 + \dots + b_n)$

ANNEXE 2 : médiane

On appelle médiane de X tout réel m tel que $\mathbb{P}(X \geq m) \geq \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(X \leq m) \geq \frac{1}{2}$, ou encore $\mathbb{P}(X < m) \leq \frac{1}{2} \leq \mathbb{P}(X \leq m)$. Si la f.r. de X est continue on a $F_X(m) = \frac{1}{2}$.

Un tel réel existe toujours. En effet, soit $\psi(x) = \mathbb{P}(X \leq x) - \mathbb{P}(X \geq x)$. ψ est croissante, variant de -1 à 1. Donc $\exists \underset{\alpha_1 \leq \alpha_2}{\alpha_1, \alpha_2} \in \mathbb{R}$ / $\psi|_{]-\infty,\alpha_1[} < 0$, $\psi|_{]\alpha_1,\alpha_2[} = 0$, $\psi|_{]\alpha_2,+\infty[} > 0$.

1er cas : $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$. Alors $\psi(\alpha^-) < 0 < \psi(\alpha^+) \Rightarrow \begin{cases} \mathbb{P}(X<\alpha) < \mathbb{P}(X \geq \alpha) = 1 - \mathbb{P}(X<\alpha) \\ \mathbb{P}(X \leq \alpha) > \mathbb{P}(X > \alpha) = 1 - \mathbb{P}(X \leq \alpha) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbb{P}(X<\alpha) < \frac{1}{2} \\ \mathbb{P}(X \leq \alpha) \geq \frac{1}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow \alpha$ est une médiane de X.

En fait α est l'unique médiane :
si $\beta < \alpha$ $\psi(\beta-) \leq \psi(\beta^+) < 0 \Rightarrow \mathbb{P}(X < \beta) < \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(X \leq \beta) \leq \frac{1}{2}$.
idem avec $\beta > \alpha$. β n'est pas une médiane.

2e cas : $\alpha_1 < \alpha_2$. Alors $\forall \alpha \in]\alpha_1,\alpha_2[$, $\psi(\alpha) = 0 \Rightarrow \mathbb{P}(X \leq \alpha) = \mathbb{P}(X \geq \alpha)$
$\Rightarrow 2\mathbb{P}(X \leq \alpha) = \mathbb{P}(X \leq \alpha) + \mathbb{P}(X \geq \alpha) = 1 + \mathbb{P}(X = \alpha) \geq 1 \Rightarrow \mathbb{P}(X \leq \alpha) \geq \frac{1}{2}$
$\Rightarrow \alpha$ est une médiane de X. $\mathbb{P}''(X \geq \alpha)$

En fait $[\alpha_1, \alpha_2]$ est l'ensemble des médianes de X. (même dém. que dans le cas 1.)

Proposition : Toute médiane m de X vérifie $\mathbb{E}(|X-m|) = \inf_{\alpha \in \mathbb{R}} \mathbb{E}(|X-a|)$ (si $E(|X|) < \infty$)

Démonstration : on a le résultat suivant : $\mathbb{E}(|X-b|) - \mathbb{E}(|X-a|) = \int_a^b \psi(x)\,dx$.

En effet : $|x-b| - |x-a| = \begin{cases} b-a & \text{si } x \leq a \\ a+b-2x & \text{si } a \leq x \leq b \\ a-b & \text{si } x \geq b \end{cases}$

donc $\mathbb{E}(|X-b| - |X-a|) = (b-a)\mathbb{P}(X \leq a) + \mathbb{E}[(a+b-2X)\mathbb{1}_{\{a<X\leq b\}}] + (a-b)\mathbb{P}(X>b)$.

D'autre part : $\int_a^b \mathbb{P}(X \leq x)\,dx = \int_a^b dx \int_{\{X \leq x\}} d\mathbb{P} = \int d\mathbb{P} \int_a^b \mathbb{1}_{\{X \leq x\}}\,dx = \mathbb{E}[(b - a\vee X)^+]$

$= (b-a)\mathbb{P}(X \leq a) + \mathbb{E}[(b-X)\mathbb{1}_{\{a<X\leq b\}}]$

$\int_a^b \mathbb{P}(X \geq x)\,dx = \int_a^b dx \int_{\{X \geq x\}} d\mathbb{P} = \int d\mathbb{P} \int_a^b \mathbb{1}_{\{X \geq x\}}\,dx = \mathbb{E}[(b\wedge X - a)^+]$

$= (b-a)\mathbb{P}(X > b) + \mathbb{E}[(X-a)\mathbb{1}_{\{a<X\leq b\}}]$

d'où $\int_a^b \psi(x)\,dx = (b-a)\mathbb{P}(X \leq a) + \mathbb{E}[(a+b-2X)\mathbb{1}_{\{a<X\leq b\}}] + (a-b)\mathbb{P}(X>b)$.
ok.

Alors $\mathbb{E}(|X-m|) - \mathbb{E}(|X-a|) = \begin{cases} \int_a^m \psi(x)\,dx & \text{si } a \leq m \\ -\int_m^a \psi(x)\,dx & \text{si } a \geq m \end{cases}$.

Or $\psi|_{]-\infty,m[} \leq 0 \leq \psi|_{]m,+\infty[}$ d'où $\forall a \in \mathbb{R}$ $\mathbb{E}(|X-m|) \leq \mathbb{E}(|X-a|)$. □