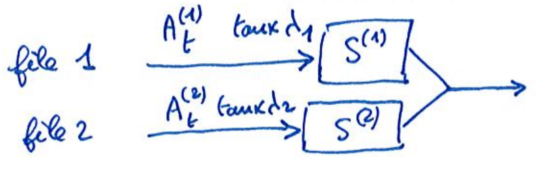
# File M/G/1 avec priorités et préemption




la file 1 est prioritaire sur la file 2 et a le droit de préemption (interruption d'un service non-prioritaire)

file résultante : $A_t = A_t^{(1)} + A_t^{(2)}$ au taux $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$

service résultant : $S = S^{(N)}$ avec $N : \Omega \to \{1,2\}$, $\begin{cases} \mathbb{P}(N=1) = \frac{\lambda_1}{\lambda} \\ \mathbb{P}(N=2) = \frac{\lambda_2}{\lambda} \end{cases}$, $\mathbb{E}(S) = \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda_1}{\lambda}\frac{1}{\mu_1} + \frac{\lambda_2}{\lambda}\frac{1}{\mu_2} = \frac{\rho_1+\rho_2}{\lambda_1+\lambda_2} = \frac{\rho}{\lambda}$

$\rho = \rho_1 + \rho_2$, $\rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1}$, $\rho_2 = \frac{\lambda_2}{\mu_2}$.

- La file 1 est une file M/G/1 classique car la préemption détruit l'influence de la file 2.

Donc $\begin{cases} \mathbb{E}(\tilde{W}_\infty^{(1)}) = \frac{\rho_1}{1-\rho_1}\,\frac{1+k_{S^{(1)}}^2}{2}\,\mathbb{E}(S^{(1)}) = \frac{\lambda_1\,\mathbb{E}(S^{(1)2})}{2(1-\rho_1)} \\ \mathbb{E}(Q_\infty^{(1)}) = \rho_1 + \frac{\rho_1^2}{1-\rho_1}\,\frac{1+k_{S^{(1)}}^2}{2} \end{cases}$, $\begin{cases} L_{\tilde{W}_\infty^{(1)}}(s) = (1-\rho_1)\dfrac{s}{s - \lambda_1[1 - L_{S^{(1)}}(s)]} \\ G_{Q_\infty^{(1)}}(z) = (1-\rho_1)\dfrac{(1-z)\,L_{S^{(1)}}(\lambda_1(1-z))}{L_{S^{(1)}}(\lambda_1(1-z)) - z} \end{cases}$

- File 2 : temps d'attente d'une personne arrivant à l'instant $t$ : $\tilde{W}_t^{(2)} = \Sigma_t^{(1)} + \Sigma_t^{(2)}$ avec

$\Sigma_t^{(2)} = \sum_{i=1}^{Q_t^{(2)}} S_i^{(2)}$ : temps de service des personnes de la file 2 devant la nouvelle personne, $S_1^{(2)}$ étant résiduel.

$\Sigma_t^{(1)} = \sum_{i=1}^{Q_t^{(1)}} S_i^{(1)} + \sum_{j=1}^{Z_t^{(1)}} B_j^{(1)}$

$\sum_{i=1}^{Q_t^{(1)}} S_i^{(1)}$ : temps de service des personnes de la file 1 devant la nouvelle personne ; elles ont $Z_t^{(1)}$ descendants.

$\sum_{j=1}^{Z_t^{(1)}} B_j^{(1)}$ : temps de service des descendants

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{W}_t^{(2)} = \tilde{W}_t + \sum_{j=1}^{Z_t^{(1)}} B_j^{(1)}} \quad \text{où } \tilde{W}_t = \Sigma_t^{(1)} + \Sigma_t^{(2)}$$

En régime stationnaire :

<u>temps moyen d'attente</u> $\mathbb{E}(\tilde{W}_\infty^{(2)}) = \mathbb{E}(\tilde{W}_\infty) + \underbrace{\mathbb{E}(Z_\infty^{(1)})}_{\mathbb{E}[\mathbb{E}(Z_\infty^{(1)}|\tilde{W}_\infty)]}\,\underbrace{\mathbb{E}(B^{(1)})}_{\frac{\mathbb{E}(S^{(1)})}{1-\rho_1}}$

$\mathcal{P}(\lambda_1 \tilde{W}_\infty)$

$$= \mathbb{E}(\tilde{W}_\infty)\left[1 + \lambda_1\frac{\mathbb{E}(S^{(1)})}{1-\rho_1}\right] = \frac{1}{1-\rho_1}\,\mathbb{E}(\tilde{W}_\infty)$$

or $\mathbb{E}(\tilde{W}_\infty) = \frac{\rho}{1-\rho}\,\frac{1+k_S^2}{2}\,\mathbb{E}(S) = \frac{\lambda\,\mathbb{E}(S^2)}{2(1-\rho)} = \frac{\lambda_1\,\mathbb{E}(S^{(1)2}) + \lambda_2\,\mathbb{E}(S^{(2)2})}{2(1-\rho)}$

d'où $\boxed{\mathbb{E}(\tilde{W}_\infty^{(2)}) = \frac{\lambda_1\,\mathbb{E}(S^{(1)2}) + \lambda_2\,\mathbb{E}(S^{(2)2})}{2(1-\rho_1)(1-\rho)} = \frac{\rho_1(1+k_{S_1}^2)\,\mathbb{E}(S^{(1)}) + \rho_2(1+k_{S_2}^2)\,\mathbb{E}(S^{(2)})}{2(1-\rho_1)(1-\rho)}}$

## Transformée de Laplace de $\tilde{W}_\infty^{(2)}$

$$L_{\tilde{W}_\infty^{(2)}}(s) = \mathbb{E}\left[e^{-s\tilde{W}_\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\left(e^{-s\sum_{j=0}^{n} B_j^{(1)}} \mid \tilde{W}_\infty, Z_\infty^{(1)}=n\right) \mathbb{P}(Z_\infty^{(1)}=n \mid \tilde{W}_\infty)\right]$$

avec $B_0^{(1)}=0$ $\qquad (Z_\infty^{(1)} \mid \tilde{W}_\infty) : \mathcal{P}(\lambda_1 W_\infty)$

$$= \mathbb{E}\left[e^{-s\tilde{W}_\infty} \sum_{n=0}^{\infty} [\underbrace{\mathbb{E}(e^{-sB^{(1)}})}_{L_{B^{(1)}}(s)}]^n \, e^{-\lambda_1 \tilde{W}_\infty} \frac{(\lambda_1 \tilde{W}_\infty)^n}{n!}\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[e^{-s\tilde{W}_\infty - \lambda_1 \tilde{W}_\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda_1 \tilde{W}_\infty L_{B^{(1)}}(s))^n}{n!}\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[e^{-(s+\lambda_1(1-L_{B^{(1)}}(s)))\tilde{W}_\infty}\right]$$

$$\boxed{L_{\tilde{W}_\infty^{(2)}}(s) = L_{\tilde{W}_\infty}\left(s+\lambda_1(1-L_{B^{(1)}}(s))\right) = (1-\rho)\frac{s+\lambda_1[1-L_{B^{(1)}}(s)]}{s-\lambda_2[1-L_{S^{(2)}}(s+\lambda_1(1-L_{B^{(1)}}(s)))]}}$$

où $L_{B^{(1)}}$ est solution de $L_{B^{(1)}}(s) = L_{S^{(1)}}[s+\lambda_1(1-L_{B^{(1)}}(s))]$.

La deuxième égalité provient de $L_{\tilde{W}_\infty}(s) = \dfrac{(1-\rho)s}{s-\lambda(1-L_S(s))}$ et $L_S(s) = \dfrac{\lambda_1}{\lambda} L_{S^{(1)}}(s) + \dfrac{\lambda_2}{\lambda} L_{S^{(2)}}(s)$.

On peut retrouver le temps moyen d'attente à l'aide d'un développement limité :

$$s+\lambda_1(1-L_{B^{(1)}}(s)) = s+\lambda_1\left[s\,\mathbb{E}(B^{(1)}) - \frac{s^2}{2}\mathbb{E}(B^{(1)2}) + o(s^2)\right]$$
$$= s\left[(1+\lambda_1\mathbb{E}(B^{(1)})) - \lambda_1\frac{s}{2}\mathbb{E}(B^{(1)2}) + o(s)\right]$$

$$s-\lambda_2[1-L_{S^{(2)}}(s+\lambda_1(1-L_{B^{(1)}}(s)))] = s-\lambda_2\left[1-L_{S^{(2)}}\left(s\left\{(1+\lambda_1\mathbb{E}(B^{(1)})) - \lambda_1\frac{s}{2}\mathbb{E}(B^{(1)2}) + o(s)\right\}\right)\right]$$

$$= s-\lambda_2\left[\frac{s}{\mu_2}(1+\lambda_1\mathbb{E}(B^{(1)})) - \frac{\lambda_1 s^2}{2\mu_2}\mathbb{E}(B^{(1)2}) - \frac{1}{2}s^2(1+\lambda_1\mathbb{E}(B^{(1)}))^2\mathbb{E}(S^{(2)2}) + o(s^2)\right]$$

$$= s\left[\left[1-\rho_2(1+\lambda_1\mathbb{E}(B^{(1)}))\right] + s\left[\frac{\lambda_1}{2}\rho_2\mathbb{E}(B^{(1)2}) + \frac{\lambda_2}{2}(1+\lambda_1\mathbb{E}(B^{(1)}))^2\mathbb{E}(S^{(2)2})\right] + o(s)\right]$$

or $L_{B^{(1)}}(s) = L_{S^{(1)}}[s+\lambda_1(1-L_{B^{(1)}}(s))] \implies \begin{cases} L'_{B^{(1)}}(s) = [1-\lambda_1 L'_{B^{(1)}}(s)]\,L'_{S^{(1)}}(\cdots) \\ L''_{B^{(1)}}(s) = [1-\lambda_1 L'_{B^{(1)}}(s)]^2 L''_{S^{(1)}}(\cdots) - \lambda_1 L''_{B^{(1)}}(s) L'_{S^{(1)}}(\cdots) \end{cases}$

$$\implies \begin{cases} \mathbb{E}(B^{(1)}) = (1+\lambda_1\mathbb{E}(B^{(1)}))\mathbb{E}(S^{(1)}) \\ \mathbb{E}(B^{(1)2}) = (1+\lambda_1\mathbb{E}(B^{(1)}))^2\mathbb{E}(S^{(1)2}) + \dfrac{\lambda_1}{\mu_1}\mathbb{E}(B^{(1)2}) \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} \mathbb{E}(B^{(1)}) = \dfrac{\mathbb{E}(S^{(1)})}{1-\rho_1} = \dfrac{1}{\mu_1-\lambda_1} \\ \mathbb{E}(B^{(1)2}) = \dfrac{\mathbb{E}(S^{(1)2})}{1-\frac{\lambda_1}{\mu_1}}\left(\dfrac{\mu_1}{\mu_1-\lambda_1}\right)^2 = \dfrac{\mathbb{E}(S^{(1)2})}{(1-\rho_1)^3} \end{cases}$$

Numérateur : $s\left[\dfrac{1}{1-\rho_1} - s\dfrac{\lambda_1\mathbb{E}(S^{(1)2})}{2(1-\rho_1)^3} + o(s)\right]$

Dénominateur : $s\left[1-\dfrac{\rho_2}{1-\rho_1} + \dfrac{s}{2}\left[\dfrac{\lambda_1\rho_2\mathbb{E}(S^{(1)2})}{(1-\rho_1)^3} + \dfrac{\lambda_2\mathbb{E}(S^{(2)2})}{(1-\rho_1)^2}\right] + o(s)\right]$

$$= s\left[\frac{1-\rho}{1-\rho_1} + s\frac{\lambda_1\rho_2\mathbb{E}(S^{(1)2}) + \lambda_2(1-\rho_1)\mathbb{E}(S^{(2)2})}{2(1-\rho_1)^3} + o(s)\right]$$

D'où $L_{\tilde{W}_\infty^{(2)}}(s) = (1-\rho)\dfrac{N}{D} = \dfrac{1 - s\,\dfrac{\lambda_1 \mathbb{E}(S^{(1)2})}{2(1-\rho_1)^2} + o(s)}{1 + s\,\dfrac{\lambda_1\rho_1 \mathbb{E}(S^{(1)2}) + \lambda_2(1-\rho_1)\mathbb{E}(S^{(2)2})}{2(1-\rho)(1-\rho_1)^2} + o(s)}$

$$= 1 - \frac{s}{2(1-\rho_1)^2}\Big[\underbrace{\lambda_1 \mathbb{E}(S^{(1)2}) + \frac{\lambda_1\rho_2 \mathbb{E}(S^{(1)2}) + \lambda_2(1-\rho_1)\mathbb{E}(S^{(2)2})}{1-\rho}}_{\frac{\lambda_1 \underbrace{(1-\rho+\rho_2)}_{1-\rho_1} \mathbb{E}(S^{(1)2}) + \lambda_2(1-\rho_1)\mathbb{E}(S^{(2)2})}{1-\rho}} + o(1)\Big]$$

$$= 1 - s\,\frac{\lambda_1 \mathbb{E}(S^{(1)2}) + \lambda_2 \mathbb{E}(S^{(2)2})}{2(1-\rho_1)(1-\rho)} + o(s)$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(\tilde{W}_\infty^{(2)}) = \frac{\lambda_1 \mathbb{E}(S^{(1)2}) + \lambda_2 \mathbb{E}(S^{(2)2})}{2(1-\rho_1)(1-\rho)}.$$

* temps d'achèvement de service pour une personne de la file 2 : $\overline{S_\infty^{(2)}}$

$\overline{S_\infty^{(2)}}$ : temps de service + plus supplément de temps d'attente dû aux interruptions pour des personnes prioritaires (file 1) arrivées pendant le service d'une personne de la file 2

$\overline{S_\infty^{(2)}} = S^{(2)} + \sum_i B_i^{(1)}$, $B_i^{(1)}$ : périodes d'activité du serveur avec la file 1 durant le service de la file 2

On a $\mathbb{P}(n$ interruptions durant le service d'une personne de la file $2 \mid S^{(2)}) = \dfrac{(\lambda_1 S^{(2)})^n}{n!} e^{-\lambda_1 S^{(2)}}$

ou encore, $Z_\infty^{(1)}$ : nombre de personnes de la file 1 arrivant pendant le service d'une personne de la file 2. $(Z_\infty^{(1)} \mid S^{(2)}) : \mathcal{P}(\lambda_1 S^{(2)})$

$$L_{\overline{S_\infty^{(2)}}}(s) = \mathbb{E}(e^{-s\overline{S_\infty^{(2)}}}) = \mathbb{E}\Big[\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}(e^{-s\overline{S_\infty^{(2)}}} \mid Z_\infty^{(1)} = n, S^{(2)}) \frac{(\lambda_1 S^{(2)})^n}{n!} e^{-\lambda_1 S^{(2)}}\Big]$$

$$= \mathbb{E}\Big[\sum_{n=0}^{\infty} e^{-sS^{(2)}} \underbrace{\mathbb{E}(e^{-sB^{(1)}})}_{L_{B^{(1)}}(s)}{}^n \frac{(\lambda_1 S^{(2)})^n}{n!} e^{-\lambda_1 S^{(2)}}\Big]$$

$$= \mathbb{E}\big[e^{-sS^{(2)}} e^{\lambda_1 L_{B^{(1)}}(s) S^{(2)}} e^{-\lambda_1 S^{(2)}}\big]$$

$\Rightarrow$ $\boxed{L_{\overline{S_\infty^{(2)}}}(s) = L_{S^{(2)}}[s + \lambda_1(1 - L_{B^{(1)}}(s))]}$ , $L_{B^{(1)}}(s)$ étant solution de $L_{B^{(1)}}(s) = L_{S^{(1)}}(s + \lambda(1 - L_{B^{(1)}}(s)))$

puis $\boxed{\mathbb{E}(\overline{S_\infty^{(2)}}) = \dfrac{1}{\mu_2(1-\rho_1)}}$

* Nombre de clients de la file 2 dans le système : $Q_\infty^{(2)}$

$(Q_\infty^{(2)} \mid \tilde{W}_\infty^{(2)} + \overline{S_\infty^{(2)}}) : \mathcal{P}(\lambda_2(\tilde{W}_\infty^{(2)} + \overline{S_\infty^{(2)}}))$ $\Rightarrow$ $G_{Q_\infty^{(2)}}(z) = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}(e^{-zQ^{(2)}} \mid \tilde{W}_\infty^{(2)} + \overline{S_\infty^{(2)}})\big]$

$= \mathbb{E}\big[e^{-\lambda_2(1-z)(\tilde{W}_\infty^{(2)} + \overline{S_\infty^{(2)}})}\big]$

- $\mathbb{E}(Q_\infty^{(2)}) = \lambda_2 \mathbb{E}(\tilde{W}_\infty^{(2)} + \overline{S_\infty^{(2)}}) = \lambda_2 \dfrac{\lambda_1 \mathbb{E}(S^{(1)2}) + \lambda_2 \mathbb{E}(S^{(2)2})}{2(1-\rho_1)(1-\rho)} + \dfrac{\rho_2}{1-\rho_1}$
- $\mathbb{P}(Q_\infty^{(2)} = 0) = (1-\rho)\dfrac{[\lambda_2 + \lambda_1(1 - L_{B^{(1)}}(\lambda_2))][L_{S^{(2)}}[\lambda_1 + \lambda_2(1 - L_{B^{(1)}}(\lambda_2))]]}{\lambda_2 L_{S^{(2)}}(\lambda_1 + \lambda_2(1 - L_{B^{(1)}}(\lambda_2)))}$ $= (1-\rho)[1 + \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}(1 - L_{B^{(1)}}(\lambda_2))]$

$\boxed{G_{Q_\infty^{(2)}}(z) = L_{\tilde{W}_\infty^{(2)}}(\lambda_2(1-z))\, L_{\overline{S_\infty^{(2)}}}(\lambda_2(1-z))}$

* Nombre de clients de la file 2 en attente : $\tilde{Q}_\infty^{(2)}$

$(\tilde{Q}_\infty^{(2)} \mid \tilde{W}_\infty^{(2)}) : \mathcal{P}(\lambda_2 \tilde{W}_\infty^{(2)})$ $\longrightarrow$ $\boxed{G_{\tilde{Q}_\infty^{(2)}}(z) = L_{\tilde{W}_\infty^{(2)}}(\lambda_2(1-z))}$

## Généralisation à K classes de priorités décroissantes

On pose $\begin{cases} \rho_i = \dfrac{\lambda_i}{\mu_i}, \ 1 \le i \le K \\ \sigma_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \rho_i, \ 1 \le k \le K, \ \sigma_0 = 0 \\ \ell_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i, \ 2 \le k \le K, \ \ell_1 = 0 \end{cases}$ $\mu_i = \dfrac{1}{\mathbb{E}(S^{(i)})}$, $N : \Omega \longrightarrow \{1, 2, \dots, K\}$, $\mathbb{P}(N = i) = \dfrac{\lambda_i}{\lambda}$

et l'on suppose $\rho = \sigma_K = \sum_{i=1}^{K} \rho_i < 1$.

$$* \ L_{\tilde{W}^{(k)}}(s) = \frac{(1-\sigma_k)[s + \ell_k(1 - s_k^*)]}{s - \lambda_k[1 - L_{S^{(k)}}(s + \ell_k(1 - s_k^*))]}$$

avec $\begin{cases} s_k^* = \displaystyle\sum_{i=1}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\ell_k} L_{S^{(i)}}[s + \ell_k(1 - s_k^*)], \quad 2 \le k \le K \\ s_1^* = 1 \end{cases}$

$$\mathbb{E}(\tilde{W}^{(k)}) = \frac{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbb{E}(S^{(i)2})}{2(1-\sigma_{k-1})(1-\sigma_k)}$$

$$* \ G_{Q_\infty^{(k)}}(z) = (1-\sigma_k) \frac{\lambda_k z - \ell_{k+1} + \ell_k z_k^*}{\lambda_k [z - L_{S^{(k)}}[\lambda_k(1-z) + \ell_k(1-z_k^*)]]} L_{S^{(k)}}[\lambda_k(1-z) + \ell_k(1-z_k^*)]$$

avec $\begin{cases} z_k^* = \displaystyle\sum_{i=1}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\ell_k} L_{S^{(i)}}[\lambda_k(1-z) + \ell_k(1-z_k^*)], \quad 2 \le k \le K \\ z_1^* = 1 \end{cases}$

On a $G_{Q_\infty^{(k)}}(z) = L_{\tilde{W}^{(k)}}[\lambda_k(1-z)] \times L_{\overline{S^{(k)}}}[\lambda_k(1-z)]$

avec $L_{\overline{S^{(k)}}}(s) = L_{S^{(k)}}[s + \ell_k(1 - s_k^*)]$ (temps d'achèvement de service)

$$\mathbb{E}(Q_\infty^{(k)}) = \lambda_k [\mathbb{E}(\tilde{W}^{(k)}) + \mathbb{E}(\overline{S^{(k)}})] \quad \text{avec } \mathbb{E}(\overline{S^{(k)}}) = \frac{1}{\mu_k(1-\sigma_{k-1})}.$$

$$\mathbb{P}(Q_\infty^{(k)} = 0) = (1-\sigma_k) \frac{\ell_{k+1} - \ell_k z_k^*(0)}{\lambda_k}.$$

En particulier : $k = 1$ : $L_{\tilde{W}^{(1)}}(s) = \dfrac{(1-\rho_1)s}{s - \lambda_1[1 - L_{S^{(1)}}(s)]}$ $\qquad \mathbb{E}(\tilde{W}^{(1)}) = \dfrac{\lambda_1 \mathbb{E}(S^{(1)2})}{2(1-\rho_1)}$

$k = K$ : $L_{\tilde{W}^{(K)}}(s) = (1-\rho) \dfrac{s + \ell_K(1 - s_K^*)}{s - \lambda_K[1 - L_{S^{(K)}}(s + \ell_K(1 - s_K^*))]}$

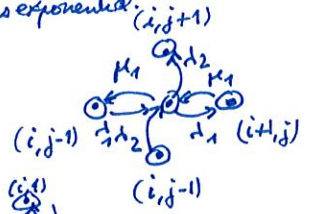
$\to$ même formule que dans le cas de non-préemption

Cas de services exponentiels : (H. White & L. Christie : Queueing with preemptive priorities or with breakdown, 1958)

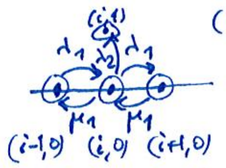
$Q_t = (Q_t^{(1)}, Q_t^{(2)})_{t\geq 0}$ est dans ce cas une chaîne de Markov car les sauts se font en temps exponentiel.

Equations de balance globale : $\pi_{ij} = \mathbb{P}(Q_\infty = (i,j))$

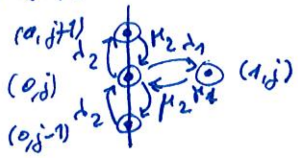
1) $i \geq 1,\ j \geq 1$ : $(\lambda_1+\lambda_2+\mu_1)\pi_{ij} = \lambda_1 \pi_{i-1,j} + \lambda_2 \pi_{i,j-1} + \mu_1 \pi_{i+1,j}$



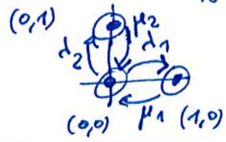

2) $i \geq 1,\ j = 0$ : $(\lambda_1+\lambda_2+\mu_1)\pi_{i0} = \lambda_1 \pi_{i-1,0} + \mu_1 \pi_{i+1,0}$




3) $i = 0,\ j \geq 1$ : $(\lambda_1+\lambda_2+\mu_2)\pi_{0j} = \lambda_2 \pi_{0,j-1} + \mu_1 \pi_{1j} + \mu_2 \pi_{0,j+1}$




4) $i = 0,\ j = 0$ : $(\lambda_1+\lambda_2)\pi_{00} = \mu_1 \pi_{10} + \mu_2 \pi_{01}$




$$\boxed{\begin{array}{l} G_{Q_\infty}(z,\zeta) = \displaystyle\sum_{i,j\geq 0} \pi_{ij} z^i \zeta^j = \frac{\mu_2(1-\rho)(1-\zeta)}{\left[(1-\zeta)(\mu_2-\lambda_2\zeta) - \lambda_1\zeta\left(1-L_{B^{(1)}}(\lambda_2(1-\zeta))\right)\right]\left[1-\rho_1 z L_{B^{(1)}}(\lambda_2(1-\zeta))\right]} \\ \text{avec } L_{B^{(1)}}(s) = \dfrac{\lambda_1+\mu_1+s-\sqrt{(\lambda_1+\mu_1+s)^2-4\lambda_1\mu_1}}{2\lambda_1} \qquad \text{simplification: page suivante} \end{array}}$$

N.B. | La formule générale n'est pas en accord avec celle-ci car la première concerne la chaîne induite et pas celle-ci.

$\zeta = 1$ : $G_{Q_\infty}(z,1) = G_{Q_\infty^{(1)}}(z)$

$L_{B^{(1)}}(0) = 1$, DL à 1 : $L_{B^{(1)}}(\lambda_2(1-\zeta)) = 1 - \lambda_2(1-\zeta)\underbrace{\mathbb{E}(B^{(1)})}_{\frac{1}{\mu_1-\lambda_1}} + o(1-\zeta) = 1 - \dfrac{\lambda_2}{\mu_1-\lambda_1}(1-\zeta) + o(1-\zeta)$

$$\Rightarrow G_{Q_\infty}(z,\zeta) = \frac{\mu_2(1-\rho)(1-\zeta)}{(1-\zeta)\left[(\mu_2-\lambda_2\zeta) - \frac{\lambda_1\lambda_2\zeta}{\mu_1-\lambda_1} + o(1)\right]\left[1-\rho_1 z(1+o(1))\right]} \xrightarrow[\zeta\to 1]{} \frac{\mu_2(1-\rho)}{\underbrace{\left((\mu_2-\lambda_2) - \frac{\lambda_1\lambda_2}{\mu_1-\lambda_1}\right)}_{\mu_2 - \frac{\lambda_2\mu_1}{\mu_1-\lambda_1} = \mu_2\left(1-\frac{\rho_2}{1-\rho_1}\right) = \mu_2\frac{1-\rho}{1-\rho_1}}(1-\rho_1 z)}$$

d'où $\boxed{G_{Q_\infty^{(1)}}(z) = \dfrac{1-\rho_1}{1-\rho_1 z}}$ et $\boxed{\mathbb{E}(Q_\infty^{(1)}) = \dfrac{\rho_1}{1-\rho_1}}$ $\begin{cases} \mathbb{E}(\tilde{W}_\infty^{(1)}) = \dfrac{\rho_1}{\mu_1(1-\rho_1)} \\ \mathbb{E}(W_\infty^{(1)}) = \dfrac{1}{\mu_1-\lambda_1} = \dfrac{1}{\lambda_1}\mathbb{E}(Q_\infty^{(1)}) \end{cases}$

Calcul de $\mathbb{E}(Q_\infty^{(2)})$ :

$h = 1-\zeta$

$$G_{Q_\infty^{(2)}}(\zeta) = G_{Q_\infty}(1,\zeta) = \frac{\mu_2(1-\rho)}{\left[(\mu_2-\lambda_2)+\lambda_2 h - \lambda_1(1-h)\left(\frac{\lambda_2}{\mu_1(1-\rho_1)} - \frac{\lambda_2^2 h}{\mu_1^2(1-\rho_1)^3}\right) + o(h)\right]\left[(1-\rho_1) + \frac{\rho_1\lambda_2}{\mu_1(1-\rho_1)}h + o(h)\right]}$$

$$\text{Dénominateur} = \left[\underbrace{\left(\mu_2(1-\rho_2) - \frac{\lambda_2\rho_1}{1-\rho_1}\right)}_{\mu_2\frac{1-\rho}{1-\rho_1}} + \underbrace{\left(\lambda_2 + \lambda_2\frac{\rho_1}{1-\rho_1} + \frac{\lambda_1\lambda_2^2}{\mu_1^2(1-\rho_1)^3}\right)}_{\frac{\lambda_2}{1-\rho_1}\left[1+\frac{\lambda_1\lambda_2}{\mu_1^2(1-\rho_1)^2}\right]} h + o(h)\right]\left[(1-\rho_1) + \frac{\rho_1\lambda_2}{\mu_1(1-\rho_1)}h + o(h)\right]$$

$$= \mu_2(1-\rho)\left[1 + \frac{1}{\mu_2(1-\rho)}\left(\frac{(1-\rho)\rho_1\lambda_2\mu_2}{\mu_1(1-\rho_1)^2} + \lambda_2\left(1+\frac{\rho_1\lambda_2}{\mu_1(1-\rho_1)^2}\right)\right)h + o(h)\right]$$

$$\Rightarrow G_{Q_\infty^{(2)}}(\zeta) = -\frac{\lambda_2}{\mu_1\mu_2(1-\rho_1)^2(1-\rho)}\Big[\underbrace{(1-\rho)\rho_1\mu_2 + \mu_1(1-\rho_1)^2 + \rho_1\lambda_2}_{\rho_1\mu_2(\underbrace{1-\rho+\rho_2}_{1-\rho_1}) + \mu_1(1-\rho_1)^2 = (1-\rho_1)(\mu_1(1-\rho_1)+\rho_1\mu_2)}\Big]h + o(h)$$

$$= \frac{\rho_2\left[\rho_1\mu_2 + (1-\rho_1)\mu_1\right]}{\mu_1(1-\rho_1)(1-\rho)}(\zeta-1) + o(\zeta-1) \Rightarrow \boxed{\mathbb{E}(Q_\infty^{(2)}) = \frac{\rho_2}{1-\rho}\left(1+\frac{\mu_2}{\mu_1}\frac{\rho_1}{1-\rho_1}\right)}$$

Temps d'attente : $\mathbb{E}(W_\infty^{(2)}) = \dfrac{1}{\lambda_2}\mathbb{E}(Q_\infty^{(2)}) = \boxed{\dfrac{1}{\mu_2(1-\rho)}\left(1+\dfrac{\mu_2}{\mu_1}\dfrac{\rho_1}{1-\rho_1}\right)}$, $\mathbb{E}(\tilde{W}_\infty^{(2)}) = \mathbb{E}(W_\infty^{(2)} - S^{(2)}) = \boxed{\dfrac{1}{\mu_2(1-\rho)}\left(\rho_2 + \dfrac{\mu_2}{\mu_1}\dfrac{\rho_1}{1-\rho_1}\right)}$

Simplification de la formule donnant $G_{Q_\infty}(z,\xi)$ :

Posons $\xi^* = \rho_1 L_{B(1)}(\lambda_2(1-\xi))$. $\xi^*$ est solution de $\mu_1 \xi^{*2} - [\lambda_1+\lambda_2(1-\xi)+\mu_1]\xi^* + \lambda_1 = 0$

$$\frac{\mu_2(1-\xi)}{(1-\xi)(\mu_2-\lambda_2\xi)-(\lambda_1-\mu_1\xi^*)\xi} = \frac{1}{(1-\rho_2\xi)-\frac{(\lambda_1-\mu_1\xi^*)\xi}{\mu_2(1-\xi)}}$$

$$= \frac{1}{1-\rho_2\xi\left[1+\frac{\lambda_1-\mu_1\xi^*}{\lambda_2(1-\xi)}\right]}$$

or $\lambda_2(1-\xi) = \mu_1\xi^* + \frac{\lambda_1}{\xi^*} - (\lambda_1+\mu_1) = \frac{(\mu_1\xi^*-\lambda_1)(\xi^*-1)}{\xi^*}$

d'où $$\frac{\mu_2(1-\xi)}{(1-\xi)(\mu_2-\lambda_2\xi)-(\lambda_1-\mu_1\xi^*)\xi} = \frac{1}{1-\rho_2\xi\left[1-\frac{\xi^*}{\xi^*-1}\right]} = \frac{1-\xi^*}{1-\xi^*-\rho_2\xi}$$

d'où $$\boxed{G_{Q_\infty}(z,\xi) = \frac{1-\rho}{1-\xi^*-\rho_2\xi}\times\frac{1-\xi^*}{1-\xi^* z}, \quad \xi^* = \frac{\lambda_1+\lambda_2(1-\xi)+\mu_1-\sqrt{(\lambda_1+\lambda_2(1-\xi)+\mu_1)^2-4\lambda_1\mu_1}}{2\mu_1}}$$

Démonstration à partir des équations d'équilibre

Posons $G_i(\xi) = \mathbb{E}[\xi^{Q_\infty^{(2)}}, Q_\infty^{(1)}=i] = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_{ij}\xi^j$.

Pour $i \geq 1$ : 1) et 2) $\Rightarrow (\lambda_1+\lambda_2+\mu_1)\sum_{j=0}^{\infty}\pi_{ij}\xi^j = \lambda_1 \underbrace{\sum_{j=0}\pi_{i-1,j}\xi^j}_{G_{i-1}(\xi)} + \lambda_2 \underbrace{\sum_{j=1}\pi_{i,j-1}\xi^j}_{\xi G_i(\xi)} + \mu_1\underbrace{\sum_{j=0}^{\infty}\pi_{i+1,j}\xi^j}_{G_{i+1}(\xi)}$

$\Rightarrow \mu_1 G_{i+1}(\xi) - [\lambda_1+\lambda_2(1-\xi)+\mu_1]G_i(\xi) + \lambda_1 G_{i-1}(\xi) = 0$

donc $G_i(\xi)$ est de la forme $\alpha(\xi)\xi_1^i + \beta(\xi)\xi_2^i$ avec $\xi_1, \xi_2$ solutions

de $\mu_1 r^2 - [\lambda_1+\lambda_2(1-\xi)+\mu_1]r + \lambda_1 = 0$, $\xi_1 < 1 < \xi_2$. $(\xi_1 = \xi^*)$

$G_i(\xi)$ bornée $\Rightarrow \beta(\xi) = 0$ donc $\boxed{G_i(\xi) = \alpha(\xi)\xi_1^i,\ i \geq 0}$

Pour $i=0$ : 3) et 4) $\Rightarrow (\lambda_1+\lambda_2+\mu_2)\underbrace{\sum_{j=0}^{\infty}\pi_{0j}\xi^j}_{G_0(\xi)} - \mu_2\pi_{00} = \lambda_2\underbrace{\sum_{j=1}^{\infty}\pi_{0j-1}\xi^j}_{\xi G_0(\xi)} + \mu_1\underbrace{\sum_{j=0}^{\infty}\pi_{1j}\xi^j}_{G_1(\xi)} + \mu_2\underbrace{\sum_{j=0}^{\infty}\pi_{0j+1}\xi^j}_{\frac{1}{\xi}[G_0(\xi)-\pi_{00}]}$

$\Rightarrow \mu_1 G_1(\xi) - [\lambda_1+\lambda_2(1-\xi)+\mu_2(1-\frac{1}{\xi})]G_0(\xi) = \mu_2(\frac{1}{\xi}-1)\pi_{00}$

En reportant $G_i(\xi) = \alpha(\xi)\xi_1^i$ on trouve (avec $\pi_{00} = 1-\rho$)

$$\alpha(\xi) = \frac{\mu_2(1-\rho)(1-\xi)}{\xi\{\mu_1\xi_1 - [\lambda_1 + \underbrace{\lambda_2(1-\xi)+\mu_2(1-\frac{1}{\xi})}_{-\frac{1}{\xi}(1-\xi)(\mu_2-\lambda_2\xi)}]\}} = \boxed{\frac{\mu_2(1-\rho)(1-\xi)}{(1-\xi)(\mu_2-\lambda_2\xi)-(\lambda_1-\mu_1\xi_1)\xi}}$$

D'où le résultat.