LOIS LIMITES

I Convergence en loi - convergence en probabilité

1) Convergence en loi

<u>Définition</u> : $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} X \iff \forall x \in \mathbb{R}$ tel que F_X continue en x, $F_{X_n}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} F_X(x)$.

<u>Remarques</u> :
- la définition ne fait pas appel explicitement à X_n, X mais seulement à F_{X_n}, F_X.
- si les v.a. X_n et X sont absolument continues, on n'a pas nécessairement $f_{X_n} \to f_X$. Par exemple :

$$F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ x - \dfrac{\sin(2\pi n x)}{2\pi n} & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x>1 \end{cases} \xrightarrow[n\to\infty]{} F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ x & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x>1 \end{cases}$$

Donc $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} X$ alors que $f_{X_n} \not\to f_X$.

<u>Théorème de Scheffé</u> : | si $f_{X_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} f_X$ p.p. alors $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} X$.

- la définition n'impose pas $F_{X_n}(x) \to F_X(x)$ lorsque F_X est discontinue en x.
Ex : si $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite i.i.d de Bernoulli, $\mathbb{P}(X_n = \pm 1) = \frac{1}{2}$, alors $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathcal{L}} 0$ (LGN cf. ci-dessous) où $S_n = X_1 + \dots + X_n : B(n, \frac{1}{2})$. En effet :

$$F_{S_n/n}(x) = \begin{cases} 1 - \mathbb{P}(\frac{S_n}{n} > x) & \text{si } x>0 \\ \mathbb{P}(\frac{S_n}{n} < x) & \text{si } x<0 \end{cases} \longrightarrow F(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x<0 \end{cases}$$

(en effet : si $x>0$: $\mathbb{P}(\frac{S_n}{n} > x) \underset{x>0}{\leq} \mathbb{P}(|\frac{S_n}{n}| > x) \leq \frac{\operatorname{var}(\frac{S_n}{n})}{x^2} = \frac{1}{n x^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$)
 $< x,\ x<0$

Pour $X \equiv 0$, $F_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x<0 \end{cases}$. Si n impair, $S_n \neq 0$ et $F_{\frac{S_n}{n}}(0) = \frac{1}{2} \not\to F_X(0)$.

<u>Théorème de continuité de f.c.</u> (Paul Lévy) : | Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite v.a. et X une v.a.
$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X \iff \forall t \in \mathbb{R},\ \varphi_{X_n}(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \varphi_X(t)$.

<u>Démonstration</u> : 1) La transformée de Fourier des mesures est continue ($X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} X \iff \mathbb{P}_{X_n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{étroit.}} \mathbb{P}_X$)

idée : e^{itx} [illegible]

En effet : On voit facilement que $F_X(x-) = \sup F_X(x - \frac{1}{k}) \leq \underline{\lim}_n F_{X_n}(x-) \leq \overline{\lim}_n F_{X_n}(x-) \leq F_X(x)$
donc $\forall x$ t.q. $\mathbb{P}(X=x)=0$, $\mathbb{P}(X_n < x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{P}(X<x)$ et même $\forall a,b$ t.q $\mathbb{P}(X=a)=\mathbb{P}(X=b)$,
$\mathbb{P}(X_n \in]a,b[) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{P}(X \in [a,b])$. Alors par engendrement $\forall f \in C_b(\mathbb{R})$ $\int f\, d\mathbb{P}_{X_n} \to \int f\, d\mathbb{P}_X$.

idée : [illegible] transformées de Fourier

2) Réciproquement : $\langle \mathcal{F} f, \mathbb{P}_X \rangle = \langle f, \mathcal{F}\mathbb{P}_X \rangle \Rightarrow \forall g \in C_c(\mathbb{R})$ (supp g compact), $\int g\, d\mathbb{P}_{X_n} = \frac{1}{2\pi}\int \overline{\mathcal{F}g}(t)\varphi_{X_n}(t)\,dt \xrightarrow[n\to\infty]{} \int g\, d\mathbb{P}_X \Rightarrow \mathbb{P}_{X_n} \xrightarrow{\text{vague.}} \mathbb{P}_X$. $\square$

<u>Exemples</u> : a) soit $X_n : \mathcal{B}(n, p_n)$ avec $n p_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda$. $\varphi_{X_n}(t) = (p_n e^{it} + 1 - p_n)^n = \left[1 + \frac{\lambda}{n}(e^{it}-1) + o(\frac{1}{n})\right]^n$
$\xrightarrow[n\to+\infty]{} \exp[\lambda(e^{it}-1)] = \varphi_X(t)$ où $X : \mathcal{P}(\lambda)$

donc $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X$, $X : \mathcal{P}(\lambda)$.

En pratique on utilise l'approximation pour $n \geq 30$, $p_n \leq 0{,}1$, $n p_n \leq 10$.

<u>Application</u> : <u>loi des événements rares</u>.
On observe N occurrences dans le laps de temps T. On fragmente l'intervalle de temps en un grand nombre d'unités de temps δ de telle sorte qu'il y ait en moyenne 0 ou 1 occurrence dans le laps δ :
$\frac{N\delta}{T}$ occurrences dans le laps de temps δ.

Choisir $\delta > 0$ tel que $p = \frac{N\delta}{T} \ll 1$.
Alors le nombre d'occurrences dans le temps $t < T$ suit la loi $\mathcal{B}(n, p)$

où $n = \frac{t}{\delta}$ est le nombre d'épreuves réalisées dans le temps t fragmenté en unités δ.

On a $np = \frac{Nt}{T} = \lambda$ d'où $B(n,p) \xrightarrow[\delta\to 0]{} \mathcal{P}(\lambda)$.

Ainsi le nombre (aléatoire) d'occurrences observées pendant le laps de temps t suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\frac{Nt}{T})$.

b) Soit $X_n : b(n,p_n)$; $P(X_n=k) = C_{n}^{k}\, p_n^{n}(1-p_n)^{k}$, $k\geq 0$ avec $n(1-p_n)\to\lambda$.

$$\varphi_{X_n}(t) = \left[\frac{p_n}{1-(1-p_n)e^{it}}\right]^n = \left[\frac{1-\frac{\lambda}{n}+o(\frac{1}{n})}{1-\frac{\lambda}{n}e^{it}+o(\frac{1}{n})}\right]^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{\lambda(e^{it}-1)} = \varphi_X(t) \text{ où } X:\mathcal{P}(\lambda),$$

donc $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} X$, $X:\mathcal{P}(\lambda)$.

<u>Cas des v.a. discrètes</u> : si $X_n, X : \Omega \to \mathbb{N}$, alors $\left[X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} X\right] \iff \left[\forall i\in\mathbb{N}\ \ P(X_n=i) \xrightarrow[n\to\infty]{} P(X=i)\right]$

<u>démonstration</u>: <u>C.N.</u>: $P(X_n=i) = P(i-\frac{1}{2} < X_n \leq i+\frac{1}{2}) = F_{X_n}(i+\frac{1}{2}) - F_{X_n}(i-\frac{1}{2})$

Si $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$, alors $F_{X_n}(x) \longrightarrow F_X(x)$ pour tout point de continuité x de X.

$i\pm\frac{1}{2}$ sont des points de continuité, donc $P(X_n=i) \xrightarrow[n\to\infty]{} F_X(i+\frac{1}{2}) - F_X(i-\frac{1}{2}) = P(X=i)$.

<u>C.S.</u> : $F_{X_n}(x) = \sum_{i\leq x} P(X_n=i)$ somme finie.

Si $P(X_n=i) \xrightarrow[n\to\infty]{} P(X=i)\ \forall i$, alors $F_{X_n}(x) \longrightarrow \sum_{i\leq x} P(X=i) = F_X(x)$ d'où $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$. □

Problème : la convergence en loi n'est pas stable par somme : $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ et $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Y \not\Rightarrow X_n+Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X+Y$ d'où le [illegible] suivant.

ex : $(X_n)_{n\geq 1}$ suite de v.a. de Bernoulli $\frac{1}{2}$ iid, $Y_n = 1-X_n$. X_n et $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X_1$ et $X_n+Y_n = 1 \not\xrightarrow{\mathcal{L}} 2X_1$.

2) <u>Convergence en probabilité</u>

<u>Définition</u> : $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} X \iff \forall \varepsilon>0,\ P(|X_n-X|>\varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

[facultatif : convergence presque sûre : $X_n \longrightarrow X$ p.s. $\iff P(X_n \xrightarrow[n\to\infty]{} X) = 1$.]

<u>Remarque</u> : Contrairement à la convergence en loi, la convergence en probabilité fait appel explicitement à X_n et X. Il y a aussi unicité p.s. de la v.a. limite : si $X_n \xrightarrow{P} X$ et Y, alors $P(|X-Y|>\varepsilon) \leq P(|X_n-X|>\frac{\varepsilon}{2}) + P(|X_n-Y|>\frac{\varepsilon}{2}) \xrightarrow[n]{} 0$ donc $P(X\neq Y) = 0$.

<u>Théorème</u> : $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} X \Rightarrow X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} X$

<u>démonstration</u> : $P(X\leq x-\varepsilon) - P(|X_n-X|>\varepsilon) \leq P(X_n\leq x) \leq P(X\leq x+\varepsilon) + P(|X_n-X|>\varepsilon)$

en effet 1) $(X\leq x-\varepsilon) \subset (X_n\leq x) \cup [(X_n>x)\cap(|X_n-X|>\varepsilon)] \Rightarrow$ 1ère inégalité

2) $(X_n\leq x) \subset (X\leq x+\varepsilon) \cup [(X>x+\varepsilon)\cap(|X_n-X|>\varepsilon)] \Rightarrow 2^e$.

Si $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} X$, alors $P(|X_n-X|>\varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et donc

$$\forall\varepsilon>0,\ F_X(x-\varepsilon) \leq \underline{\lim}\, F_{X_n}(x) \leq \overline{\lim}\, F_{X_n}(x) \leq F_X(x+\varepsilon),$$

soit $F_X(x^-) \leq \underline{\lim}\, F_{X_n}(x) \leq \overline{\lim}\, F_{X_n}(x) \leq F_X(x^+) = F_X(x)$.

Si x est un point de continuité de F_X, alors $F_{X_n}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} F_X(x)$ et $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} X$. □

<u>Réciproque fausse</u> : * Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite iid de Bernoulli $\frac{1}{2}$: $P(X_n=0) = P(X_n=1) = \frac{1}{2}$.

Les F_{X_n} sont identiques d'où $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} X_1$.

Or $P(|X_n-X_1|>\varepsilon) = P(X_n\neq X_1) = \frac{1}{2}$ si $\varepsilon\in]0,1]$ d'où $X_n \not\xrightarrow{P} X$.

* Soit X, Y 2 v.a. ≠ de même loi, $X_{2n}=X$, $X_{2n+1}=Y$. Alors $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$, mais $(X_n) \not\xrightarrow{P}$ ... En fait (X_n) ne cv pas en P (pas de Cauchy)

<u>Exception</u> : si $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} C$ (v.a. p.s. constante) alors $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} C$.

En effet : $P(|X_n-C|>\varepsilon) \leq 1 - \underbrace{F_{X_n}(C+\varepsilon)}_{\to F_C(C+\varepsilon)=1} + \underbrace{F_{X_n}(C-\varepsilon)}_{\to F_C(C-\varepsilon)=0} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ donc $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} C$.

Théorème (Slutsky) | Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue.
Si $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} X$ et $Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} Y$, alors $f(X_n, Y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{P} f(X,Y)$ (mais pas en loi)

(démonstration : Ducel p84 ex VI-5)

Exemple :
* $X_n+Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} X+Y$ et $X_n Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} XY$ mais pas en loi.
* Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} X$ alors $f(X_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(X)$.
* si $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ et $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \underline{C = c^{te}}$ alors $X_n+Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X+C$ et $X_n Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} CX$. → cf dem en face

En effet : $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} C \Rightarrow Y_n \xrightarrow{P} C$. Alors $F_{X_n+Y_n}(x) \le \mathbb{P}(|Y_n - c| > \varepsilon) + \mathbb{P}(|Y_n-c| \le \varepsilon, \overbrace{X_n+Y_n}^{\ge X_n-\varepsilon+c} \le x)$
$\le \mathbb{P}(|Y_n-c|>\varepsilon) + F_{X_n}(x+\varepsilon-c) \to F_{X+c}(x+\varepsilon)$
et $1 - F_{X_n+Y_n}(x) \le \mathbb{P}(|Y_n-c|>\varepsilon) + \mathbb{P}(|Y_n-c|\le\varepsilon, \underbrace{X_n+Y_n}_{\le X_n+\varepsilon+c} > x)$
$\le \mathbb{P}(|Y_n-c|>\varepsilon) + 1 - F_{X_n}(x-\varepsilon-c) \to 1 - F_{X+c}(x-\varepsilon)$. ok

II Loi des grands nombres

Préliminaire : inégalités de Markov et Bienaymé-Tchebychev :

Si $\mathbb{E}(|X|) < \infty$ alors $\mathbb{P}(|X| \ge a) \le \frac{\mathbb{E}(|X|)}{a}$. En effet : $E(|X|) \ge \mathbb{E}(|X| \mathbb{1}_{|X|\ge a}) \ge a\mathbb{P}(|X| \ge a)$.
Si $\mathrm{var}(X) < \infty$ alors $\mathbb{P}(|X - E(X)| \ge a) \le \frac{\mathrm{var}(X)}{a^2}$. (Markov avec $(X-E(X))^2$)

Loi faible des grands nombres : Soit $(X_n)_{n\ge1}$ une suite de v.a. iid telle que $\mathbb{E}|X_n| < \infty$.
Jacques Bernoulli 1654-1705 | Posons $\mathbb{E}(X_n) = m$, $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Alors $\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{P \text{ ou } \mathcal{L}} m$.

Démonstration : 1ère méthode. On suppose $\mathrm{var}(X_n) < \infty$. Alors avec Bienaymé-Tchebychev :
$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| > \varepsilon\right) \le \frac{\mathrm{var}(\frac{S_n}{n})}{\varepsilon^2} = \frac{\mathrm{var}(X_1)}{n\varepsilon^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \text{ Donc } \frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{P} m.$$
2e méthode. avec les f.c. : $\varphi_{\frac{S_n}{n}}(t) = \varphi_{X_1}\left(\frac{t}{n}\right)^n = \left[1 + im\frac{t}{n} + o\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{imt} = \varphi_m(t)$.

Donc $\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} m$. □

Exemples : a) **Théorème de Bernoulli** : $(X_n)_{n\ge1}$ suite de Bernoulli p. (ex : lancers de pièce)

Alors $\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{P \text{ ou } \mathcal{L}} p = \mathbb{P}(X_1 = 1)$ et $\mathbb{P}(|\frac{S_n}{n} - p| > \varepsilon) \le \frac{1}{4n\varepsilon^2}$. ($\mathrm{var}(X_1) = p(1-p) \le \frac{1}{4}$)

Buffon joua 4040 coups, obtint 2049 piles. $X_n = \begin{cases} 1 & \text{si le } n^e \text{ lancer donne Pile} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
X_n suit la loi de Bernoulli p, p inconnu.
Pour l'observation ω_0 de Buffon, $\overline{X_n}(\omega_0) = \frac{S_n(\omega_0)}{n} = \frac{2049}{4040} \simeq 0{,}507$ pour $n = 4040$.

Choisissons ε tel que $\frac{1}{4\varepsilon^2 \times 4040} = 0{,}05$. Alors $\varepsilon \simeq 0{,}0352$.

Donc $\mathbb{P}(|\overline{X}_{4040} - p| \ge 0{,}0352) \le 0{,}05$ i.e. $|p - 0{,}507| \ge 0{,}0352$ avec proba $\le 0{,}05$
ou encore $0{,}4718 \le p \le 0{,}5422$ avec Proba $\le 5\%$.
$I(\omega_0) = [0{,}4718 ; 0{,}5422]$ intervalle de confiance pour p de niveau $0{,}95$.

b) **Théorème de Monte-Carlo** : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue, $(X_n)_{n\ge1}$ iid unif. sur $[a,b]$. Alors $\frac{f(X_1) + \dots + f(X_n)}{n} \xrightarrow{P} \frac{1}{b-a}\int_a^b f$.

complément : si $(X_n)_n$ est iid telle que $\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} Y$ où Y est une v.a., alors Y est soit une v.a. p.s. C^{te}, soit de Cauchy
(en effet : $\forall t, \varphi_{S_n/n}(t) = \varphi_{X_1}\left(\frac{t}{n}\right)^n \to \varphi_Y(t) \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}\ \varphi_Y(kt) = \varphi_Y(t)^k \Rightarrow \exists a \ge 0, m \in \mathbb{R} / \varphi_Y(t) = e^{imt - a|t|}$.)

III Théorème-limite central

cf. cours Buchwalter p 161

On a vu $\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} m$. Que dire de $\frac{S_n}{n} - m$?

Remarque préliminaire : si $(X_n)_{n\ge1}$ est une suite iid suivant $N(m, \sigma^2)$ alors $\frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} : N(0,1)$.

Théorème Central Limit : Soit $(X_n)_{n\ge1}$ une suite de v.a. iid de moyenne m et de variance σ^2.

Alors $\frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} N(0,1)$,
i.e. $\forall a,b \in \mathbb{R}, a<b$, $\mathbb{P}\left(a \le \frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \le b\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = \Phi(b) - \Phi(a)$.

justifié par l'inégalité de Berry-Esseen lorsque x dépend de n

<u>Interprétation</u> : $\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} - m \le x\right) \approx \int_{-\infty}^{\frac{x\sqrt{n}}{\sigma}} e^{-\frac{u^2}{2}} \frac{du}{\sqrt{2\pi}} = \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2/n}} \frac{du}{\sqrt{2\pi}\,\sigma/\sqrt{n}} = \Phi\left(\frac{x\sqrt{n}}{\sigma}\right)$

i.e. asymptotiquement : $\frac{S_n}{n} - m$ suit approximativement la loi $N\left(0, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

ou encore $S_n : N(nm, n\sigma^2)$.

<u>Démonstration</u> : avec les f.c. $\varphi_{\frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}}}(t) = \left[\varphi_{\underbrace{\frac{X_1 - m}{\sigma}}_{\text{centrée réduite}}}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right]^n = \left[1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-\frac{t^2}{2}}$. □

<u>Applications</u> : 1) Approximation de la loi binomiale par la gaussienne.

<u>Théorème de Moivre-Laplace</u>. Soit $p \in]0,1[$, $S_n : B(n,p)$.

Abraham de Moivre (1667-1754)
Pierre Simon, Marquis de Laplace (1749-1827)

Alors $\forall x \in \mathbb{R}$ $\mathbb{P}\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le x\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}} = \Phi(x)$

Utilisation pour n grand ($n \ge 20$, $p \simeq \frac{1}{2}$)

$$\mathbb{P}(a \le S_n \le b) \approx \int_a^b e^{-\frac{(x-np)^2}{2np(1-p)}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} \quad \text{i.e. } B(n,p) \simeq N(np, np(1-p)).$$

On choisit plutôt $\mathbb{P}(a \le S_n \le b) \simeq \Phi\left(\frac{b - np + \frac{1}{2}}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{a - np - \frac{1}{2}}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$ (correction de continuité)

2) Approximation de la loi de Poisson par la gaussienne.

<u>Théorème</u> : Soit $\lambda > 0$, $X_n : \mathcal{P}(\lambda)$. Alors $\mathbb{P}\left(\frac{S_n - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}} \le x\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}} = \Phi(x)$.

Utilisation : $\mathcal{P}(\lambda) \simeq N(\lambda, \lambda)$ pour λ grand ($\lambda \ge 10$) ; ici λ est le λn du dessus.

3) Approximation de la loi du Khi-deux par la gaussienne.

<u>Théorème</u> : Soit X_n : Gamma $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ $(= \chi^2(1))$. Alors $\mathbb{P}\left(\frac{S_n - n}{\sqrt{2n}} \le x\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}} = \Phi(x)$.

Utilisation : $\chi^2(n) \simeq N(n, 2n)$ pour n grand.

<u>Complément</u> : <u>inégalités de Berry-Esseen</u> : soit $(X_n)_{n\ge 1}$ une suite de v.a. i.i.d de moyenne m, variance σ^2 et $F_n(x) = \mathbb{P}\left(\frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \le x\right)$, $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}}$

1) si $\exists\, \varepsilon \in]0,1]$ tel que $E|X_1 - m|^{2+\varepsilon} < \infty$ alors $\sup_{x\in\mathbb{R}} |F_n(x) - \Phi(x)| = \|F_n - \Phi\|_\infty \le C_\varepsilon \frac{E|X_1 - m|^{2+\varepsilon}}{\sigma^{2+\varepsilon} n^{\varepsilon/2}}$ avec $C_\varepsilon \le 0{,}9051$.

exemple : $\varepsilon = 1$. $\|F_n - \Phi\| \le C_1 \frac{E|X_1 - m|^3}{\sigma^3 \sqrt{n}}$ avec $C_1 \le 0{,}82$.

2) plus généralement si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ est paire ↗ et $\frac{x}{g(x)}$ ↗ sur $\mathbb{R}^+$ et si $E[|X_1 - m|^2 g(X_1 - m)] < \infty$:
$\|F_n - \Phi\| \le C_g \frac{E[|X_1 - m|^2 g(X_1 - m)]}{\sigma^2 g(\sigma\sqrt{n})}$.

3) si $\exists\, \varepsilon \in]0,1]$ tel que $E|X_1 - m|^{2+\varepsilon} < \infty$ alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $|F_n(x) - \Phi(x)| \le C_\varepsilon \frac{E|X_1 - m|^{2+\varepsilon}}{\sigma^{2+\varepsilon} n^{\varepsilon/2} [1 + |x|^{2+\varepsilon}]}$

Bibliographie : Boccara : Probabilités ch.3.
Ducel : Introduction à la théorie mathématique des probabilités ch.6.