TESTS D'HYPOTHESE

I Test, décision, risque (théorie de Neyman-Pearson, Jerzy Neyman 1894-1981, Egon Sharpe Pearson, 1895-1980 fils de Karl Pearson)

Considérons une population dont le caractère étudié dépend d'un paramètre θ inconnu. Après une (ou plusieurs) expérience on pense que $\theta = \theta_0$. On veut tester l'hypothèse $\theta = \theta_0$ contre une autre. On appelle hypothèse nulle $H_0 : \theta = \theta_0$
hypothèse alternative $H_1 : \theta \neq \theta_0$ (resp. $\theta < \theta_0$, $\theta > \theta_0$, $\theta = \theta_1$).
On va tester l'hypothèse (simple) $\theta = \theta_0$ contre l'hypothèse composite $\theta \neq \theta_0$ (test bilatéral) ou $\theta < \theta_0$, ou $\theta > \theta_0$ (tests unilatéraux) ou $\theta = \theta_1$ (hypothèse simple).

Règle de décision : acceptation (faute de mieux) ou rejet de H_0. On pose $D = \{\text{acceptation de } H_0\}$.

Risques de 1ère et 2e espèces dans le test H_0 versus H_1.

risque de 1ère espèce : $\alpha = \mathbb{P}(\overline{D}/H_0)$ = probabilité de rejeter H_0 alors qu'elle est vraie (rejet d'une hypothèse vraie)

risque de 2e espèce : $\beta = \mathbb{P}(D/H_1)$ = probabilité d'accepter H_0 alors que H_1 est vraie (acceptation d'une hypothèse fausse)

		états de la réalité	
		H_0 vraie	H_1 vraie
décisions	D	$1-\alpha$	β
	$\overline{D}$	α	$1-\beta$

métaphore juridique : jugement d'un prévenu H_0 : le prévenu est coupable
H_1 : le prévenu est innocent
décision de l'avocat général : $D = \{\text{condamner le prévenu}\}$

$\alpha = \mathbb{P}\{\text{acquitter le prévenu qui est coupable}\}$
$\beta = \mathbb{P}\{\text{condamner le prévenu qui est innocent}\}$

On examinera essentiellement des tests bilatéraux.

II Cas d'une population normale

Soit une population dont le caractère étudié suit une loi normale $N(m, \sigma^2)$.
Rappel : soit $\hat{m}_n = \overline{X}$, $\widehat{\sigma_n^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2$, $\widehat{S_n^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$, $\widehat{S}_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$; alors $\hat{m}_n : N(m, \frac{\sigma^2}{n})$,
$n\frac{\widehat{\sigma_n^2}}{\sigma^2} : \chi^2(n)$, $n\frac{\widehat{S_n^2}}{\sigma^2} = (n-1)\frac{\widehat{S}_n^2}{\sigma^2} : \chi^2(n-1)$, $\sqrt{n}\,\frac{\hat{m}_n - m}{\sqrt{\widehat{\sigma_n^2}}} : T(n)$, $\sqrt{n-1}\,\frac{\hat{m}_n - m}{\sqrt{\widehat{S_n^2}}} : T(n-1)$

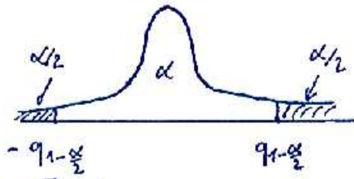
1) Test sur la moyenne m.

a) cas σ connu : $\hat{m}_n = \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i : N(m, \frac{\sigma^2}{n})$. Tester $H_0 : m = m_0$.

Sous H_0, $\hat{m}_n : N(m_0, \frac{\sigma^2}{n})$. Si tel est le cas on pourra tout de même observer des fluctuations (d'échantillonnage) autour de m_0. Par contre, une trop grande dispersion autour de m_0 serait anormale et suggérerait de rejeter H_0.

Variable de décision : $N = \frac{\hat{m}_n - m_0}{\sigma/\sqrt{n}} : N(0,1)$. Soit $q_{1-\frac{\alpha}{2}}$ le $(1-\frac{\alpha}{2})$-quantile de N

on a donc
$$\begin{cases} \mathbb{P}\left(\frac{\hat{m}_n - m_0}{\sigma/\sqrt{n}} \in [-q_{1-\frac{\alpha}{2}}, q_{1-\frac{\alpha}{2}}]\right) = 1-\alpha \\ \mathbb{P}\left(\frac{\hat{m}_n - m_0}{\sigma/\sqrt{n}} \notin [-q_{1-\frac{\alpha}{2}}, q_{1-\frac{\alpha}{2}}]\right) = \alpha \end{cases}$$



Événement décision : $D := \left\{\frac{\hat{m}_n - m_0}{\sigma/\sqrt{n}} \in [-q_{1-\frac{\alpha}{2}}, q_{1-\frac{\alpha}{2}}]\right\} = \{m_0 \in I_{m_0}\}$
où I_{m_0} est un intervalle de confiance pour m_0 de niveau $1-\alpha$.
$\mathbb{P}(D/H_0) = 1-\alpha$ et $\mathbb{P}(\overline{D}/H_0) = \alpha$

Numériquement : on calcule $N = \dfrac{\hat{m}_n - m_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ sur l'échantillon observé. $\begin{cases} \text{si } N \in [-q_{1-\frac{\alpha}{2}}, q_{1-\frac{\alpha}{2}}] : \text{accepter } H_0 \\ \text{si } N \notin [-q_{1-\frac{\alpha}{2}}, q_{1-\frac{\alpha}{2}}] : \text{rejeter } H_0 \end{cases}$

exemple. On estime qu'un caractère X d'un certain stock de production suit la loi $N(m=240, \sigma=50)$. On prélève un échantillon de $n=40$ pièces et l'on observe une moyenne $\bar{x} = \hat{m}_{40} = 260$. Au risque de 5%, peut-on considérer que m vaut effectivement $m_0 = 240$?

Réponse : sous $H_0 : m = m_0$ on a $N = \dfrac{\hat{m}_{40} - m_0}{\sigma/\sqrt{n}} : N(0,1)$. Ici $N_{\text{observé}} = \dfrac{20}{\frac{5}{2}\sqrt{10}} \approx 2.53 > 1.96$ ($\alpha = 5\%$)

$\rightarrow$ suggère le rejet de H_0.

Calcul du risque β dans le cas $H_1 : m \neq m_0$. Sous H_1, $\hat{m}_n : N(m, \frac{\sigma^2}{n})$ ou encore $\dfrac{\hat{m}_n - m}{\sigma^2/\sqrt{n}} : N(0,1)$.

$$\beta(m) = \mathbb{P}(D/H_1) = \mathbb{P}\left(\frac{\hat{m}_n - m}{\sigma/\sqrt{n}} \in \left[\frac{m_0-m}{\sigma/\sqrt{n}} - q_{1-\frac{\alpha}{2}}, \frac{m_0-m}{\sigma/\sqrt{n}} + q_{1-\frac{\alpha}{2}}\right]\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{m_0-m}{\sigma/\sqrt{n}} + q_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) - \Phi\left(\frac{m_0-m}{\sigma/\sqrt{n}} - q_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) \quad \text{où } \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} \frac{du}{\sqrt{2\pi}}$$

Puissance de rejet du test : $\gamma(m) = 1 - \beta(m) = \mathbb{P}(\overline{D}/H_1)$

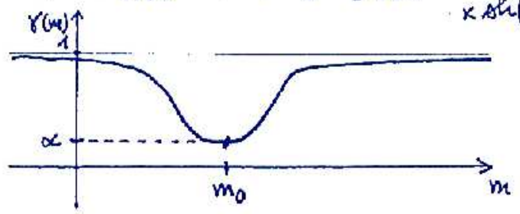
$$\gamma'(m) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi/n}}\left[\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{m_0-m}{\sigma/\sqrt{n}} + q_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)^2\right) - \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{m_0-m}{\sigma/\sqrt{n}} - q_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)^2\right)\right] = \frac{2}{\sigma}\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(m-m_0)^2}{\sigma^2/n} + q^2_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)} \times \operatorname{sh}\left(q_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{m-m_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

$\gamma(2m_0 - m) = \gamma(m)$

$\gamma(m_0) = 1 - \Phi(q_{1-\frac{\alpha}{2}}) - \Phi(-q_{1-\frac{\alpha}{2}}) = \alpha$

γ a un minimum en m_0.

$\Rightarrow (\forall m, \gamma(m) \geq \gamma(m_0)$ i.e $\boxed{1-\beta(m) \geq \alpha}$



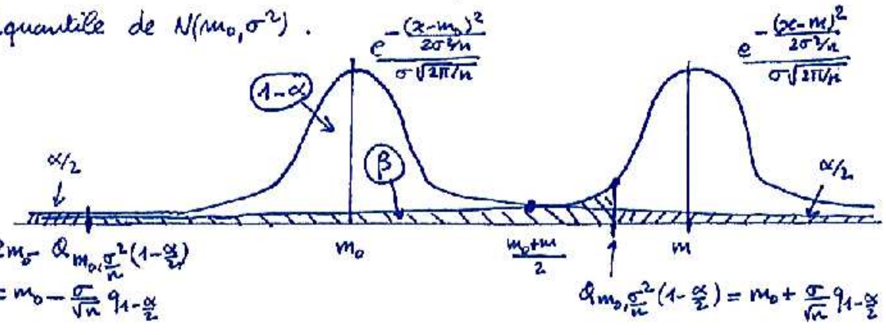
Interprétation graphique du risque β :

Notons Φ_{m,σ^2} la fonction de répartition de la loi $N(m,\sigma^2)$: $\Phi_{m,\sigma^2}(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(u-m)^2}{2\sigma^2}} \frac{du}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}$
et $\Phi \equiv \Phi_{0,1}$ celle de la loi normale $N(0,1)$.

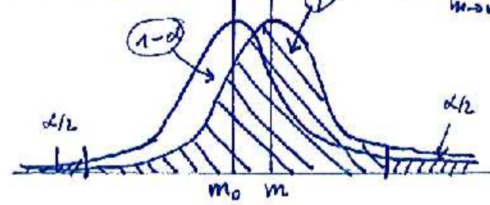
On a $\Phi_{m,\sigma^2}(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$. Soit Q_{m,σ^2} la fonction réciproque (quantile de $N(m,\sigma^2)$).
et $Q_{0,1} \equiv Q$. On a $Q_{m,\sigma^2}(x) = m + \sigma Q(x)$.

Alors $\beta(m) = \Phi\left[\dfrac{(m_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} q_{1-\frac{\alpha}{2}}) - m}{\sigma/\sqrt{n}}\right] - \Phi\left[\dfrac{(m_0 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} q_{1-\frac{\alpha}{2}}) - m}{\sigma/\sqrt{n}}\right] = \Phi_{m,\frac{\sigma^2}{n}}(m_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} q_{1-\frac{\alpha}{2}}) - \Phi_{m,\frac{\sigma^2}{n}}(m_0 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} q_{1-\frac{\alpha}{2}})$

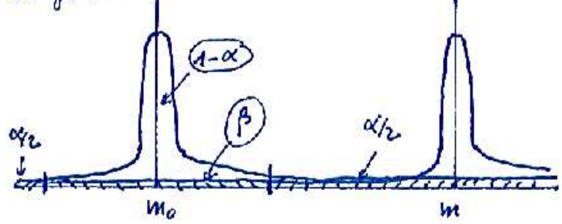
donc $\beta(m)$ représente l'aire de la surface sous la courbe $x \mapsto \dfrac{e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2/n}}}{\sigma\sqrt{2\pi/n}}$ sur l'intervalle
$[m_0 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \underbrace{q_{1-\frac{\alpha}{2}}}_{Q(1-\frac{\alpha}{2}) = -Q(\frac{\alpha}{2})}, m_0 + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \underbrace{q_{1-\frac{\alpha}{2}}}_{Q(1-\frac{\alpha}{2})}] = [\underbrace{2m_0 - Q_{m_0,\frac{\sigma^2}{n}}(1-\frac{\alpha}{2})}_{Q_{m_0,\frac{\sigma^2}{n}}(\frac{\alpha}{2})}, Q_{m_0,\frac{\sigma^2}{n}}(1-\frac{\alpha}{2})]$, qui est l'intervalle
$\frac{\alpha}{2}$-interquantile de $N(m_0,\sigma^2)$.



si m est proche de m_0 : $\beta(m) \nearrow_{m \to m_0} 1-\alpha$



si m est grand :



Moralité : a) s'il est catastrophique d'accepter H_0 alors que H_1 est vraie il faut minimiser β : soit m est éloigné de m_0, soit augmenter la taille de l'échantillon (plus coûteux)

b) s'il n'est pas catastrophique d'accepter H_0 alors que H_1 est vraie, on peut tolérer un risque β plus élevé, et se permettre de choisir un n plus petit (plus économique).

Exemple : On observe une série statistique présumée issue d'une loi $N(m, \sigma^2)$ où $\sigma = 0.3$:

x_i	28.1	28.2	28.3	28.4	28.5	28.6	28.7	28.9
n_i	1	2	4	8	3	1	1	1

$n = 20$ $\quad \hat{m}_{20} = 28.42$

On veut tester l'hypothèse $H_0 : m = m_0 = 28.4$ contre $H_1 : m \neq m_0$ au risque $\alpha = 0.05$.

$I_{m_0} = \left[\hat{m}_{20} - \frac{1.96 \times 0.3}{\sqrt{20}}, \hat{m}_{20} + \frac{1.96 \times 0.3}{\sqrt{20}}\right] = [28.28, 28.56]$, $m_0 \in I_{m_0} \Rightarrow$ on accepte H_0.

Calcul du risque $\beta(m)$ pour $m \in \{28.10, 28.15, \dots, 28.30, 28.50, 28.55, \dots, 28.70\}$:

$$\beta(m) = \mathbb{P}(m_0 \in I_{m_0} / H_1) = \Phi\left(\frac{28.4-m}{0.3}\sqrt{20} + 1.96\right) - \Phi\left(\frac{28.4-m}{0.3}\sqrt{20} - 1.96\right)$$

m	28.10 ou 28.70	28.15 ou 28.65	28.20 ou 28.60	28.25 ou 28.55	28.30 ou 28.50
$\beta(m)$	$\Phi(-2.51) - \Phi(-6.43)$ $= 0.006$	$\Phi(-1.77) - \Phi(-5.69)$ $= 0.038$	$\Phi(-1.02) - \Phi(-4.94)$ $= 0.15$	$\Phi(-0.28) - \Phi(-4.19)$ $= 0.39$	$\Phi(0.47) - \Phi(-3.45)$ $= 0.68$

remarques : * S'il est catastrophique que m s'écarte de m_0 de plus de $\sigma = 0.3$ (e.g. $m = 28.10$ ou 28.70) en acceptant $H_0 : m = 28.4$, on court le risque $\beta = \mathbb{P}(D/H_1) = 0.006$ très faible.

* Si l'on veut une estimation plus précise de m, il faudra augmenter n (plus coûteux).
* Si l'on préfère un prélèvement plus économique (n plus petit), il faudra tolérer un risque β plus grand.

ex : $\beta = 0.2 = 20\%$, $\quad \beta = \Phi\left(\frac{28.4-m}{0.3}\sqrt{n} + 1.96\right) - \Phi\left(\frac{28.4-m}{0.3}\sqrt{n} - 1.96\right) = 0.2$

- si on accepte un écart de 0.3 pour m à partir de $m_0 = 28.4$ i.e. $m = 28.10$ ou 28.70 : $\quad \Phi(1.96 - \sqrt{n}) - \underbrace{\Phi(-1.96-\sqrt{n})}_{\text{très petit}} = 0.2 = \Phi(-0.84)$

$\Rightarrow 1.96 - \sqrt{n} = -0.84 \quad \Rightarrow n \geq 8$.

- si on ne veut faire que $2n = 2$ mesures :

$\Phi\left(1.96 - \frac{m-28.4}{0.3}\sqrt{n}\right) - \underbrace{\Phi\left(-1.96 - \frac{m-28.4}{0.3}\sqrt{n}\right)}_{\text{très petit}} = 0.2$

$\Rightarrow 1.96 - \frac{m-28.4}{0.3}\sqrt{n} = -0.84$

$\Rightarrow m = 29$ (ou le symétrique par rapport à 28.4)

Écart de 0.6

Test unilatéral : i) cas $H_1 : m > m_0$.

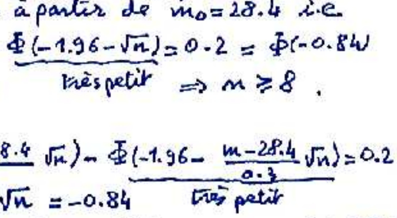
Sous H_0, $\hat{m}_n : N(m_0, \frac{\sigma^2}{n})$. Si tel est le cas on pourra peut-être observer des fluctuations autour de m_0. Cependant, une trop grande dispersion au-dessus de m_0 suggérerait de rejeter H_0 au profit de H_1.

Événement décision : $D = \left\{\frac{\hat{m}_n - m_0}{\sigma/\sqrt{n}} \leq q_{1-\alpha}\right\}$ où $q_{1-\alpha}$ est le $(1-\alpha)$-quantile de $N(0,1)$.

$$\mathbb{P}(D/H_0) = \mathbb{P}\left(\hat{m}_n \in \left]-\infty, m_0 + q_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]\right) = \mathbb{P}\left(m_0 \in \left[\hat{m}_n - q_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, +\infty\right[\right) = \mathbb{P}(N \leq q_{1-\alpha}) = 1-\alpha$$

Numériquement : on calcule $N = \frac{\hat{m}_n - m_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ sur l'observation.

$$\begin{cases} \text{si } N \leq q_{1-\alpha} : \text{accepter } H_0 \\ \text{si } N > q_{1-\alpha} : \text{rejeter } H_0 \end{cases}$$



$\alpha = 0.05 \rightarrow q_{1-\alpha} = q_{0.95} = 1.64$

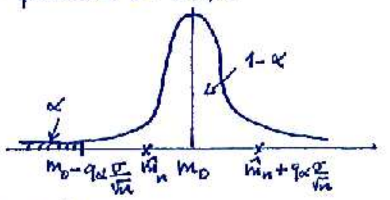
$\alpha = 0.01 \rightarrow q_{1-\alpha} = q_{0.99} = 2.33$

Calcul du risque β : $\beta(m) = \mathbb{P}(D/H_1) = \mathbb{P}\left(\overbrace{\frac{\hat{m}_n - m}{\sigma/\sqrt{n}}}^{N(0,1) \text{ sous } H_1} \leq \frac{m_0 - m}{\sigma/\sqrt{n}} + q_{1-\alpha}\right) = \Phi\left(\frac{m_0-m}{\sigma/\sqrt{n}} + q_{1-\alpha}\right)$.

(pour $m > m_0$)

ii) cas $H_1 : m < m_0$

Evènement décision $D = \left\{ \dfrac{\hat{m}_n - m_0}{\sigma/\sqrt{n}} \geq q_\alpha \right\}$ où q_α est le α-quantile de $N(0,1)$



$\mathbb{P}(D/H_0) = \mathbb{P}(N \geq q_\alpha) = 1-\alpha$; $\begin{cases} \text{si } N \geq q_\alpha : \text{accepter } H_0 \\ \text{si } N < q_\alpha : \text{rejeter } H_0 \end{cases}$

$\alpha = 0.05 \to q_\alpha = q_{0.05} = -1.64$

$\alpha = 0.01 \to q_\alpha = q_{0.01} = -2.33$

Pour $m < m_0$: $\beta(m) = \mathbb{P}(D/H_1) = 1 - \Phi\left(q_\alpha - \dfrac{m_0 - m}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = \Phi\left(\dfrac{m_0-m}{\sigma/\sqrt{n}} - q_\alpha\right)$

b) cas σ inconnu : $\hat{m}_n = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$, $\widehat{s_n^2} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \hat{m}_n)^2$ ou $\widehat{S_n^2} = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \hat{m}_n)^2$.

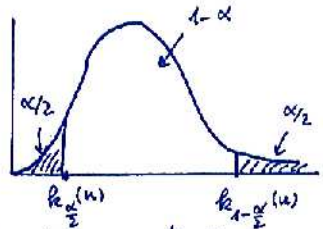
Sous H_0, $T \equiv \dfrac{\hat{m}_n - m_0}{\sqrt{\widehat{s_n^2}/(n-1)}} = \dfrac{\hat{m}_n - m_0}{\sqrt{\widehat{S_n^2}/n}} : T(n-1)$. Soit $t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ le $(1-\frac{\alpha}{2})$-quantile de $T(n-1)$

Variable de décision : T. On a $\mathbb{P}\left(T \in [-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1), t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)] / H_0\right) = 1-\alpha$.

Numériquement : on calcule $T = \dfrac{\hat{m}_n - m_0}{\sqrt{\widehat{s_n^2}/(n-1)}}$. $\begin{cases} \text{Si } T \in [-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1), t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)] : \text{accepter } H_0 \\ \text{si } T \notin [-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1), t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)] : \text{rejeter } H_0 \end{cases}$

remarque : lorsque n est "grand", $T(n-1) \approx N(0,1)$.

2) Test sur la variance σ^2



a) cas m connue : $\widehat{\sigma_n^2} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - m)^2$. Sous H_0 ($\sigma = \sigma_0$), $K_n \equiv \dfrac{n\widehat{\sigma_n^2}}{\sigma_0^2} : \chi^2(n)$.

Soit $k_{\frac{\alpha}{2}}(n)$ et $k_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)$ les $\frac{\alpha}{2}$ et $(1-\frac{\alpha}{2})$-quantiles de K_n

Tester $H_0 : \sigma = \sigma_0$ contre $H_1 : \sigma \neq \sigma_0$: $\begin{cases} \text{si } K_n \in [k_{\frac{\alpha}{2}}(n), k_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)], \text{ accepter } H_0 \\ \text{si } K_n \notin [k_{\frac{\alpha}{2}}(n), k_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)], \text{ rejeter } H_0. \end{cases}$

b) cas m inconnue : $\widehat{s_n^2} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \hat{m}_n)^2$. Sous $H_0 : \sigma = \sigma_0$, $K_{n-1} = \dfrac{n\widehat{s_n^2}}{\sigma_0^2} : \chi^2(n-1)$.

Même procédure qu'en a) avec $n-1$ au lieu de n.

III Comparaison de deux populations normales

On prélève deux échantillons $(X_1, \dots, X_{n_1})$ et $(Y_1, \dots, Y_{n_2})$ de deux populations dont les caractères étudiés suivent respectivement des lois normales $N(m_1, \sigma_1^2)$ et $N(m_2, \sigma_2^2)$.

Rappel : $\widehat{\sigma_{n_1}^2}/\widehat{\sigma_{n_2}^2} : \mathcal{F}(n_1, n_2)$, $\widehat{S_{n_1}^2}/\widehat{S_{n_2}^2} : \mathcal{F}(n_1 - 1, n_2 - 1)$.

1) Test sur l'égalité des deux moyennes m_1 et m_2. Tester $H_0 : m_1 = m_2$ contre $H_1 : m_1 \neq m_2$.

Variables de décision :

a) cas σ_1 et σ_2 connus : sous H_0 : $N \equiv \dfrac{\hat{m}_{1,n_1} - \hat{m}_{2,n_2}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} : N(0,1)$ où $\hat{m}_{1,n_1} = \dfrac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} X_i$, $\hat{m}_{2,n_2} = \dfrac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2} Y_i$.

($\approx N(0,1)$ si pop. quelconques et $n_1, n_2 \geq 30$)

b) cas σ_1 et σ_2 inconnus : $\widehat{s_{1,n_1}^2} = \dfrac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \hat{m}_{1,n_1})^2$, $\widehat{s_{2,n_2}^2} = \dfrac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2} (X_i - \hat{m}_{2,n_2})^2$

On a $\dfrac{n_1 \widehat{s_{1,n_1}^2}}{\sigma_1^2} : \chi^2(n_1 - 1)$ et $\dfrac{n_2 \widehat{s_{2,n_2}^2}}{\sigma_2^2} : \chi^2(n_2 - 1)$ donc $\dfrac{n_1 \widehat{s_{1,n_1}^2}}{\sigma_1^2} + \dfrac{n_2 \widehat{s_{2,n_2}^2}}{\sigma_2^2} : \chi^2(n_1 + n_2 - 2)$

D'autre part, sous H_0, $\dfrac{\hat{m}_{1,n_1} - \hat{m}_{2,n_2}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} : N(0,1)$.

Ainsi, sous H_0 : $T = \dfrac{\hat{m}_{1,n_1} - \hat{m}_{2,n_2}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \sqrt{\left(\frac{n_1 \widehat{s_{1,n_1}^2}}{\sigma_1^2} + \frac{n_2 \widehat{s_{2,n_2}^2}}{\sigma_2^2}\right)/(n_1 + n_2 - 2)}}$: Student $T(n_1 + n_2 - 2)$

Malheureusement, T dépend de σ_1 et σ_2 qui ne sont pas connus. Dans le cas particulier où l'on saurait que $\sigma_1 = \sigma_2$ (e.g. si les deux échantillons sont extraits de la même population) T ne dépend plus de σ_1, σ_2 :

pour $\sigma_1 = \sigma_2$: $$T = \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1+n_2}} \; \frac{\widehat{m_{1,n_1}} - \widehat{m_{2,n_2}}}{\sqrt{\dfrac{n_1 \widehat{s^2_{1,n_1}} + n_2 \widehat{s^2_{2,n_2}}}{n_1+n_2-2}}} : \mathcal{T}(n_1+n_2-2).$$

Le test se fera donc en comparant $|T|$ au $(1-\frac{\alpha}{2})$-quantile de $\mathcal{T}(n_1+n_2-2)$: $t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)$.
Sinon, pour $\sigma_1 \neq \sigma_2$ on a approximativement : $\dfrac{\widehat{m_{1,n_1}} - \widehat{m_{2,n_2}}}{\sqrt{\dfrac{\widehat{s^2_{1,n_1}}}{n_1-1} + \dfrac{\widehat{s^2_{2,n_2}}}{n_2-2}}} \approx N(0,1)$ pour des populations quelconques et $n_1, n_2 \geq 30$.

cf. aussi test d'Alpin-Welch (aide-mémoire p109).

On aura donc besoin de tester auparavant $\sigma_1 = \sigma_2$, voir ci-après (test de Fisher)

2) <u>Test sur l'égalité des deux variances σ_1^2 et σ_2^2.</u> Tester $H_0 : \sigma_1 = \sigma_2$ contre $H_1 : \sigma_1 \neq \sigma_2$.

Soit $\widehat{S^2_{1,n_1}} = \dfrac{1}{n_1-1} \sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \widehat{m_{1,n_1}})^2$ et $\widehat{S^2_{2,n_2}} = \dfrac{1}{n_2-2} \sum_{i=1}^{n_2} (Y_i - \widehat{m_{2,n_2}})^2$

On a $\dfrac{n_1-1}{\sigma_1^2} \widehat{S^2_{1,n_1}} : \chi^2(n_1-1)$ et $\dfrac{n_2-1}{\sigma_2^2} \widehat{S^2_{2,n_2}} : \chi^2(n_2-1)$ et alors $\dfrac{\widehat{S^2_{1,n_1}}/\sigma_1^2}{\widehat{S^2_{2,n_2}}/\sigma_2^2}$: Fisher $\mathcal{F}(n_1-1, n_2-1)$

Sous H_0, $F \equiv \dfrac{\widehat{S^2_{1,n_1}}}{\widehat{S^2_{2,n_2}}} : \mathcal{F}(n_1-1, n_2-1)$.

Soit $f_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1)$ et $f_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1)$ les $\frac{\alpha}{2}$ et $(1-\frac{\alpha}{2})$-quantiles de $\mathcal{F}(n_1-1, n_2-1)$.

Remarquons que $\dfrac{1}{F} = \dfrac{\widehat{S^2_{2,n_2}}}{\widehat{S^2_{1,n_1}}} : \mathcal{F}(n_2-1, n_1-1)$ et par conséquent $f_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1) = \dfrac{1}{f_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_2-1, n_1-1)}$

(puisque $\frac{\alpha}{2} = \mathbb{P}(F \leq f_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1)) = 1 - \mathbb{P}\left(\frac{1}{F} < \frac{1}{f_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1)}\right)$

$\Rightarrow \mathbb{P}\left(\frac{1}{F} < \frac{1}{f_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1)}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} = \mathbb{P}\left(\frac{1}{F} < f_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_2-1, n_1-1)\right)$)

Le test se fait alors en regardant si $F \in \left[\dfrac{1}{f_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_2-1, n_1-1)}, f_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1)\right]$ ou non.
Remarque : cet intervalle contient 1.

Résumé de 1 et 2 :
<u>Test de Fisher-Student</u> (Ronald Aylmer Fisher 1890-1962, William Sealy Gosset 1876-1937, brasseur)
Tester $H_0 : m_1 = m_2$ et $\sigma_1 = \sigma_2$ contre $H_1 : m_1 \neq m_2$ ou $\sigma_1 \neq \sigma_2$.

On calculer les valeurs observées de $$T = \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1+n_2}} \; \frac{\widehat{m_{1,n_1}} - \widehat{m_{2,n_2}}}{\sqrt{\dfrac{(n_1-1)\widehat{S^2_{1,n_1}} + (n_2-1)\widehat{S^2_{2,n_2}}}{n_1+n_2-2}}} : \mathcal{T}(n_1+n_2-2)$$

et $$F = \frac{\widehat{S^2_{1,n_1}}}{\widehat{S^2_{2,n_2}}} : \mathcal{F}(n_1-1, n_2-1).$$

$$\begin{cases} \text{Si } F \notin \left[\dfrac{1}{f_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_2-1, n_1-1)}, f_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1)\right] & \text{rejeter } H_0 \\ \text{Si } F \in \left[\dfrac{1}{f_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_2-1, n_1-1)}, f_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1)\right], & \\ \qquad \begin{cases} \text{si } T \notin \left[-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2), t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)\right] \text{ rejeter } H_0 \\ \text{si } T \in \left[-t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2), t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)\right] \text{ accepter } H_0. \end{cases} \end{cases}$$

Exemple de comparaison de deux lois normales $N(m_1,\sigma_1)$ et $N(m_2,\sigma_2)$:

On considère deux échantillons de tailles $n_1=20$ et $n_2=40$, de moyennes $\widehat{m}_1=248$ et $\widehat{m}_2=256$, de variances non corrigées $\widehat{s_1^2}=784=28^2$ et $\widehat{s_2^2}=484=22^2$.
Tester H_0 : $m_1=m_2$ et $\sigma_1=\sigma_2$ contre H_1 : $m_1\neq m_2$ ou $\sigma_1\neq\sigma_2$ au niveau $1-\alpha=0.95$.

$\rightarrow$ Variances corrigées : $S_1^2=\frac{n_1}{n_1-1}\widehat{s_1^2}=825.26$, $S_2^2=\frac{n_2}{n_2-1}\widehat{s_2^2}=496.41$

- Test de Fisher (H_0^F : $\sigma_1=\sigma_2$ contre H_1^F : $\sigma_1\neq\sigma_2$) :

$$F=\frac{\widehat{S_1^2}}{\widehat{S_2^2}} : \mathcal{F}(19,39) \qquad F_{obs}=1.66, \quad f_{0.975}(19,39)=1.86$$

On a $1<F_{obs}<f_{0.975}(19,39)$

on a donc aucune raison de rejeter H_0^F et on peut continuer avec le test des moyennes.

- Test de Student (H_0^T : $m_1=m_2$ contre H_1^T : $m_1\neq m_2$) :

$$T=\sqrt{\frac{n_1n_2}{n_1+n_2}}\frac{\widehat{m}_1-\widehat{m}_2}{\sqrt{\frac{n_1\widehat{s_1^2}+n_2\widehat{s_2^2}}{n_1+n_2-2}}} : \mathcal{T}(58) \qquad T_{obs}=-1.19, \quad t_{0.975}(58)=2.01$$

On a $|T_{obs}|<t_{0.975}(58)$.

On a donc aucune raison de rejeter H_0^T.

On accepte ainsi H_0.

IV Cas d'une population binomiale

1) Test sur la valeur d'une proportion p

Soit $p=\frac{N_A}{N}$ la proportion d'individus possédant un caractère A, $\widehat{p}=\frac{\widehat{m}_A}{n}$ avec $\widehat{m}_A=\sum_{i=1}^{n}X_i$,

$X_i=\mathbb{1}_{\{i^e \text{ individu a la prop. } A\}}$. On a $n\widehat{p} : \mathcal{B}(n,p)$. Tester $H_0 : p=p_0$ contre $H_1 : p\neq p_0$.

Sous H_0, $n\widehat{p} : \mathcal{B}(n,p_0)$. Soit $b_{\frac{\alpha}{2}}(n,p_0)$ et $b_{1-\frac{\alpha}{2}}(n,p_0)$ les $\frac{\alpha}{2}$ et $(1-\frac{\alpha}{2})$ quantiles de la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p_0)$. D'où le test :

$$\begin{cases} \text{si } \widehat{p}\in\left[\frac{b_{\alpha/2}(n,p_0)}{n}, \frac{b_{1-\frac{\alpha}{2}}(n,p_0)}{n}\right], \text{ accepter } H_0 \\ \text{si } \widehat{p}\notin\left[\frac{b_{\alpha/2}(n,p_0)}{n}, \frac{b_{1-\frac{\alpha}{2}}(n,p_0)}{n}\right], \text{ rejeter } H_0 \end{cases}$$

On peut aussi utiliser les approximations normales ou poissonniennes : $\frac{\widehat{p}-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}\approx N(0,1)$ pour n grand, p_0 proche de $\frac{1}{2}$, ou $n\widehat{p} : \mathcal{P}(np_0)$ pour n grand, p_0 petit.

2) Test de comparaison de deux proportions

On considère deux populations d'effectifs N_1 et N_2 et soit $p_1=\frac{N_{1,A}}{N}$, $p_2=\frac{N_{2,A}}{N}$ les proportions d'invidus possédant une propriété A dans chacune des deux populations.
Soit $\widehat{p}_1=\frac{\widehat{m}_{1,A}}{n_1}$ et $\widehat{p}_2=\frac{\widehat{n}_{2,A}}{n_2}$ les proportions observées lors d'un prélèvement de deux échantillons.

On veut tester $H_0 : p_1=p_2$ contre $H_1 : p_1\neq p_2$.

Sous H_0, en notant p la valeur commune de p_1 et p_2 on a approximativement $\widehat{p}_1\approx N(p,\sqrt{\frac{p(1-p)}{n_1}})$ et $\widehat{p}_2\approx N(p,\sqrt{\frac{p(1-p)}{n_2}})$ et donc $\sqrt{\frac{n_1n_2}{n_1+n_2}}\frac{\widehat{p}_1-\widehat{p}_2}{\sqrt{p(1-p)}}\approx N(0,1)$. Cependant p est inconnue, on l'estimera alors par $\widehat{p}=\frac{n_1\widehat{p}_1+n_2\widehat{p}_2}{n_1+n_2}$. Ce qui donne le test suivant :

$$\begin{cases} \text{si } \sqrt{\frac{n_1n_2}{n_1+n_2}}\frac{|\widehat{p}_1-\widehat{p}_2|}{\sqrt{\widehat{p}(1-\widehat{p})}}\in[-q_{1-\frac{\alpha}{2}},q_{1-\frac{\alpha}{2}}], \text{ accepter } H_0 \\ \text{sinon rejeter } H_0. \end{cases}$$

V Test d'ajustement du Khi-Deux (Karl Pearson 1857-1936 ; test du Khi-Deux : 1900)

Il s'agit ici de tester l'hypothèse H_0 : un certain caractère X suit une loi a priori.
Si X est une v.a. discrète soit $\mathbb{P}_X = [p_1, \dots, p_r]$ sa loi de probabilité théorique.
Si X est une v.a. continue, on se ramène au cas discret en effectuant une partition de $\mathbb{R}$ en r intervalles $I_1, \dots, I_r$ et en posant $p_i = \mathbb{P}(X \in I_i)$.

Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un échantillon de X. On classe les X_i en les rangeant dans les intervalles I_j.
Posons alors $N_i = \operatorname{card}\{k \in \{1, \dots, n\} : X_k \in I_i\} = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_k \in I_i\}}$ pour $1 \le i \le r$.

On a le résultat préliminaire (élémentaire) suivant :

__Proposition :__ $(N_1, \dots, N_r)$ suit une loi multinomiale dégénérée : $\boxed{\mathbb{P}(N_1 = n_1, \dots, N_r = n_r) = \frac{n!}{n_1! \cdots n_r!} p_1^{n_1} \cdots p_r^{n_r} \text{ pour } n_1 + \dots + n_r = n}$.
ou encore $(N_1, \dots, N_{r-1})$ suit une loi multinomiale ordinaire.
En particulier, chaque N_i suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p_i)$.

__Approximation normale :__

On a $N_i = \sum_{k=1}^{n} Y_{i,k}$ avec $Y_{i,k} = \mathbb{1}_{\{X_k \in I_i\}}$. $\quad \mathbb{E}(N_i) = n p_i$.

$$\mathbb{E}(N_i N_j) = \sum_{1 \le k, \ell \le n} \mathbb{P}(X_k \in I_i, X_\ell \in I_j) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_k \in I_i \cap I_j) + \sum_{\substack{1 \le k, \ell \le n \\ k \ne \ell}} \mathbb{P}(X_k \in I_i)\,\mathbb{P}(X_\ell \in I_j)$$
$$= n p_i \delta_{ij} + n(n-1) p_i p_j$$
$$\Rightarrow \operatorname{cov}(N_i, N_j) = \mathbb{E}(N_i N_j) - \mathbb{E}(N_i)\mathbb{E}(N_j) = \begin{cases} -n p_i p_j & \text{si } i \ne j \\ n p_i (1 - p_i) & \text{si } i = j \end{cases} \qquad 1 \le i, j \le r$$

La matrice des covariances de $(N_1, \dots, N_r)$ est donc

$$\Gamma_{(N_1, \dots, N_r)} = n \begin{pmatrix} p_1(1-p_1) & -p_1 p_2 & \cdots & -p_1 p_r \\ -p_1 p_2 & p_2(1-p_2) & & -p_2 p_r \\ \vdots & & & \\ -p_1 p_r & -p_2 p_r & & p_r(1-p_r) \end{pmatrix} = n \Sigma_r \quad \text{mat. } r \times r$$

TCL dans $\mathbb{R}^r$: $\left(\frac{N_1 - n p_1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{N_r - n p_r}{\sqrt{n}} \right) \xrightarrow[n \to \infty]{\mathcal{L}} N(0_r, \Sigma_r)$.

Cependant la loi limite est dégénérée (Σ_r non inversible) puisque $\sum_{i=1}^{r} (N_i - n p_i) = 0$.

Par contre, TCL dans $\mathbb{R}^{r-1}$: $\left(\frac{N_1 - n p_1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{N_{r-1} - n p_{r-1}}{\sqrt{n}} \right) \xrightarrow[n \to \infty]{\mathcal{L}} N(0_{r-1}, \Sigma^*_{r-1})$

où Σ^*_{r-1} est la matrice extraite de Σ_r : $(r-1)$ premières lignes et colonnes.

Cette fois Σ^*_{r-1} est inversible et
$$(\Sigma^*_{r-1})^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_r} & \frac{1}{p_r} & \cdots & \frac{1}{p_r} \\ \frac{1}{p_r} & \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_r} & \cdots & \frac{1}{p_r} \\ \vdots & & & \\ \frac{1}{p_r} & \frac{1}{p_r} & \cdots & \frac{1}{p_{r-1}} + \frac{1}{p_r} \end{pmatrix}$$

(ceci est facile à vérifier en écrivant $(\Sigma^*_{r-1})^{-1} = \frac{1}{p_r} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/p_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1/p_{r-1} \end{pmatrix}$ et en calculant
$(\Sigma^*_{r-1}) \times (\Sigma^*_{r-1})^{-1} = \begin{pmatrix} p_1 & p_1 & \cdots & p_1 \\ p_2 & p_2 & \cdots & p_2 \\ \vdots & \vdots & & \\ p_{r-1} & p_{r-1} & \cdots & p_{r-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-p_1 & -p_1 & \cdots & -p_1 \\ -p_2 & 1-p_2 & \cdots & -p_2 \\ & & & \\ -p_{r-1} & -p_{r-1} & \cdots & 1-p_{r-1} \end{pmatrix} = I_{r-1}$)

On a alors, en posant $Z = \left(\frac{N_1 - n p_1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{N_{r-1} - n p_{r-1}}{\sqrt{n}} \right)$, $\quad {}^tZ (\Sigma^*_{r-1})^{-1} Z \xrightarrow[n \to \infty]{\mathcal{L}} \chi^2(r-1)$.

Or :
$$ {}^tZ (\Sigma^*_{r-1})^{-1} Z = \sum_{i=1}^{r-1} \frac{(N_i - n p_i)^2}{n p_i} + \sum_{1 \le i, j \le r-1} \frac{(N_i - n p_i)(N_j - n p_j)}{n p_r}$$
$$= \sum_{i=1}^{r-1} \frac{(N_i - n p_i)^2}{n p_i} + \frac{1}{n p_r} \Big[\underbrace{\sum_{i=1}^{r-1} (N_i - n p_i)}_{-(N_r - n p_r)} \Big]^2 \qquad \text{puisque } \sum_{i=1}^{r} (N_i - n p_i) = 0$$
$$= \sum_{i=1}^{r} \frac{(N_i - n p_i)^2}{n p_i}$$

On a donc démontré le résultat asymptotique suivant :

Théorème : $\boxed{\sum_{i=1}^{r} \frac{(N_i - np_i)^2}{np_i} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \chi^2(r-1)}$

Corollaire : $\left| \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{r} \frac{(N_i - np_i)^2}{np_i} > k_{1-\alpha}^{(r-1)} \right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha \right.$ où $k_{1-\alpha}^{(r-1)}$ est le $(1-\alpha)$-quantile de $\chi^2(r-1)$

i.e. $\int_{k_{1-\alpha}}^{\infty} \frac{x^{\frac{r-3}{2}}}{2^{\frac{r-1}{2}}\Gamma(\frac{r-1}{2})} e^{-\frac{x}{2}} dx = \alpha$.

Mise en oeuvre du test du χ^2

1) On observe une réalisation $(x_1, \dots, x_n)$ de $(X_1, \dots, X_n)$. On regroupe éventuellement certains x_k proches les uns des autres dans un intervalle I_i. Soit $n_i = \operatorname{card}\{k \in \{1, \dots, n\} : x_k \in I_i\}$, $1 \le i \le r$. (n_i est l'observation d'une v.a. N_i).
2) On trace l'histogramme de la série statistique $\{(x'_i, n_i), 1 \le i \le r\}$ (x'_i : caractères distincts) et au vu de celui-ci on fera l'hypothèse que X suit une certaine loi a priori, ou une approximation. On se donne donc les nombres a priori $p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$.
3) On choisit un risque α et on recherche le quantile $k_{1-\alpha}(r-1)$ de $\chi^2(r-1)$.
4) On calcule alors $\chi^2_{obs} = \sum_{i=1}^{r} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$ valeur observée de la v.a. $\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{(N_i - np_i)^2}{np_i}$.

Test : $\begin{cases} \text{si } \chi^2_{obs} \le k_{1-\alpha}(r-1) & \text{on accepte l'ajustement,} \\ \text{si } \chi^2_{obs} > k_{1-\alpha}(r-1) & \text{on le rejette.} \end{cases}$

n_i : effectifs observés, np_i : effectifs théoriques (a priori)

Remarques : 1) Ce test est basé sur le TCL donc sur une approximation (de la loi multinomiale). En pratique on demande que $n \ge 30$, $np_i \ge 5$. Si ce n'est pas le cas, regrouper des caractères ou classes contigus.

2) Si r est grand, on peut aussi utiliser une approximation normale de $\chi^2(r-1)$ à l'aide de : $\frac{\chi^2(r) - r}{\sqrt{2r}} \xrightarrow[r\to\infty]{\mathcal{L}} N(0,1)$ ou mieux $\sqrt{2\chi^2(r)} - \sqrt{2r-1} \xrightarrow[r\to+\infty]{\mathcal{L}} N(0,1)$

Les tables du χ^2 vont jusqu'à $r = 30$.

3) Cas où les p_i ne sont donnés a priori mais plutôt estimés par des fréquences observées : si on estime q paramètres (par la méthode du maximum de vraisemblance : $p_i = p_i(\theta)$ où θ est solution de $\sum_{j=1}^{r} x_i \frac{\partial}{\partial \theta_j} \ln p_i(\theta) = 0$, $1 \le i \le q$ cf. Fourgeaud-Fuchs p306) alors
Caperaa-V.Cutsem p293 $\quad \sum_{i=1}^{r} \frac{(N_i - np_i)^2}{np_i} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \chi^2(r-q-1)$.

4) Pour deux intervalles I_1 et I_2 ($r=2$) on a $N_1 + N_2 = n$ et $p_1 + p_2 = 1$. Donc $N_2 - np_2 = np_1 - N_1$ et $\sum_{i=1}^{r} \frac{(N_i - np_i)^2}{np_i} = (N_1 - np_1)^2 \left[\frac{1}{np_1} + \frac{1}{np_2} \right] = \frac{(N_1 - np_1)^2}{np_1(1-p_1)}$

Donc $\quad \chi^2 = \frac{(N_1 - np_1)^2}{np_1(1-p_1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \chi^2(1)$

5) Pour que l'ajustement soit plausible, il est nécessaire que χ^2 ne soit pas trop grand (écarts entre les N_i et np_i pas trop grands et imputables aux seules erreurs d'échantillonnage) mais également pas trop petit (sinon les N_i seraient trop proches des np_i et seraient déterministes). Signalons que $\mathbb{E}[\chi^2(\nu)] = \nu$.

Exemples : 1) ajustement à une loi de Bernoulli (Bass p.220)
2) ajustement à une loi de Poisson (Bass p.222)
3) ajustement à une loi de Gauss (Bass p.224)

VI Test d'indépendance du Khi-Deux

Il s'agit de tester l'hypothèse H_0 : deux caractères X et Y sont indépendants.
Si (X,Y) est un couple aléatoire discret, soit $\mathbb{P}_{(X,Y)} = \{ p_{ij} = \mathbb{P}(X=x_i, Y=y_j), 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s\}$ sa loi de probabilité théorique. On note $p_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{s} p_{ij} = \mathbb{P}(X=x_i)$ $1 \leq i \leq r$, et $p_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{r} p_{ij} = \mathbb{P}(Y=y_j)$, $1 \leq j \leq s$.
Si (X,Y) est un couple aléatoire continu, on se ramène au cas discret en effectuant deux partitions de $\mathbb{R}$ en r et s intervalles $(I_{1\cdot}, \dots, I_{r\cdot})$ et $(I_{\cdot 1}, \dots, I_{\cdot s})$ et en posant
$p_{ij} = \mathbb{P}(X \in I_{i\cdot}, Y \in I_{\cdot j})$, $p_{i\cdot} = \mathbb{P}(X \in I_{i\cdot})$, $p_{\cdot j} = \mathbb{P}(Y \in I_{\cdot j})$, $1 \leq i \leq r$, $1 \leq j \leq s$.

Soit $((X_1,Y_1), \dots, (X_n,Y_n))$ un échantillon du caractère bivarié (X,Y). On range les X_k identiques (ou proches) dans un intervalle $I_{i\cdot}$, ainsi que les Y_k dans un $I_{\cdot j}$.
Soit alors $N_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{\{(X_k,Y_k) \in I_{i\cdot} \times I_{\cdot j}\}} = \mathrm{card}\{ k \in \{1, \dots, n\} : X_k \in I_{i\cdot}, Y_k \in I_{\cdot j}\}$

Posons :
$$N_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{s} N_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_k \in I_{i\cdot}\}} \quad \text{et } N_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{r} N_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{\{Y_k \in I_{\cdot j}\}}.$$

Tableaux de contingence :

Effectifs théoriques

$X \backslash Y$	y_1	y_j	y_s	total
x_1	$np_{11} \cdots$	$np_{1j} \cdots$	np_{1s}	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
x_i	$np_{i1} \cdots$	$np_{ij} \cdots$	np_{is}	$\sum_{j=1}^{s} np_{ij} = np_{i\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
x_r	$np_{r1} \cdots$	$np_{rj} \cdots$	np_{rs}	
total		$\sum_{i=1}^{r} np_{ij} = np_{\cdot j}$		$\sum_{i,j} np_{ij} = n$

Effectifs observés : réalisation des effectifs aléatoires suivants :

$X \backslash Y$	y_1	y_j	y_s	total
x_1	$N_{11} \cdots$	$N_{1j} \cdots$	N_{1s}	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
x_i	$N_{i1} \cdots$	$N_{ij} \cdots$	N_{is}	$\sum_{j=1}^{s} N_{ij} = N_{i\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
x_r	$N_{r1} \cdots$	$N_{rj} \cdots$	N_{rs}	
total		$\sum_{i=1}^{r} N_{ij} = N_{\cdot j}$		$\sum_{i,j} N_{ij} = n$

Comme dans le test d'ajustement du χ^2 on a $\displaystyle \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \frac{(N_{ij} - np_{ij})^2}{np_{ij}} \xrightarrow[n \to \infty]{\mathcal{L}} \chi^2(rs-1)$

(il y a 1 ddl en moins du à la relation $\sum_{i,j} (N_{ij} - np_{ij}) = 0$)

Cependant, les effectifs théoriques np_{ij} ne sont en général pas connus mais seulement estimés, sous H_0, par $\widehat{np_{ij}} = n\,\hat{p}_{i\cdot}\,\hat{p}_{\cdot j}$ avec
$$\begin{cases} \hat{p}_{i\cdot} = \dfrac{N_{i\cdot}}{n} & 1 \leq i \leq r \\ \hat{p}_{\cdot j} = \dfrac{N_{\cdot j}}{n} & 1 \leq j \leq s \end{cases}$$
→ cela fait $r+s$ estimations ; en fait seulement $r+s-2$ puisque $\sum_{i=1}^{r} \hat{p}_{i\cdot} = 1$ et $\sum_{j=1}^{s} \hat{p}_{\cdot j} = 1$.

On a donc le résultat suivant :

Théorème :
$$\boxed{\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \frac{\left(N_{ij} - \frac{N_{i\cdot} N_{\cdot j}}{n}\right)^2}{\frac{N_{i\cdot} N_{\cdot j}}{n}} \xrightarrow[n \to \infty]{\mathcal{L}} \chi^2((r-1)(s-1)).}$$