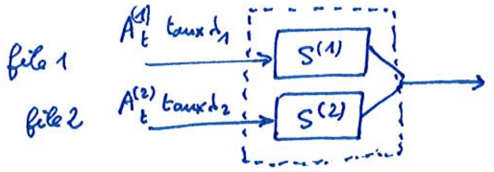
File M/G/1 avec priorités sans préemption

(R.G. Miller Jr. Priority Queues 1960)



la file 1 est prioritaire sur la file 2 mais n'interrompt pas le service d'une personne non-prioritaire.

File résultante $A_t = A_t^{(1)} + A_t^{(2)}$, taux $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$

service résultant $S = S^{(N)}$ avec $N : \Omega \to \{1, 2\}$, $\mathbb{P}(N=1) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$, $\mathbb{P}(N=2) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}$.

$$\mathbb{E}(S) = \frac{\rho}{\lambda} = \frac{1}{\mu} \text{ avec } \rho = \rho_1 + \rho_2 = \frac{\lambda_1}{\mu_1} + \frac{\lambda_2}{\mu_2}, \quad L_S(z) = \frac{\lambda_1}{\lambda} L_{S^{(1)}}(z) + \frac{\lambda_2}{\lambda} L_{S^{(2)}}(z).$$

On introduit une chaîne de Markov induite Q_{t_n} où t_n est l'instant de départ de la n^e personne

$Q_{t_n} = (Q_{t_n}^{(1)}, Q_{t_n}^{(2)})$, et on détermine la loi de $Q_\infty \equiv Q_{t_\infty}$.

Loi conjointe des deux files

Théorème :

$$G_{Q_\infty}(z,\zeta) = \frac{1-\rho}{\zeta\left[z - L_{S^{(1)}}(\lambda_1(1-z)+\lambda_2(1-\zeta))\right]} \left\{ z\left[\zeta L_{S^{(N)}} - L_{S^{(2)}}\right]\Big|_{\lambda_1(1-z)+\lambda_2(1-\zeta)} \right.$$

$$\left. + \frac{\left[z L_{S^{(2)}} - \zeta L_{S^{(1)}}\right]\Big|_{\lambda_1(1-z)+\lambda_2(1-\zeta)}}{\zeta - L_{S^{(2)}}(\zeta^*)} \left[\zeta\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} L_{B^{(1)}}(\lambda_2(1-\zeta)) + \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} L_{S^{(2)}}(\zeta^*)\right) - L_{S^{(2)}}(\zeta^*) \right] \right.$$

où $B^{(1)}$ est la période d'activité du serveur avec la file 1

$$\zeta^* = \lambda_1\left[1 - L_{B^{(1)}}(\lambda_2(1-\zeta))\right] + \lambda_2(1-\zeta)$$

$$L_{B^{(1)}}(s) = L_{S^{(1)}}\left[s + \lambda_1(1 - L_{B^{(1)}}(s))\right]$$

Démonstration :

$$Q_{t_{n+1}} = \begin{cases} \left(Q_{t_n}^{(1)} - 1 + L_{n+1}^{(1)}, Q_{t_n}^{(2)} + L_{n+1}^{(2)}\right) \text{ si } Q_{t_n}^{(1)} \geq 1 & \text{avec } L_{n+1}^{(1)}, L_{n+1}^{(2)} \text{ arrivées de type resp. 1, 2 pendant } S^{(1)} \\ \left(L_{n+1}^{(1)}, Q_{t_n}^{(2)} - 1 + L_{n+1}^{(2)}\right) \text{ si } Q_{t_n}^{(1)} = 0, Q_{t_n}^{(2)} \geq 1 & \text{avec } L_{n+1}^{(1)}, L_{n+1}^{(2)} \text{ arrivées pendant } S^{(2)} \\ \left(L_{n+1}^{(1)}, L_{n+1}^{(2)}\right) \text{ si } Q_{t_n} = (0,0) & \text{avec } L_{n+1}^{(1)} L_{n+1}^{(2)} \text{ arrivées pendant } S^{(N)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow G_{Q_\infty}(z,\zeta) = \mathbb{E}\left[z^{Q^{(1)}+L^{(1)}-1} \zeta^{Q^{(2)}+L^{(2)}}, Q^{(1)} \geq 1 \text{ pendant } S^{(1)}\right]$$
$$+ \mathbb{E}\left[z^{L^{(1)}} \zeta^{Q^{(2)}+L^{(2)}-1}, Q^{(1)} = 0, Q^{(2)} \geq 1 \text{ pendant } S^{(2)}\right]$$
$$+ \mathbb{E}\left[z^{L^{(1)}} \zeta^{L^{(2)}}, Q = (0,0) \text{ pendant } S^{(N)}\right]$$

$$= \frac{1}{z} \mathbb{E}\left(z^{Q^{(1)}} \zeta^{Q^{(2)}}, Q^{(1)} \geq 1\right) \mathbb{E}\left[z^{L^{(1)}} \zeta^{L^{(2)}} \text{ pendant } S^{(1)}\right]$$
$$+ \frac{1}{\zeta} \mathbb{E}\left(\zeta^{Q^{(2)}}, Q^{(1)} = 0, Q^{(2)} \geq 1\right) \mathbb{E}\left(z^{L^{(1)}} \zeta^{L^{(2)}} \text{ pendant } S^{(2)}\right)$$
$$+ \mathbb{E}\left(z^{L^{(1)}} \zeta^{L^{(2)}}, Q = (0,0)\right) \text{ pendant } S^{(N)}$$

$(L^{(i)} \mid S^{(j)}) : \mathcal{P}(\lambda_i S^{(j)})$

$\mathbb{E}(z^{L^{(1)}} \zeta^{L^{(2)}} \text{ pendant } S^{(j)})$

$= L_{S^{(j)}}\left[\lambda_1(1-z) + \lambda_2(1-\zeta)\right]$

$$= \frac{1}{z}\left[G_{Q_\infty}(z,\zeta) - G_{(0,Q_\infty^{(2)})}(\zeta)\right] L_{S^{(1)}}\left[\lambda_1(1-z) + \lambda_2(1-\zeta)\right]$$
$$+ \frac{1}{\zeta}\left[G_{(0,Q_\infty^{(2)})}(\zeta) - \mathbb{P}(Q_\infty = (0,0))\right] L_{S^{(2)}}\left[\lambda_1(1-z) + \lambda_2(1-\zeta)\right]$$
$$+ \mathbb{P}(Q_\infty = (0,0)) L_{S^{(N)}}\left[\lambda_1(1-z) + \lambda_2(1-\zeta)\right]$$

$$\Rightarrow G_{Q_\infty}(z,\zeta) = \frac{\pi_{00}\, z\left[\zeta L_{S^{(N)}} - L_{S^{(2)}}\right] + G_{(0,Q_\infty^{(2)})}(\zeta)\left[z L_{S^{(2)}} - \zeta L_{S^{(1)}}\right]}{\zeta\left(z - L_{S^{(1)}}\right)}\Bigg|_{\lambda_1(1-z)+\lambda_2(1-\zeta)}$$

où $\pi_{00} = \mathbb{P}(Q_\infty = (0,0))$

Calcul de $G_{(0,Q_\infty^{(2)})}(\zeta)$: on introduit une nouvelle chaîne de Markov induite : $Q_{t'_n}^{(2)}$ où t'_n est l'instant de départ de la n^e personne de type 2 ne laissant derrière elle aucune personne de type 1.

$$Q_{t'_{n+1}}^{(2)} = \begin{cases} Q_{t'_n}^{(2)} - 1 + L_{n+1}^{(2)} & \text{si } Q_{t'_n}^{(2)} \geq 1 \text{ pendant le temps } S^{(2)} + \sum_{j=1}^{Z^{(1)}} \underset{\uparrow}{B_j^{(1)}} \\ L_{n+1}^{(2)} & \text{si } Q_{t'_n}^{(2)} = 0 \text{ pendant le temps } \begin{cases} B_1^{(1)} \text{ avec proba } \frac{\lambda_1}{\lambda} \\ S^{(2)} + \sum_{j=1}^{Z^{(1)}} B_j^{(1)} \text{ avec prob. } \frac{\lambda_2}{\lambda} \end{cases} \end{cases}$$

temps de service des descendants de chaque personne de type 1 arrivée pendant $S^{(2)}$.

$$\Rightarrow G_{(0,Q_\infty^{(2)})}(\zeta) = \mathbb{E}\left[\zeta^{Q^{(2)}+L^{(2)}-1}, \underset{Q^{(1)}=0}{Q^{(2)}} \geq 1 \text{ pendant } S^{(2)} + \sum_{j=1}^{Z^{(1)}} B_j^{(1)}\right]$$

$$\left(= \mathbb{E}[\zeta^{Q_\infty^{(2)}}, Q_\infty^{(1)} = 0]\right) \quad + \frac{\lambda_1}{\lambda}\mathbb{E}\left[\zeta^{L^{(2)}}, \underset{Q^{(1)}=0}{Q^{(2)}=0} \text{ pendant } B_1^{(1)}\right] + \frac{\lambda_2}{\lambda}\mathbb{E}\left[\zeta^{L^{(2)}}, \underset{Q^{(1)}=0}{Q^{(2)}=0} \text{ pendant } S^{(2)} + \sum_{j=1}^{Z^{(1)}} B_j^{(1)}\right]$$

$$= \frac{1}{\zeta}\mathbb{E}\left[\zeta^{Q^{(2)}}, \underset{Q^{(1)}=0}{Q^{(2)}} \geq 1\right] \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\left(\zeta^{L^{(2)}} \mid S^{(2)} + \sum_{j=1}^{n} B_j^{(1)}, Z^{(1)} = n\right) \mathbb{P}(Z^{(1)} = n \mid S^{(2)})\right]$$

$$+ \frac{\lambda_1}{\lambda}\mathbb{P}(Q_\infty = 0)\,\mathbb{E}\left[\mathbb{E}(\zeta^{L^{(2)}} \mid B_1^{(1)})\right] + \frac{\lambda_2}{\lambda}\mathbb{P}(Q_\infty = 0)\,\mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\left(\zeta^{L^{(2)}} \mid S^2 + \sum_{j=1}^{n} B_j^{(1)}, Z^{(1)} = n\right) \mathbb{P}(Z^{(1)} = n \mid S^{(2)}\right.$$

$$= \frac{G_{(0,Q_\infty^{(2)})}(\zeta) - \mathbb{P}(Q_\infty = 0)}{\zeta}\,\mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda_1 S^{(2)})^n}{n!} e^{-\lambda_1 S^{(2)}} e^{-\lambda_2(1-\zeta)S^{(2)}} L_{B^{(1)}}(\lambda_2(1-\zeta))^n\right]$$

$$+ \frac{\lambda_1}{\lambda}\mathbb{P}(Q_\infty = 0)\, L_{B_1^{(1)}}[\lambda_2(1-\zeta)] + \frac{\lambda_2}{\lambda}\mathbb{P}(Q_\infty = 0)\,\mathbb{E}[\cdots]$$

$$= \frac{G_{(0,Q_\infty^{(2)})}(\zeta) - \pi_{00}}{\zeta} L_{S^{(2)}}\left[\lambda_1(1 - L_{B^{(1)}}(\lambda_2(1-\zeta))) + \lambda_2(1-\zeta)\right]$$

$$+ \frac{\lambda_1}{\lambda}\pi_{00} L_{B^{(1)}}[\lambda_2(1-\zeta)] + \frac{\lambda_2}{\lambda}\pi_{00} L_{S^{(2)}}[\cdots]$$

$$\Rightarrow \boxed{G_{(0,Q_\infty^{(2)})}(\zeta) = \pi_{00}\frac{\zeta\left[\frac{\lambda_1}{\lambda}L_{B^{(1)}}(\lambda_2(1-\zeta)) + \frac{\lambda_2}{\lambda}L_{S^{(2)}}(\zeta^*)\right] - L_{S^{(2)}}(\zeta^*)}{\zeta - L_{S^{(2)}}(\zeta^*)}}$$

Calcul de π_{00} : on fait $(z, \zeta) \to (1,1)$ (d'abord $z=1$: pas de problème, puis $\zeta \to 1$: $\frac{0}{0} \to$ L'Hôpital) dérivées / $\zeta = 1$

$$1 = G_{Q_\infty}(1,1) = \frac{\pi_{00}\left[L_{S^{(1)}}(0) - \lambda_2 L'_{S^{(1)}}(0) + \lambda_2 L'_{S^{(2)}}(0)\right] + G_{(0,Q_\infty^{(2)})}(1)\left[-\lambda_2 L'_{S^{(2)}}(0) - L_{S^{(1)}}(0) + \lambda_2 L'_{S^{(1)}}(0)\right]}{1 - L_{S^{(1)}}(0) + \lambda_2 L'_{S^{(1)}}(0)}$$

$$\pi_0^{(1)} = G_{(0,Q_\infty^{(2)})}(1) = \pi_{00}\frac{\left[\frac{\lambda_1}{\lambda}L_{B^{(1)}}(0) + \frac{\lambda_2}{\lambda}L_{S^{(2)}}(0)\right] - \frac{\lambda_1}{\lambda}\lambda_2 L'_{B^{(1)}}(0) - \frac{\lambda_1}{\lambda}\zeta^{*\prime}(1) L'_{S^{(2)}}(0)}{1 - \zeta^{*\prime}(1) L_{S^{(2)}}(0)}$$

avec $\zeta^{*\prime}(1) = \lambda_1\lambda_2 L'_{B^{(1)}}(0) - \lambda_2$
$= -\lambda_2(1 + \lambda_1 \underbrace{\mathbb{E}(B^{(1)})}_{\frac{1}{\mu_1 - \lambda_1}})$
$= -\frac{\lambda_2}{1-\rho_1}$

$$= \pi_{00}\frac{1 + \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda}\frac{1}{\mu_1 - \lambda_1} - \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda(1-\rho_1)}\frac{1}{\mu_2}}{1 - \frac{\lambda_2}{1-\rho_1}\frac{1}{\mu_2}}$$

$$= \pi_{00}\frac{1 + \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda(\mu_1-\lambda_1)} - \frac{\lambda_1\rho_2}{\lambda(1-\rho_1)}}{1 - \frac{\rho_2}{1-\rho_1}} = \pi_{00}\frac{\lambda - \lambda_1\rho}{\lambda(1-\rho)}$$

puis $$1 = \Pi_{00} \frac{1+\lambda_2 E(S^{(N)}) - \lambda_2 E(S^{(2)}) + \frac{\lambda-\lambda_1\rho}{\lambda(1-\rho)}\left[\lambda_2 E(S^{(2)}) - \lambda_2 E(S^{(1)}) - 1\right]}{-\lambda_2 E(S^{(1)})}$$

$$= \Pi_{00}\left(-\frac{\mu_1}{\lambda_2}\right)\Big[\underbrace{-\lambda_2 \underbrace{\left(E(S^{(2)}) - E(S^{(N)})\right)}_{\frac{\lambda_1}{\lambda}\left(\frac{1}{\mu_2}-\frac{1}{\mu_1}\right)} + \lambda_2 \frac{\lambda-\lambda_1\rho}{\lambda(1-\rho)}\left(\frac{1}{\mu_2}-\frac{1}{\mu_1}\right)}_{\frac{\lambda_2}{\lambda(1-\rho)}\left(\frac{1}{\mu_2}-\frac{1}{\mu_1}\right)\Big[\underbrace{-\lambda_1(1-\rho)+\lambda-\lambda_1\rho}_{\lambda_2}\Big]} + \underbrace{1 - \frac{\lambda-\lambda_1\rho}{\lambda(1-\rho)}}_{\frac{-\lambda_2\rho}{\lambda(1-\rho)}}\Big]$$

$$= -\frac{\Pi_{00}\,\mu_1}{\lambda(1-\rho)}\Big[\underbrace{\lambda_2\left(\frac{1}{\mu_2}-\frac{1}{\mu_1}\right)-\rho}_{-\frac{\lambda}{\mu_1}}\Big]$$

$$= \frac{\Pi_{00}}{1-\rho}$$

d'où $\boxed{\Pi_{00} = 1-\rho}$ et au passage $\Pi_0^{(1)} = \Pi_{00}\frac{\lambda-\lambda_1\rho}{\lambda(1-\rho)} = \boxed{1-\frac{\lambda_1}{\lambda}\rho}$

puis le résultat final. □

En faisant $s=1$, à l'aide de l'expression de $G_{(0,Q_\infty^{(2)})}(1) = \Pi_0^{(1)} = 1-\frac{\lambda_1}{\lambda}\rho$, on trouve :

corollaire

$$\boxed{\begin{aligned} G_{Q_\infty^{(1)}}(z) &= \left(1-\frac{\lambda_1}{\lambda}\rho\right)\frac{z L_{S^{(2)}}(\lambda_1(1-z)) - L_{S^{(1)}}(\lambda_1(1-z))}{z - L_{S^{(1)}}(\lambda_1(1-z))} + (1-\rho)\frac{\lambda_1 z}{\lambda}\,\frac{L_{S^{(1)}}(\lambda_1(1-z)) - L_{S^{(2)}}(\lambda_1(1-z))}{z - L_{S^{(1)}}(\lambda_1(1-z))} \\ &= \frac{\lambda_1(1-\rho)(1-z)L_{S^{(1)}}(\lambda_1(1-z)) + \lambda_2\left[L_{S^{(1)}}(\lambda_1(1-z)) - z L_{S^{(2)}}(\lambda_1(1-z))\right]}{\lambda\left(L_{S^{(1)}}(\lambda_1(1-z)) - z\right)} \end{aligned}}$$

Nombre moyen de clients en attente

* D.L. en 1 de $G_{Q_\infty^{(1)}}(z)$: on pose $1-z = h \to 0^+$; $L_S(\lambda_1(1-z)) = 1 - \lambda_1 E(S)h + \frac{\lambda_1^2 h^2}{2}E(S^2) + o(h^2)$

$$G_{Q_\infty^{(1)}}(z) = \frac{\lambda_1(1-\rho)h\left[1-\rho_1 h + \lambda_1^2\frac{h^2}{2}E[S^{(1)2}]\right] + \lambda_2\left[1-\rho_1 h + \lambda_1^2\frac{h^2}{2}E(S^{(1)2}) - \left(1-\frac{\lambda_1}{\mu_2}h + \frac{\lambda_1^2}{2}h^2 E(S^{(2)2})\right)\right] + o(h^2)}{\lambda\left[(1-\rho_1)h + \frac{\lambda_1^2}{2}h^2 E(S^{(1)2}) + o(h^2)\right]}$$

$$= \frac{\lambda_1(1-\rho) - \lambda_1\rho_1(1-\rho)h + \lambda_2\left(1+\frac{\lambda_1}{\mu_2}-\rho_1\right) + \lambda_2\left[\frac{1}{2}\lambda_1^2\left(E(S^{(1)2}) - E(S^{(2)2})\right) - \frac{\lambda_1}{\mu_2}\right]h + o(h}{\lambda(1-\rho_1)\left[1+\frac{\lambda_1^2}{2(1-\rho_1)}E(S^{(1)2})h + o(h)\right]}$$

$$= \left\{1 - h\left[\frac{\lambda_1}{\lambda}\rho - \frac{\lambda_1^2}{2(1-\rho_1)}\frac{\lambda_2}{\lambda}\left(E(S^{(1)2}) - E(S^{(2)2})\right)\right] + o(h)\right\}\left\{1 - h\frac{\lambda_1^2}{2}E(S^{(1)2}) + o(h)\right\}$$

$$= 1 - h\left\{\frac{\lambda_1}{\lambda}\rho + \frac{\lambda_1^2}{2(1-\rho_1)}\left[\frac{\lambda_2}{\lambda}E(S^{(2)2}) - \frac{\lambda_2}{\lambda}E(S^{(1)2}) + E(S^{(1)2})\right]\right\} + o(h)$$

$$\boxed{G_{Q_\infty^{(1)}}(z) \underset{z\to 1^-}{=} 1 + (z-1)\left[\frac{\lambda_1}{\lambda}\rho + \frac{\lambda_1^2}{2(1-\rho_1)\lambda}\left[\lambda_1 E(S^{(1)2}) + \lambda_2 E(S^{(2)2})\right]\right] + o(z-1)}$$

* **D.L. en 1 de $G_{Q_\infty^{(2)}}(\xi)$** $= (1-\rho)\dfrac{\xi L_{S^{(1)}} - L_{S^{(2)}}}{\xi(1-L_{S^{(1)}})}\Bigg|_{\lambda_2(1-\xi)} + G_{(0,Q_\infty^{(2)})}(\xi)\dfrac{L_{S^{(2)}} - \xi L_{S^{(1)}}}{\xi(1-L_{S^{(1)}})}\Bigg|_{\lambda_2(1-\xi)}$

en posant $h = 1-\xi \to 0^+$: $\xi^* = \lambda_1[1-L_{B^{(1)}}(\lambda_2 h)] + \lambda_2 h = \lambda_2\underbrace{[1+\lambda_1 \mathbb{E}(B^{(1)})]}_{\mu_1 \mathbb{E}(B^{(1)})} h - \frac{\lambda_1\lambda_2^2}{2}\mathbb{E}(B^{(1)2})h^2 + o(h^2)$

$L_{B^{(1)}}$ solution de $L_{B^{(1)}}(s) = L_{S^{(1)}}[s + \lambda_1(1-L_{B^{(1)}}(s))]$

$$\Rightarrow \begin{cases} L'_{B^{(1)}}(s) = [1-\lambda_1 L'_{B^{(1)}}(s)]\; L'_{S^{(1)}}(\dots) \\ L''_{B^{(1)}}(s) = [1-\lambda_1 L'_{B^{(1)}}(s)]^2 L''_{S^{(1)}}(\dots) - \lambda_1 L''_{B^{(1)}}(s)\, L'_{S^{(1)}}(\dots) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} L'_{B^{(1)}}(0) = [1-\lambda_1 L'_{B^{(1)}}(0)]\, L'_{S^{(1)}}(0) \\ L''_{B^{(1)}}(0) = [1-\lambda_1 L'_{B^{(1)}}(0)]^2 L''_{S^{(1)}}(0) - \lambda_1 L''_{B^{(1)}}(0)\, L'_{S^{(1)}}(0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} L'_{B^{(1)}}(0) = \dfrac{L'_{S^{(1)}}(0)}{1+\lambda_1 L'_{S^{(1)}}(0)} \\ L''_{B^{(1)}}(0) = \dfrac{[1-\lambda_1 L'_{B^{(1)}}(0)]^2}{1+\lambda_1 L'_{S^{(1)}}(0)} L''_{S^{(1)}}(0) = \dfrac{L'_{B^{(1)}}(0)^2}{1+\lambda_1 L'_{S^{(1)}}(0)} \times \dfrac{L''_{S^{(1)}}(0)}{L'_{S^{(1)}}(0)^2} \end{cases}$$

$$\text{d'où} \begin{cases} \mathbb{E}(B^{(1)}) = \dfrac{\mathbb{E}(S^{(1)})}{1-\lambda_1\mathbb{E}(S^{(1)})} = \dfrac{1}{\mu_1(1-\rho_1)} \\ \mathbb{E}(B^{(1)2}) = \dfrac{\mu_1^2 (\mathbb{E}B^{(1)})^2\, \mathbb{E}(S^{(1)2})}{1-\rho_1} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} L_{S^{(2)}}(\xi^*) &= 1 - \xi^*\mathbb{E}(S^{(2)}) + \frac{\xi^{*2}}{2}\mathbb{E}(S^{(2)2}) + o(h^2) \\ &= 1 - \lambda_2\frac{\mu_1}{\mu_2}\mathbb{E}(B^{(1)})h + \frac{\lambda_1\lambda_2^2}{2\mu_2}\mathbb{E}(B^{(1)2})h^2 + \frac{\lambda_2^2\mu_1^2}{2}(\mathbb{E}B^{(1)})^2\,\mathbb{E}(S^{(2)2})h^2 + o(h^2) \\ &= 1 - \frac{\lambda_2\mu_1}{\mu_2}\mathbb{E}(B^{(1)})h + \frac{\lambda_2^2}{2}\left[\frac{\lambda_1}{\mu_2}\mathbb{E}(B^{(1)2}) + \mu_1^2(\mathbb{E}B^{(1)})^2\,\mathbb{E}(S^{(2)2})\right]h^2 + o(h^2) \end{aligned}$$

d'abord D.L. de $G_{(0,Q_\infty^{(2)})}(\xi) = (1-\rho)\dfrac{\frac{\xi}{\lambda}(\lambda_1 L_{B^{(1)}}(\lambda_2(1-\xi)) + \lambda_2 L_{S^{(2)}}(\xi^*)) - L_{S^{(2)}}(\xi^*)}{\xi - L_{S^{(2)}}(\xi^*)}$

$$= \frac{1-\rho}{\lambda}\times\frac{\left[\begin{aligned}&\lambda_1(1-h)\left[1-\lambda_2\mathbb{E}(B^{(1)})h + \tfrac{\lambda_2^2}{2}\mathbb{E}(B^{(1)2})h^2\right] \\ &- (\lambda_1+\lambda_2 h)\left[1-\tfrac{\lambda_2\mu_1}{\mu_2}\mathbb{E}(B^{(1)})h + \tfrac{\lambda_2^2}{2}\left(\tfrac{\lambda_1}{\mu_2}\mathbb{E}(B^{(1)2}) + \mu_1^2(\mathbb{E}B^{(1)})^2\mathbb{E}(S^{(2)2})\right)h^2\right] + o(h^2)\end{aligned}\right]}{(1-h) - (1 - \frac{\lambda_2\mu_1}{\mu_2}\mathbb{E}(B^{(1)})h + \frac{\lambda_2^2}{2}(\frac{\lambda_1}{\mu_2}\mathbb{E}(B^{(1)2}) + \mu_1^2(\mathbb{E}B^{(1)})^2\mathbb{E}(S^{(2)2}))h^2 + o(h^2)}$$

$$= \frac{1-\rho}{\lambda}\times\frac{\left[\begin{aligned}&-\lambda_1(1+\lambda_2\mathbb{E}(B^{(1)}))h + (\tfrac{\lambda_1\lambda_2\mu_1}{\mu_2}\mathbb{E}(B^{(1)}) - \lambda_2)h + \lambda_1(\tfrac{\lambda_2^2}{2}\mathbb{E}(B^{(1)2}) + \lambda_2\mathbb{E}(B^{(1)}))h^2 \\ &- \lambda_1\tfrac{\lambda_2^2}{2}\left(\tfrac{\lambda_1}{\mu_2}\mathbb{E}(B^{(1)2}) + \mu_1^2(\mathbb{E}B^{(1)})^2\mathbb{E}(S^{(2)2})\right)h^2 + \tfrac{\lambda_2^2\mu_1}{\mu_2}\mathbb{E}(B^{(1)})h^2 + o(h^2)\end{aligned}\right]}{(\frac{\lambda_2\mu_1}{\mu_2}\mathbb{E}(B^{(1)}) - 1)h - \frac{\lambda_2^2}{2}(\frac{\lambda_1}{\mu_2}\mathbb{E}(B^{(1)2}) + \mu_1^2(\mathbb{E}B^{(1)})^2\mathbb{E}(S^{(2)2}))h^2 + o(h^2)}$$

$$= \frac{1-\rho}{\lambda} \times \frac{\left[\left(\lambda_1\lambda_2\left(\frac{\mu_1}{\mu_2}-1\right)\mathbb{E}(B^{(1)})-\lambda\right)h + \left[\frac{\lambda_1\lambda_2^2}{2}\left(1-\frac{\lambda_1}{\mu_2}\right)\mathbb{E}(B^{(1)2}) + \lambda_2\left(\lambda_1+\mu_1\frac{\lambda_2}{\mu_2}\right)\mathbb{E}(B^{(1)}) - \frac{\lambda_1\lambda_2^2\mu_1^2}{2}(\mathbb{E}B^{(1)})^2\mathbb{E}(S^{(2)2})\right]h^2+o(h\right.}{-\frac{1-\rho}{1-\rho_1}h - \frac{\lambda_2^2\mu_1^2}{2}\left[\frac{\lambda_1 E(S^{(1)2})}{\mu_2(1-\rho_1)} + \mathbb{E}(S^{(2)2})\right](\mathbb{E}B^{(1)})^2h^2+o(h^2)}$$

or $\lambda_1\lambda_2\left(\frac{\mu_1}{\mu_2}-1\right)\mathbb{E}(B^{(1)})-\lambda = \frac{\lambda_1\lambda_2(\mu_1-\mu_2)}{\mu_1\mu_2(1-\rho_1)} - (\lambda_1+\lambda_2) = \frac{\lambda_1\lambda_2\mu_1 - \cancel{\lambda_1\lambda_2}\mu_2 - \lambda_1\mu_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1\mu_2 + \lambda_1^2\mu_2 + \cancel{\lambda_1\lambda_2}}{\mu_1\mu_2(1-\rho_1)}$

$$= \frac{\lambda_1(\lambda_2\mu_1+\lambda_1\mu_2) - \lambda\mu_1\mu_2}{\mu_1\mu_2(1-\rho_1)} = \frac{\lambda_1\rho-\lambda}{1-\rho_1}$$

donc $G_{(0,Q_\infty^{(2)})}(z) = \frac{\lambda-\lambda_1\rho}{\lambda} \times \frac{1+h\frac{1-\rho_1}{\lambda_1\rho-\lambda}\left[\frac{\lambda_1\lambda_2^2\mu_1^2}{2}\left(1-\frac{\lambda_1}{\mu_2}\right)\frac{(\mathbb{E}B^{(1)})^2\mathbb{E}(S^{(1)2})}{1-\rho_1} + \frac{\lambda_2(\lambda_1+\mu_1\rho_2)}{\mu_1(1-\rho_1)} - \frac{\lambda_1\lambda_2^2\mu_1^2}{2}(\mathbb{E}B^{(1)})^2\mathbb{E}(S^{(}\right.}{1+h\frac{\lambda_2^2\mu_1^2}{2(1-\rho)}\left[\frac{\lambda_1}{\mu_2}E(S^{(1)2}) + (1-\rho_1)\mathbb{E}(S^{(2)2})\right](\mathbb{E}B^{(1)})^2+o(h)}$

$$= \frac{\lambda-\lambda_1\rho}{\lambda}\left[1+h\left(\frac{\lambda_1\lambda_2^2\mu_1^2\left(1-\frac{\lambda_1}{\mu_2}\right)}{2(\lambda_1\rho-\lambda)}(\mathbb{E}B^{(1)})^2\mathbb{E}(S^{(1)2}) + \frac{\lambda_2(\lambda_1+\mu_1\rho_2)}{\mu_1(\lambda_1\rho-\lambda)} - \frac{\lambda_1\lambda_2^2\mu_1^2}{2(\lambda_1\rho-\lambda)}(1-\rho_1)(\mathbb{E}B^{(1)})^2\mathbb{E}(S^{(2)2}) - \frac{\lambda_1\lambda_2^2\mu_1^2}{2\mu_2(1-\rho)}(\mathbb{E}B^{(1)})^2\mathbb{E}(S^{(1)2}) - \frac{\lambda_2^2\mu_1^2}{2(1-\rho)}(1-\rho_1)(\mathbb{E}B^{(1)})^2\mathbb{E}(S^{(2)2})\right)+o(h)\right]$$

$$= \frac{\lambda-\lambda_1\rho}{\lambda}\left\{1+\left[\left(\frac{\lambda_1\lambda_2^2-\lambda_1^2\lambda_2\rho_2}{\lambda_1\rho-\lambda} - \frac{\lambda_1\lambda_2\rho_2}{1-\rho}\right)\frac{\mu_1^2}{2}(\mathbb{E}B^{(1)})^2\mathbb{E}(S^{(1)2}) + \frac{\lambda_2(\rho_1+\rho_2)}{\lambda_1\rho-\lambda} - (1-\rho_1)(\mathbb{E}B^{(1)})^2\mathbb{E}(S^{(2)2})\frac{\lambda_2^2\mu_1^2}{2}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1\rho-\lambda}+\frac{1}{1-\rho}\right)\right]h+o(h)\right\}$$

or $\frac{\lambda_1\lambda_2^2-\lambda_1^2\lambda_2\rho_2}{\lambda_1\rho-\lambda} - \frac{\lambda_1\lambda_2\rho_2}{1-\rho} = \lambda_1\lambda_2\left[\frac{\lambda_2-\lambda_1\rho_2}{\lambda_1\rho-\lambda} - \frac{\rho_2}{1-\rho}\right] = \frac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_1\rho-\lambda)(1-\rho)}(\lambda_2-\lambda_2\rho-\lambda_1\rho_1+\cancel{\lambda_1\rho\rho_2}-\cancel{\lambda_1\rho\rho_2}+\lambda\rho_2$

$$= \frac{\lambda_1\lambda_2(\lambda_2-\lambda_2\rho+\lambda_2\rho_2)}{(\lambda_1\rho-\lambda)(1-\rho)} = \frac{\lambda_1\lambda_2^2(1-\rho_1)}{(\lambda_1\rho-\lambda)(1-\rho)}$$

et $\frac{\lambda_1}{\lambda_1\rho-\lambda} + \frac{1}{1-\rho} = \frac{-\lambda_2}{(\lambda_1\rho-\lambda)(1-\rho)}$

d'où $G_{(0,Q_\infty^{(2)})}(z) = \left(1-\frac{\lambda_1}{\lambda}\rho\right)\left\{1+\left[\frac{\lambda_1\lambda_2^2\ \mathbb{E}(S^{(1)2})}{2(\lambda_1\rho-\lambda)(1-\rho)(1-\rho_1)} + \frac{\lambda_2\rho}{\lambda_1\rho-\lambda} + \frac{\lambda_2^3\ \mathbb{E}(S^{(2)2})}{2(\lambda_1\rho-\lambda)(1-\rho)(1-\rho_1)}\right]h+o(h)\right\}$

$$\boxed{G_{(0,Q_\infty^{(2)})}(z) \underset{\substack{h\to 0\\(z\to 1^-)}}{=} \underbrace{\left(1-\frac{\lambda_1}{\lambda}\rho\right)}_{\mathbb{P}(Q_\infty^{(1)}=0)} - h\underbrace{\left[\frac{\lambda_2}{\lambda}\rho + \frac{\lambda_2^2}{2}\frac{E(S^{(N)2})}{(1-\rho_1)(1-\rho)}\right]}_{\mathbb{E}[Q_\infty^{(2)}\mathbb{1}_{Q_\infty^{(1)}=0}]} + o(h)}$$

avec $\mathbb{E}(S^{(N)2}) = \frac{\lambda_1}{\lambda}\mathbb{E}(S^{(1)2}) + \frac{\lambda_2}{\lambda}\mathbb{E}(S^{(2)2})$

On peut maintenant calculer le DL de $G_{Q_\infty^{(2)}}(\xi)$:

$$G_{Q_\infty^{(2)}}(\xi) = (1-\rho)\ \frac{(1-h)\left[1-\lambda_2\mathbb{E}(S^{(N)})h+\frac{\lambda_2^2}{2}\mathbb{E}(S^{(N)2})h^2+o(h^2)\right]-\left[1-\lambda_2\mathbb{E}(S^{(2)})h+\frac{\lambda_2^2}{2}\mathbb{E}(S^{(2)2})h^2+o(h^2)\right]}{(1-h)\left[\lambda_2\mathbb{E}(S^{(1)})h-\frac{\lambda_2^2}{2}\mathbb{E}(S^{(1)2})h^2+o(h^2)\right]}$$

$$+\left[\left(1-\frac{\lambda_1}{\lambda}\rho\right)-\left[\frac{\lambda_2}{\lambda}\rho+\frac{\lambda_2^2}{2}\frac{\mathbb{E}(S^{(N)2})}{(1-\rho_1)(1-\rho)}\right]h+o(h)\right]\frac{\left[1-\lambda_2\mathbb{E}(S^{(2)})h+\frac{\lambda_2^2}{2}\mathbb{E}(S_2^{(2)2})h^2+o(h^2)\right]-(1-h)\left[1-\lambda_2\mathbb{E}(S^{(1)})h+\frac{\lambda_2^2}{2}\mathbb{E}(S^{(1)} \ h\right.}{(1-h)\left[\lambda_2\mathbb{E}(S^{(1)})h-\frac{\lambda_2^2}{2}\mathbb{E}(S^{(1)2})h^2+o(h^2)\right]}$$

$$= (1-\rho)\ \frac{\left[-\lambda_2\mathbb{E}(S^{(N)})-1+\lambda_2\mathbb{E}(S^{(2)})\right]h+\left[\frac{\lambda_2^2}{2}\mathbb{E}(S^{(N)2})+\lambda_2\mathbb{E}(S^{(N)})-\frac{\lambda_2^2}{2}\mathbb{E}(S^{(2)2})\right]h^2+o(h^2)}{\lambda_2\mathbb{E}(S^{(1)})h-\left[\frac{\lambda_2^2}{2}\mathbb{E}(S^{(1)2})+\lambda_2\mathbb{E}(S^{(1)})\right]h^2+o(h^2)}$$

$$+\left[\left(1-\frac{\lambda_1}{\lambda}\rho\right)-\left[\frac{\lambda_2}{\lambda}\rho+\frac{\lambda_2^2}{2}\frac{\mathbb{E}(S^{(N)2})}{(1-\rho_1)(1-\rho)}\right]h+o(h)\right]\ \frac{\left[1-\lambda_2\mathbb{E}(S^{(2)})+\lambda_2\mathbb{E}(S^{(1)})\right]h+\left[\frac{\lambda_2^2}{2}\mathbb{E}(S^{(2)2})-\frac{\lambda_2^2}{2}\mathbb{E}(S^{(1)2})-\lambda_2\mathbb{E}(S^{(1)})\right]}{\lambda_2\mathbb{E}(S^{(1)})h-\left[\frac{\lambda_2^2}{2}\mathbb{E}(S^{(1)2})+\lambda_2\mathbb{E}(S^{(1)})\right]h^2+o(h^2)}$$

$$= (1-\rho)\ \frac{\left[\rho_2-1-\frac{\lambda_2}{\lambda}\rho\right]+\left[\frac{\lambda_2^2}{2}\overbrace{\left[\mathbb{E}(S^{(N)2})-\mathbb{E}(S^{(2)})^2\right]}^{\frac{\lambda_1}{\lambda}\left[\mathbb{E}(S^{(1)2})-\mathbb{E}(S^{(2)2})\right]}+\frac{\lambda_2}{\lambda}\rho\right]h+o(h)}{\frac{\lambda_2}{\mu_1}-\left(\frac{\lambda_2^2}{2}\mathbb{E}(S^{(1)2})+\frac{\lambda_2}{\mu_1}\right)h+o(h)}$$

$$+\frac{\left(1-\frac{\lambda_1}{\lambda}\rho\right)\left(1-\rho_2+\frac{\lambda_2}{\mu_1}\right)+\left[\left(1-\frac{\lambda_1}{\lambda}\rho\right)\left(\frac{\lambda_2^2}{2}\mathbb{E}(S^{(2)2})-\frac{\lambda_2^2}{2}\mathbb{E}(S^{(1)2})-\frac{\lambda_2}{\mu_1}\right)-\left(1-\rho_2+\frac{\lambda_2}{\mu_1}\right)\left(\frac{\lambda_2}{\lambda}\rho+\frac{\lambda_2^2}{2}\frac{\mathbb{E}(S^{(N)2})}{(1-\rho_1)(1-\rho)}\right)\right]h+o}{\frac{\lambda_2}{\mu_1}-\left(\frac{\lambda_2^2}{2}\mathbb{E}(S^{(1)2})+\frac{\lambda_2}{\mu_1}\right)h+o(h)}$$

$$= \frac{\begin{aligned}&\left[(1-\rho)\left(\rho_2-1-\frac{\lambda_2}{\lambda}\rho\right)+\left(1-\frac{\lambda_1}{\lambda}\rho\right)\left(1-\rho_2+\frac{\lambda_2}{\mu_1}\right)\right]+\Big[(1-\rho)\left[\frac{\lambda_1\lambda_2^2}{2\lambda}\left(\mathbb{E}(S^{(1)2})-\mathbb{E}(S^{(2)2})\right)+\frac{\lambda_2}{\lambda}\rho\right]\\&\qquad+\left(1-\frac{\lambda_1}{\lambda}\rho\right)\left[\frac{\lambda_2^2}{2}\left(\mathbb{E}(S^{(2)2})-\mathbb{E}(S^{(1)2})\right)-\frac{\lambda_2}{\mu_1}\right)\\&\qquad-\left(1-\rho_2+\frac{\lambda_2}{\mu_1}\right)\left[\frac{\lambda_2}{\lambda}\rho+\frac{\lambda_2^2}{2}\frac{\mathbb{E}(S^{(N)2})}{(1-\rho_1)(1-\rho)}\right]\ h+o(h)\end{aligned}}{\frac{\lambda_2}{\mu_1}-\left[\frac{\lambda_2^2}{2}\mathbb{E}(S^{(1)2})+\frac{\lambda_2}{\mu_1}\right]h+o(h)}$$

or

- $(1-\rho)\left(\rho_2-1-\frac{\lambda_2}{\lambda}\rho\right)+\left(1-\frac{\lambda_1}{\lambda}\rho\right)\left(1-\rho_2+\frac{\lambda_2}{\mu_1}\right) = (1-\rho_2)\big(\underbrace{1-\frac{\lambda_1}{\lambda}\rho-1+\rho}_{\frac{\lambda_2}{\lambda}\rho}\big)-\frac{\lambda_2}{\lambda}\rho(1-\rho)+\frac{\lambda_2}{\mu_1}\left(1-\frac{\lambda_1}{\lambda}\rho\right)$

  $= \frac{\lambda_2}{\lambda}\rho\big(\underbrace{1-\rho_2-1+\rho-\rho_1}_{0}\big)+\frac{\lambda_2}{\mu_1} = \frac{\lambda_2}{\mu_1}$

- coef. de $\mathbb{E}(S^{(1)2})-\mathbb{E}(S^{(2)2})$: $(1-\rho)\frac{\lambda_1\lambda_2^2}{2\lambda}-\frac{\lambda_2^2}{2}\left(1-\frac{\lambda_1}{\lambda}\rho\right) = \frac{\lambda_2^2}{2}\big(\underbrace{\frac{\lambda_1}{\lambda}-\rho\frac{\lambda_1}{\lambda}-1+\rho\frac{\lambda_1}{\lambda}}_{-\frac{\lambda_2}{\lambda}}\big) = -\frac{\lambda_2^3}{2\lambda}$

- constantes dans h : $(1-\rho)\frac{\lambda_2}{\lambda}\rho-\frac{\lambda_2}{\mu_1}\left(1-\frac{\lambda_1}{\lambda}\rho\right)-\frac{\lambda_2}{\lambda}\rho\left(1-\rho_2+\frac{\lambda_2}{\mu_1}\right)$

  $= \frac{\lambda_2}{\lambda}\rho\big(\underbrace{1-\rho+\rho_1-1+\rho_2}_{0}-\frac{\lambda_2}{\mu_1}\big)-\frac{\lambda_2}{\mu_1} = -\frac{\lambda_2}{\mu_1}\left(1+\frac{\lambda_2}{\lambda}\rho\right)$

donc $$G_{Q^{(2)}_\infty}(\zeta) = \frac{\frac{\lambda_2}{\mu_1} + \left[-\frac{\lambda_2^3}{2\lambda}\left(\mathbb{E}(S^{(1)2}) - \mathbb{E}(S^{(2)2})\right) - \frac{\lambda_2^2}{2}\left(1-\rho_2+\frac{\lambda_2}{\mu_1}\right)\frac{\mathbb{E}(S^{(N)2})}{(1-\rho_1)(1-\rho)} - \frac{\lambda_2}{\mu_1}\left(1+\frac{\lambda_2}{\lambda}\rho\right)\right]h + o(h)}{\frac{\lambda_2}{\mu_1} - \left[\frac{\lambda_2^2}{2}\mathbb{E}(S^{(1)2}) + \frac{\lambda_2}{\mu_1}\right]h + o(h)}$$

$$= 1 - h\Big[\frac{\mu_1\lambda_2^2}{2\lambda}\left(\mathbb{E}(S^{(1)2}) - \mathbb{E}(S^{(2)2})\right) + \frac{\lambda_2^2}{2}\left(\frac{\mu_1}{\lambda_2} - \frac{\mu_1}{\mu_2} + 1\right)\frac{\mathbb{E}(S^{(N)2})}{(1-\rho_1)(1-\rho)} + \left(1+\frac{\lambda_2}{\lambda}\rho\right) - \frac{\lambda_2\mu_1}{2}\mathbb{E}(S^{(1)2}) - 1$$

$$+ o(h)$$

$$= 1 - h\Big[\frac{\lambda_2}{\lambda}\rho + \frac{\lambda_2\mu_1}{2\lambda}\Big[\underbrace{(\lambda_2-\lambda)}_{-\lambda_1}\mathbb{E}(S^{(1)2}) - \lambda_2\mathbb{E}(S^{(2)2})\Big] + \frac{\lambda_2}{2}(\mu_1-\mu_1\rho_2+\lambda_2)\frac{\mathbb{E}(S^{(N)2})}{(1-\rho_1)(1-\rho)}\Big] + o($$

$$= 1 - h\left[\frac{\lambda_2}{\lambda}\rho - \frac{\lambda_2}{2}\mu_1\mathbb{E}(S^{(N)2}) + \frac{\lambda_2}{2}\frac{(\mu_1-\mu_1\rho_2+\lambda_2)}{(1-\rho_1)(1-\rho)}\mathbb{E}(S^{(N)2})\right] + o(h)$$

coef. de $\mathbb{E}(S^{(N)2})$: $$-\frac{\lambda_2}{2}\mu_1 + \frac{\lambda_2(\mu_1-\mu_1\rho_2+\lambda_2)}{2(1-\rho_1)(1-\rho)} = \frac{\lambda_2[\mu_1-\mu_1\rho_2+\lambda_2-\mu_1(1-\rho_1)(1-\rho)]}{2(1-\rho_1)(1-\rho)}$$

$$= \frac{\lambda_2[\mu_1-\mu_1\rho_2+\lambda_2-\mu_1+\mu_1(\rho+\rho_1)-\mu_1\rho_1\rho]}{2(1-\rho_1)(1-\rho)}$$

$$= \frac{\lambda_2[\lambda_2+2\mu_1\rho_1-\mu_1\rho_1\rho]}{2(1-\rho_1)(1-\rho)}$$

$$= \frac{\lambda_2\left[\lambda_1+\lambda-\lambda_1\frac{\lambda}{\mu}\right]}{2(1-\rho_1)(1-\rho)}$$

$$\Rightarrow G_{Q^{(2)}_\infty}(\zeta) = 1 - h\left[\frac{\lambda_2}{\lambda}\rho + \frac{\lambda_2[\lambda+\lambda_1(1-\rho)]}{2(1-\rho_1)(1-\rho)}\mathbb{E}[S^{(N)2}]\right] + o(h)$$

$$\boxed{G_{Q^{(2)}_\infty}(\zeta) \underset{\zeta\to1^-}{=} 1 + (\zeta-1)\left[\frac{\lambda_2}{\lambda}\rho + \frac{\lambda_2(\lambda+\lambda_1(1-\rho))}{2(1-\rho_1)(1-\rho)\lambda}\left[\lambda_1\mathbb{E}(S^{(1)2}) + \lambda_2\mathbb{E}(S^{(2)2})\right]\right] + o(\zeta-1)}$$

D'où $$\boxed{\begin{cases}\mathbb{E}(Q^{(1)}_\infty) = \frac{\lambda_1}{\lambda}\rho + \frac{\lambda_1^2}{2(1-\rho_1)\lambda}\left[\lambda_1\mathbb{E}(S^{(1)2}) + \lambda_2\mathbb{E}(S^{(2)2})\right] \\ \mathbb{E}(Q^{(2)}_\infty) = \frac{\lambda_2}{\lambda}\rho + \frac{\lambda_2(\lambda+\lambda_1(1-\rho))}{2(1-\rho_1)(1-\rho)\lambda}\left[\lambda_1\mathbb{E}(S^{(1)2}) + \lambda_2\mathbb{E}(S^{(2)2})\right]\end{cases}}$$

Calcul de $\mathbb{P}(Q_\infty^{(2)}=0)$ $= G_{Q_\infty}(1,0)$

$$G_{Q_\infty}(1,\xi) = \frac{(1-\rho)\left(\xi L_{S(N)} - L_{S(2)}\right) + G_{(0,Q_\infty^{(2)})}(\xi)\left(L_{S(2)} - \xi L_{S(1)}\right)}{\xi\,(1-L_{S(1)})}\Bigg|_{\lambda_2(1-\xi)}$$

$$= \frac{(1-\rho)L_{S(N)} - G_{(0,Q_\infty^{(2)})}(\xi)L_{S(1)}}{1-L_{S(1)}}\Bigg|_{\lambda_2(1-\xi)} - \frac{\overbrace{(1-\rho)}^{G_{(0,Q_\infty^{(2)})}(0)} - G_{(0,Q_\infty^{(2)})}(\xi)}{\xi}\;\frac{L_{S(2)}}{1-L_{S(1)}}\Bigg|_{\lambda_2(1-\xi)}$$

$$\xrightarrow[\xi\to 0]{} (1-\rho)\,\frac{L_{S(N)}(\lambda_2)-L_{S(1)}(\lambda_2)}{1-L_{S(1)}(\lambda_2)} + G'_{(0,Q_\infty^{(2)})}(0)\,\frac{L_{S(2)}(\lambda_2)}{1-L_{S(1)}(\lambda_2)}$$

or $$G'_{(0,Q_\infty^{(2)})}(0) = (1-\rho)\left[\frac{\frac{\lambda_1}{\lambda}L_{B(1)}(\lambda_2) + \frac{\lambda_2}{\lambda}L_{S(2)}(\lambda_2) - \xi_0^{*\prime}L'_{S(2)}(\xi_0^*)}{-L_{S(2)}(\xi_0^*)} + \frac{L_{S(2)}(\xi_0^*)\left[1-\xi_0^{*\prime}L'_{S(2)}(\xi_0^*)\right]}{L_{S(2)}(\xi_0^*)^2}\right]$$

$$= (1-\rho)\,\frac{1-\frac{\lambda_1}{\lambda}L_{B(1)}(\lambda_2) - \frac{\lambda_2}{\lambda}L_{S(2)}(\xi_0^*)}{L_{S(2)}(\xi_0^*)}$$

avec $\begin{cases} \xi_0^* = \lambda - \lambda_1 L_{B(1)}(\lambda_2) \\ \xi_0^{*\prime} = \left.\frac{d\xi^*}{d\xi}\right|_{\xi=0} = \lambda_2\left[\lambda_1 L'_{B(1)}(\lambda_2)-1\right] \end{cases}$

$\uparrow$ pas utilisé

$$= (1-\rho)\,\frac{1-L_{S(N)}}{L_{S(2)}}\Bigg|_{\lambda-\lambda_1 L_{B(1)}(\lambda_2)}$$

et $L_{B(1)}(s) = L_{S(1)}\left(s+\lambda_1(1-L_{B(1)}(s))\right)$

$\Rightarrow L_{B(1)}(\lambda_2) = L_{S(1)}(\xi_0^*)$

d'où $$\boxed{\mathbb{P}(Q_\infty^{(2)}=0) = \frac{1-\rho}{1-L_{S(1)}(\lambda_2)}\left[\frac{\lambda_2}{\lambda}\left(L_{S(2)}(\lambda_2)-L_{S(1)}(\lambda_2)\right) + L_{S(2)}(\lambda_2)\,\frac{1-L_{S(N)}}{L_{S(2)}}\Bigg|_{\lambda-\lambda_1 L_{B(1)}(\lambda_2)}\right]}$$

Temps d'attente

* type 1 Soit N'_n le type du n^e client quittant le système.

2 possibilités:
- $\to Q_{t_n}^{(1)} \geq 1$ et $\begin{cases} Q_{t_{n+1}}^{(1)} = Q_{t_n}^{(1)} - 1 + L_{n+1}^{(1)} \\ N'_{n+1} = 1 \end{cases}$
- $\to Q_{t_n}^{(1)} = 0$ et
  - $\to Q_{t_n}^{(2)} \geq 1 \Rightarrow N'_{n+1} = 2 \to$ non
  - $\to Q_{t_n}^{(2)} = 0 \Rightarrow$ file vide

on attend le prochain client (de type N_{n+1})
Comme $N'_{n+1}=1$, le prochain est de type 1, i.e. $N_{n+1}=1$

si $N'_{n+1}=1$:

$$Q_{t_{n+1}}^{(1)} = \begin{cases} Q_{t_n}^{(1)} - 1 + L_{n+1}^{(1)} & \text{si } Q_{t_n}^{(1)} \geq 1 \text{ avec } L_{n+1}^{(1)} \text{ arrivées de type 1 pendant } S^{(1)} \\ \underset{0}{L_{n+1}^{(1)}}\mathbb{1}_{\{N_{n+1}=1\}} & \text{si } Q_{t_n}^{(1)} = Q_{t_n}^{(2)} = 0 \text{ avec } L_{n+1}^{(1)} \text{ arrivées de type 1 pendant } S^{(1)} \end{cases}$$

$$G_{Q_\infty^{(1)},N'=1}(z) \equiv \mathbb{E}\left(z^{Q_\infty^{(1)}}, N'=1\right) = \mathbb{E}\left[z^{Q^{(1)}+L^{(1)}-1}, Q^{(1)}\geq 1 \text{ pendant } S^{(1)}\right] + \mathbb{E}\left[z^{L^{(1)}}, Q^{(1)}=Q^{(2)}=0 \text{ pendant } S^{(1)}, N=1\right]$$

$$= \frac{1}{z}\,\mathbb{E}\left[z^{Q^{(1)}}, Q^{(1)}\geq 1\right]\underbrace{\mathbb{E}\left[z^{L^{(1)}} \text{pendant } S^{(1)}\right]}_{L_{S(1)}(\lambda_1(1-z))} + (1-\rho)\frac{\lambda_1}{\lambda}\,\mathbb{E}\left[z^{L^{(1)}} \text{pendant } S^{(1)}\right]$$

$$= \frac{1}{z}L_{S(1)}(\lambda_1(1-z))\left[G_{Q^{(1)}}(z) - \underbrace{\mathbb{P}(Q^{(1)}=0)}_{1-\frac{\lambda_1}{\lambda}\rho} + (1-\rho)\frac{\lambda_1}{\lambda}z\right]$$

$$= \frac{1}{z}L_{S(1)}\left[\frac{\lambda_1(1-\rho)(1-z)L_{S(1)} + \lambda_2\left[L_{S(1)} - zL_{S(2)}\right]}{\lambda\left[L_{S(1)}-z\right]} - \frac{1}{\lambda}\left[\lambda_1(1-\rho)(1-z)+\lambda_2\right]\right]\Bigg|_{\lambda_1(1-z)}$$

$$= \frac{L_{S(1)}}{\lambda z\left[L_{S(1)}-z\right]}\left[\lambda_2 z(1-L_{S(2)}) + \lambda_1(1-\rho)z(1-z)\right]\Bigg|_{\lambda_1(1-z)}$$

$$\Rightarrow \boxed{G_{Q_\infty^{(1)},N'}(z) = \frac{L_{S(1)}\left[\lambda_2(1-L_{S(2)}) + \lambda_1(1-\rho)(1-z)\right]}{\lambda\left[L_{S(1)}-z\right]}\Bigg|_{\lambda_1(1-z)}}$$

Faisons $z \to 1^-$: $G_{Q_\infty^{(1)}, N'=1}(1) = \mathbb{P}(N'=1) = \frac{1}{\lambda} \frac{\lambda_1 \lambda_2 L'_{S^{(2)}}(0) - \lambda_1(1-\rho)}{-\lambda_1 L'_{S^{(1)}}(0) - 1}$

$$= \frac{\lambda_1}{\lambda} \frac{\overbrace{\lambda_2 \mathbb{E}(S^{(2)})}^{\rho_2} + 1-\rho}{1 - \underbrace{\lambda_1 \mathbb{E}(S^{(1)})}_{\rho_1}} = \frac{\lambda_1}{\lambda} \qquad \boxed{\mathbb{P}(N'=1) = \frac{\lambda_1}{\lambda}}$$

donc la proportion de clients de type 1 sortants est la même que celle d'entrants.

On en déduit alors $G_{(Q_\infty^{(1)} | N'=1)}(z) = \mathbb{E}[z^{Q_\infty^{(1)}} | N'=1] = \frac{\lambda_1}{\lambda} G_{Q_\infty^{(1)}, N'=1}(z)$

or $(Q_\infty^{(1)} \mid \tilde{W}^{(1)}, S^{(1)}, N'=1) : \mathcal{P}(\lambda_1(\tilde{W}^{(1)} + S^{(1)}))$

donc $G_{(Q_\infty^{(1)} | N'=1)}(z) = \mathbb{E}\left(G_{\mathcal{P}(\lambda_1(\tilde{W}^{(1)} + S^{(1)}))}(z)\right) = \mathbb{E}\left[e^{-\lambda_1(1-z)(\tilde{W}^{(1)} + S^{(1)})}\right]$

$$= L_{\tilde{W}^{(1)}}(\lambda_1(1-z)) \times L_{S^{(1)}}(\lambda_1(1-z))$$

$$\Rightarrow L_{\tilde{W}^{(1)}}(\lambda_1(1-z)) = \frac{G_{(Q_\infty^{(1)} | N'=1)}(z)}{L_{S^{(1)}}(\lambda_1(1-z))}$$

soit $L_{\tilde{W}^{(1)}}(s) = \frac{G_{(Q_\infty^{(1)} | N'=1)}(1-\frac{s}{\lambda_1})}{L_{S^{(1)}}(s)} = \frac{\lambda_2[1-L_{S^{(2)}}(s)] + (1-\rho)s}{\lambda_1[L_{S^{(1)}}(s) - (1-\frac{s}{\lambda_1})]}$

$$\Rightarrow \boxed{L_{\tilde{W}^{(1)}}(s) = \frac{(1-\rho)s + \lambda_2[1-L_{S^{(2)}}(s)]}{s - \lambda_1[1-L_{S^{(1)}}(s)]}}$$

Calcul de $\mathbb{E}(\tilde{W}^{(1)})$:

DL en 0 : $L_{\tilde{W}^{(1)}}(s) = \frac{(1-\rho)s + \lambda_2[s\mathbb{E}(S^{(2)}) - \frac{s^2}{2}\mathbb{E}(S^{(2)2}) + o(s^2)]}{s - \lambda_1[s\mathbb{E}(S^{(1)}) - \frac{s^2}{2}\mathbb{E}(S^{(1)2}) + o(s^2)]} = \frac{[1-\rho+\overbrace{\lambda_2\mathbb{E}(S^{(2)})}^{\rho_2}] - \frac{\lambda_2 s}{2}\mathbb{E}(S^{(2)2}) + o(s)}{[1-\underbrace{\lambda_1\mathbb{E}(S^{(1)})}_{\rho_1}] + \frac{\lambda_1 s}{2}\mathbb{E}(S^{(1)2}) + o(s)}$

$$= \frac{1 - \frac{\lambda_2}{2(1-\rho_1)}\mathbb{E}(S^{(2)2})s + o(s)}{1 + \frac{\lambda_1}{2(1-\rho_1)}\mathbb{E}(S^{(1)2})s + o(s)} = 1 - \frac{\lambda_1\mathbb{E}(S^{(1)2}) + \lambda_2\mathbb{E}(S^{(2)2})}{2(1-\rho_1)} s + o(s)$$

d'où $\boxed{\mathbb{E}(\tilde{W}^{(1)}) = \frac{\lambda_1\mathbb{E}(S^{(1)2}) + \lambda_2\mathbb{E}(S^{(2)2})}{2(1-\rho_1)} = \frac{\lambda\mathbb{E}(S^{(N)2})}{2(1-\rho_1)}}$

Autre méthode : $(Q_\infty^{(1)} \mid \tilde{W}^{(1)}, S^{(1)}, S^{(2)}, N)$: Poisson pondérée $\frac{\lambda_1}{\lambda}\underset{N'=1}{\mathcal{P}(\lambda_1(\tilde{W}^{(1)}+S^{(1)}))} + \frac{\lambda_2}{\lambda}\underset{N'=2}{\mathcal{P}(\lambda_1 S^{(2)})}$

donc $G_{Q_\infty^{(1)}}(z) = \frac{\lambda_1}{\lambda}\mathbb{E}\left[G_{\mathcal{P}(\lambda_1(\tilde{W}^{(1)}+S^{(1)}))}(z)\right] + \frac{\lambda_2}{\lambda}\mathbb{E}\left[G_{\mathcal{P}(\lambda_1 S^{(2)})}(z)\right]$

$$= \frac{\lambda_1}{\lambda} L_{\tilde{W}^{(1)}+S^{(1)}}(\lambda_1(1-z)) + \frac{\lambda_2}{\lambda} L_{S^{(2)}}(\lambda_1(1-z))$$

Une personne de type 1 doit attendre que toutes les personnes de type 1 devant elle soit servies si $N'=1$; Si $N'=2$, il n'y a aucune personne de type 1 devant elle, et elle ne doit attendre seulement durant le service de la personne de type 2.

$$\Rightarrow L_{\tilde{W}^{(1)}}(s) = \frac{\lambda G_{Q_\infty^{(1)}}(1-\frac{s}{\lambda_1}) - \lambda_2 L_{S^{(2)}}(s)}{\lambda_1 L_{S^{(1)}}(s)}$$

$$= \frac{(1-\rho)s L_{S^{(1)}}(s) + \lambda_2[L_{S^{(1)}}(s) - (1-\frac{s}{\lambda_1})L_{S^{(2)}}(s)] - \lambda_2 L_{S^{(2)}}(s)[L_{S^{(1)}}(s) - (1-\frac{s}{\lambda_1})]}{\lambda_1 L_{S^{(1)}}(s)[L_{S^{(1)}}(s) - (1-\frac{s}{\lambda_1})]} = \frac{(1-\rho)s + \lambda_2[1-L_{S^{(2)}}(s)]}{s - \lambda_1[1-L_{S^{(1)}}(s)]}$$

Remarque : on retrouve $\mathbb{E}[Q_\infty^{(1)}] = \lambda_1 \mathbb{E}[\lambda_1(\tilde{W}^{(1)} + S^{(1)})] + \lambda_2 \mathbb{E}[\lambda_1 S^{(2)}] = \lambda_1[\lambda_1 \mathbb{E}(S^{(1)}) + \lambda_2 \mathbb{E}(S^{(2)})] + \lambda_1^2 \mathbb{E}(\tilde{W}^{(1)}) = \lambda_1\rho + \lambda_1^2 \mathbb{E}(\tilde{W}^{(1)})$ OK

* <u>type 2</u> $\tilde{W}^{(2)} = \tilde{W}^{(2)*} + \tilde{W}^{(2)**}$ où $\tilde{W}^{(2)*}$ est le temps d'attente pendant lequel toutes les personnes sont servies (sans distinction)

$$\rightarrow L_{\tilde{W}^{(2)*}}(z) = \frac{(1-\rho)\, z}{z - \lambda[1 - L_{S^{(N)}}(z)]}$$ (résultante sans priorité)

$\tilde{W}^{(2)**}$ est le temps d'attente pendant lequel toutes les personnes de type 1, arrivées durant $\tilde{W}^{(2)*}$, sont servies : $\tilde{W}^{(2)**} = \sum_{j=1}^{Z^{(1)}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{période d'activité type1}}}{B_j^{(1)}}$

$$L_{\tilde{W}^{(2)}}(s) = \mathbb{E}\left[e^{-s\tilde{W}^{(2)*}} \, \mathbb{E}\left[e^{-s\sum_{j=1}^{Z^{(1)}} B_j^{(1)}} \,|\tilde{W}^{(2)*}\right]\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[e^{-s\tilde{W}^{(2)*}} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\mathbb{E}(e^{-sB^{(1)}})\right]^n \frac{(\lambda_1 \tilde{W}^{(2)*})^n}{n!} e^{-\lambda_1 \tilde{W}^{(2)*}} \right]$$ puisque $(Z^{(1)} | \tilde{W}^{(2)*}) : \mathcal{P}(\lambda_1 \tilde{W}$

$$= \mathbb{E}\left[e^{-(\lambda_1+s)\tilde{W}^{(2)*}} \, e^{\lambda_1 L_{B^{(1)}}(s)\, \tilde{W}^{(2)*}}\right]$$

$$= L_{\tilde{W}^{(2)*}}\left[s + \lambda_1\left(1 - L_{B^{(1)}}(s)\right)\right]$$

soit : $$L_{\tilde{W}^{(2)}}(s) = \frac{(1-\rho)\left[s + \lambda_1(1 - L_{B^{(1)}}(s))\right]}{s + \lambda_1(1 - L_{B^{(1)}}(s)) - \lambda\left[1 - L_{S^{(N)}}\left(s + \lambda_1(1 - L_{B^{(1)}}(s))\right)\right]}$$

$$= \frac{(1-\rho)\left[s + \lambda_1(1 - L_{B^{(1)}}(s))\right]}{s - \lambda_2 + \lambda_1\left[L_{S^{(1)}}(s + \lambda_1(1 - L_{B^{(1)}}(s))) - L_{B^{(1)}}(s)\right] + \lambda_2 L_{S^{(2)}}(s + \lambda_1(1 - L_{B^{(1)}}(s)))}$$

or $L_{B^{(1)}}(s) = L_{S^{(1)}}\left[s + \lambda_1(1 - L_{B^{(1)}}(s))\right]$, d'où

$$\boxed{L_{\tilde{W}^{(2)}}(s) = \frac{(1-\rho)\left[s + \lambda_1(1 - L_{B^{(1)}}(s))\right]}{s - \lambda_2\left[1 - L_{S^{(2)}}(s + \lambda_1(1 - L_{B^{(1)}}(s)))\right]}}$$

<u>calcul de $\mathbb{E}(\tilde{W}^{(2)})$</u> :

DL en 0 : $L_{B^{(1)}}(s) = 1 - \mathbb{E}(B^{(1)})\, s + \mathbb{E}(B^{(1)2})\frac{s^2}{2} + o(s^2)$ avec $\mathbb{E}(B^{(1)}) = \frac{1}{\mu_1(1-\rho_1)}$, $\mathbb{E}(B^{(1)2}) = \frac{\mathbb{E}(S^{(1)2})}{(1-\rho_1)^3}$

$$= 1 - \frac{1}{\mu_1(1-\rho_1)} s + \frac{\mathbb{E}(S^{(1)2})}{2(1-\rho_1)^3} s^2 + o(s^2)$$

$$L_{S^{(2)}}(s) = 1 - \frac{1}{\mu_2} s + \mathbb{E}(S^{(2)2})\frac{s^2}{2} + o(s^2)$$

$$L_{S^{(2)}}(s + \lambda_1(1 - L_{B^{(1)}}(s))) = L_{S^{(2)}}\left(\frac{1}{1-\rho_1} s - \frac{\lambda_1 \mathbb{E}(S^{(1)2})}{2(1-\rho_1)^3} s^2 + o(s^2)\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{\mu_2(1-\rho_1)} s + \frac{1}{2}\left[\frac{\lambda_1 \; \mathbb{E}(S^{(1)2})}{\mu_2(1-\rho_1)^3} + \frac{\mathbb{E}(S^{(2)2})}{(1-\rho_1)^2}\right] s^2 + o(s^2)$$

Alors $$L_{\tilde{W}^{(2)}}(s) = (1-\rho)\, \frac{s + \lambda_1\left[\frac{1}{\mu_1(1-\rho_1)} s - \frac{\mathbb{E}(S^{(1)2})}{(1-\rho_1)^3}\frac{s^2}{2}\right] + o(s^2)}{s - \lambda_2\left[\frac{1}{\mu_2(1-\rho_1)} s - \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_1 \mathbb{E}(S^{(1)2})}{\mu_2(1-\rho_1)^3} + \frac{\mathbb{E}(S^{(2)2})}{(1-\rho_1)^2}\right) s^2\right] + o(s^2)}$$

$$= (1-\rho) \times \frac{\frac{1}{1-\rho_1} - \frac{\lambda_1 \mathbb{E}(S^{(1)2})}{2(1-\rho_1)^3} s + o(s)}{1-\rho \quad + \frac{1}{2}\left[\lambda_1\rho_2 \mathbb{E}(S^{(1)2}) \quad + \lambda_2 \mathbb{E}(S^{(2)2}) \right] s + o(s)}$$

$$= \frac{1 - \frac{\lambda_1 \mathbb{E}(S^{(1)2})}{2(1-\rho_1)^2} s + o(s)}{1 + \frac{1}{2(1-\rho)}\left[\frac{\lambda_1 \rho_2 \mathbb{E}(S^{(1)2})}{(1-\rho_1)^2} + \frac{\lambda_2 \mathbb{E}(S^{(2)2})}{1-\rho_1}\right] s + o(s)}$$

$$= 1 - \frac{1}{2(1-\rho_1)(1-\rho)}\left[\lambda_1 \frac{1-\rho}{1-\rho_1} \mathbb{E}(S^{(1)2}) + \frac{\lambda_1 \rho_2}{1-\rho_1} \mathbb{E}(S^{(1)2}) + \lambda_2 \mathbb{E}(S^{(2)2})\right] s + o(s)$$

$$= 1 - \frac{1}{2(1-\rho_1)(1-\rho)}\left[\lambda_1 \mathbb{E}(S^{(1)2}) + \lambda_2 \mathbb{E}(S^{(2)2})\right] s + o(s)$$

d'où $\boxed{\mathbb{E}(\tilde{W}^{(2)}) = \frac{\lambda_1 \mathbb{E}(S^{(1)2}) + \lambda_2 \mathbb{E}(S^{(2)2})}{2(1-\rho_1)(1-\rho)} = \frac{\mathbb{E}(\tilde{W}^{(1)})}{1-\rho}}$

autre méthode : $\tilde{W}^{(2)} = \tilde{W}^{(2)*} + \tilde{W}^{(2)**}$ avec $\tilde{W}^{(2)**} = \sum_{j=1}^{Z^{(1)}} B_j^{(1)}$, $(Z^{(1)} \mid \tilde{W}^{(2)*}) : \mathcal{P}(\lambda_1 \tilde{W}^{(2)*})$ donc $\mathbb{E}(\tilde{W}^{(2)**}) = \underbrace{\mathbb{E}(Z^{(1)})}_{\lambda_1 \mathbb{E}(\tilde{W}^{(2)*})} \underbrace{\mathbb{E}(B^{(1)})}_{\frac{1}{\mu_1(1-\rho_1)}} = \frac{\rho_1}{1-\rho_1} \mathbb{E}(\tilde{W}$

$\Rightarrow \mathbb{E}(\tilde{W}^{(2)}) = \frac{\mathbb{E}(\tilde{W}^{(2)*})}{1-\rho_1}$ et $\tilde{W}^{(2)*}$: → sans priorité OK.

Généralisation à K classes de priorités décroissantes

On pose $\begin{cases} \rho_i = \frac{\lambda_i}{\mu_i}, \ 1 \le i \le K \\ \sigma_k = \sum_{i=1}^{k} \rho_i, \ 1 \le k \le K, \quad \sigma_0 = 0 \\ \ell_k = \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i, \ 2 \le k \le K, \quad \ell_1 = 0 \end{cases}$ $\quad \mu_i = \frac{1}{\mathbb{E}(S^{(i)})}$, $\quad N : \Omega \to \{1, 2, \dots, K\}$, $\mathbb{P}(N = i) = \frac{\lambda_i}{\lambda}$, $\lambda = \sum_{i=1}^{K} \lambda_i = \ell_{K+1}$

et l'on suppose $\rho = \sigma_K = \sum_{i=1}^{K} \rho_i < 1$.

$$\boxed{\begin{array}{l} L_{\tilde{W}^{(k)}}(s) = \dfrac{(1-\rho)[s + \ell_k(1-s_k^*)] + \qquad [1 - L_{S^{(i)}}(s + \ell_k(1-s_k^*))]}{s - \lambda_k[1 - L_{S^{(k)}}(s + \ell_k(1-s_k^*))]} \\ \quad \text{avec} \begin{cases} s_k^* = \sum_{i=1}^{k-1} \dfrac{\lambda_i}{\ell_k} L_{S^{(i)}}(s + \ell_k(1-s_k^*)), \quad 2 \le k \le K \\ s_1^* = 1 \quad \text{(inutile car } \ell_1 = 0 \Rightarrow \ell_1(1-s_1^*) = 0) \end{cases} \\ \mathbb{E}(\tilde{W}^{(k)}) = \dfrac{\sum_{i=1}^{K} \lambda_i \mathbb{E}(S^{(i)2})}{2(1-\sigma_{k-1})(1-\sigma_k)} = \dfrac{\lambda \mathbb{E}(S^{(N)\,2})}{2(1-\sigma_{k-1})(1-\sigma_k)} \end{array}}$$

En particulier : $k = 1$: $L_{\tilde{W}^{(1)}}(s) = \frac{(1-\rho)s + \sum_{i=2}^{N} \lambda_i [1 - L_{S^{(i)}}(s)]}{s - \lambda_1[1 - L_{S^{(1)}}(s)]}$, $\mathbb{E}(\tilde{W}^{(1)}) = \frac{\lambda \mathbb{E}(S^{(N)2})}{2(1-\rho_1)}$

$k = K$: $L_{\tilde{W}^{(K)}}(s) = (1-\rho) \frac{s + \ell_K(1-s_K^*)}{s - \lambda_K[1 - L_{S^{(K)}}(s + \ell_K(1-s_K^*))]}$

avec $s_K^* = \sum_{i=1}^{K-1} \frac{\lambda_i}{\ell_K} L_{S^{(i)}}(s + \ell_K(1-s_K^*)) = L_{\bar{S}^{(K-1)}}(s + \ell_K(1-s_K^*))$

où $\bar{S}^{(K-1)}$ est le service résultant d'une file à $(K-1)$ types

Ainsi $s_K^* = L_{\bar{B}^{(K-1)}}(s)$ où $\bar{B}^{(K-1)}$ est la période d'activité du serveur avec les types $1, 2, \dots, K-1$.

(aussi vrai pour s_k^*)

→ même formule que dans le cas de préemption

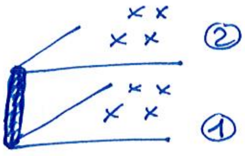
Services exponentiels   P.M. Morse : Queues, inventories and maintenance

On introduit, en plus des états "nombre de clients dans chaque file", l'état "type du client en service" : ① ou ② :

$(Q_t^{(1)}, Q_t^{(2)}, N'_t)_{t\geq 0}$: chaîne de Markov car les sauts se font en temps exponentiel. (N'_t → type en service ent)

$$\begin{cases} \pi_{ij}^{①} = \mathbb{P}(Q_\infty=(i,j),\ \overset{(N'=1)}{\text{type ① en service}}) & \text{si } i\geq 1, j\geq 0 \\ \pi_{ij}^{②} = \mathbb{P}(Q_\infty=(i,j),\ \overset{(N'=2)}{\text{type ② en service}}) & \text{si } i\geq 0, j\geq 1 \\ \pi_{00} = \mathbb{P}(Q_\infty=(0,0)) \end{cases}$$

L'espace des états est donc constitué de deux feuillets raccordés en (0,0) :



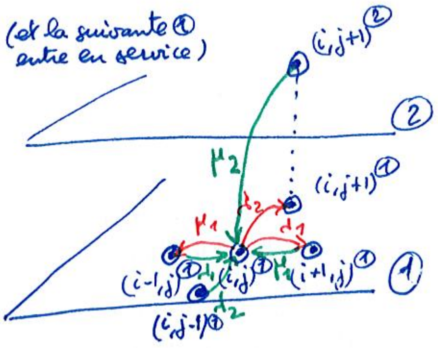
Equations de balance

1) en $(i,j)^{①}$, $\underline{i\geq 2}$:

$(i,j)^{①} \xrightarrow{\mu_1} (i-1,j)^{①}$: départ de ① en service (et la suivante ① entre en service)

$(i,j)^{①} \xrightarrow{\lambda_1} (i+1,j)^{①}$: arrivée de type ①

$(i,j)^{①} \xrightarrow{\lambda_2} (i,j+1)^{①}$: arrivée de type ②



$(i-1,j)^{①} \xrightarrow{\lambda_1} (i,j)^{①}$

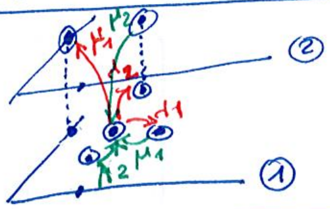
$(i+1,j)^{①} \xrightarrow{\mu_1} (i,j)^{①}$

seulement si $j\geq 1$: $(i,j-1)^{①} \xrightarrow{\lambda_2} (i,j)^{①}$

$\underset{\sim\sim}{(i,j+1)^{②}} \xrightarrow{\mu_2} (i,j)^{①}$

↳ lors de l'entrée en service de ② la file était vide, les personnes de type ① sont arrivées pendant le service de ②

$$\boxed{(\lambda_1+\lambda_2+\mu_1)\pi_{ij}^{①} = \lambda_1 \pi_{i-1,j}^{①} + \lambda_2 \mathbb{1}_{\{j\geq 1\}} \pi_{i,j-1}^{①} + \mu_1 \pi_{i+1,j}^{①} + \mu_2 \pi_{i,j+1}^{②} \text{ si } i\geq 2}$$



2) en $(1,j)^{①}$, $\underline{i=1}$:

$(1,j)^{①} \xrightarrow{\mu_1} (0,j)^{②}$

$(1,j)^{①} \xrightarrow{\lambda_1} (2,j)^{①}$

$(1,j)^{①} \xrightarrow{\lambda_2} (1,j+1)^{①}$

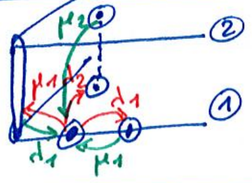
a) $\underline{\text{si } j\geq 1}$:

$(2,j)^{①} \xrightarrow{\mu_1} (1,j)^{①}$

$(1,j-1)^{①} \xrightarrow{\lambda_2} (1,j)^{①}$

$(1,j+1)^{②} \xrightarrow{\mu_2} (1,j)^{①}$

$$\boxed{(\lambda_1+\lambda_2+\mu_1)\pi_{1j}^{①} = \lambda_2 \pi_{1,j-1}^{①} + \mu_1 \pi_{2,j}^{①} + \mu_2 \pi_{1,j+1}^{②} \text{ si } j\geq 1}$$



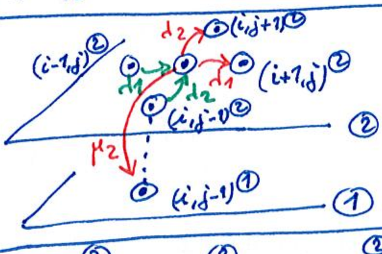
b) $\underline{\text{si } j=0}$:

$(0,0) \xrightarrow{\lambda_1} (1,0)^{①}$

$(1,1)^{②} \xrightarrow{\mu_2} (1,0)^{①}$

$(2,0)^{①} \xrightarrow{\mu_1} (1,0)^{①}$

$$\boxed{(\lambda_1+\lambda_2+\mu_2)\pi_{10}^{①} = \lambda_1 \pi_{00} + \mu_1 \pi_{20}^{①} + \mu_2 \pi_{11}^{②}}$$



3) en $(i,j)^{②}$, $\underline{j\geq 2}$:

$(i,j)^{②} \xrightarrow{\mu_2} (i,j-1)^{①}$

$(i,j)^{②} \xrightarrow{\lambda_1} (i+1,j)^{②}$

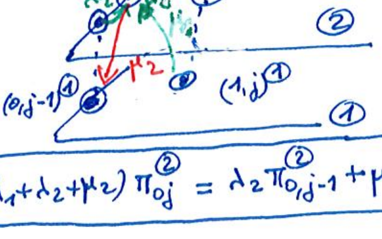
$(i,j)^{②} \xrightarrow{\lambda_2} (i,j+1)^{②}$

a) $\underline{\text{si } i\geq 1}$:

$(i-1,j)^{②} \xrightarrow{\lambda_1} (i,j)^{②}$

$(i,j-1)^{②} \xrightarrow{\lambda_2} (i,j)^{②}$

$$\boxed{(\lambda_1+\lambda_2+\mu_2)\pi_{ij}^{②} = \lambda_1 \pi_{i-1,j}^{②} + \lambda_2 \pi_{i,j-1}^{②} \text{ si } \begin{matrix} i\geq 1 \\ j\geq 2 \end{matrix}}$$



b) $\underline{\text{si } i=0}$:

$(0,j-1)^{②} \xrightarrow{\lambda_2} (0,j)^{②}$

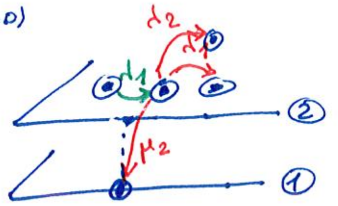
$(1,j)^{①} \xrightarrow{\mu_1} (0,j)^{②}$

$(0,j+1)^{②} \xrightarrow{\mu_2} (0,j)^{②}$

$$\boxed{(\lambda_1+\lambda_2+\mu_2)\pi_{0j}^{②} = \lambda_2 \pi_{0,j-1}^{②} + \mu_1 \pi_{1j}^{①} + \mu_2 \pi_{0,j+1}^{②} \text{ si } j\geq 2}$$

4) en $(i,1)^{\textcircled{2}}$, $\underline{j=1}$:

$$(i,1)^{\textcircled{2}} \xrightarrow{\mu_2} (i,0)^{\textcircled{1}} \ (=(0,0) \text{ si } i=0)$$
$$(i,1)^{\textcircled{2}} \xrightarrow{\lambda_1} (i+1,1)^{\textcircled{2}}$$
$$(i,1)^{\textcircled{2}} \xrightarrow{\lambda_2} (i,2)^{\textcircled{2}}$$

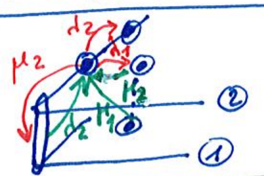


a) $\underline{\text{si } i \geq 1}$: $(i-1,1)^{\textcircled{2}} \xrightarrow{\lambda_1} (i,1)^{\textcircled{2}}$

$$\boxed{(\lambda_1+\lambda_2+\mu_2)\pi_{i1}^{\textcircled{2}} = \lambda_1 \pi_{i-1,1}^{\textcircled{2}} \quad \text{si } i \geq 1}$$

b) $\underline{\text{si } i=0}$:

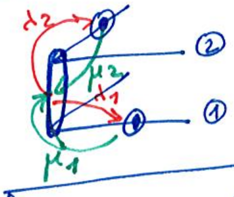
$$(0,0) \xrightarrow{\lambda_2} (0,1)^{\textcircled{2}}$$
$$(1,1)^{\textcircled{1}} \xrightarrow{\mu_1} (0,1)^{\textcircled{2}}$$
$$(0,2)^{\textcircled{2}} \xrightarrow{\mu_2} (0,1)^{\textcircled{2}}$$



$$\boxed{(\lambda_1+\lambda_2+\mu_2)\pi_{01}^{\textcircled{2}} = \lambda_2 \pi_{00} + \mu_1 \pi_{11}^{\textcircled{1}} + \mu_2 \pi_{02}^{\textcircled{2}}}$$

5) en $(0,0)$, $\underline{i=j=0}$:

$$(0,0) \xrightarrow{\lambda_1} (1,0)^{\textcircled{1}}$$
$$(0,0) \xrightarrow{\lambda_2} (0,1)^{\textcircled{2}}$$
$$(1,0)^{\textcircled{1}} \xrightarrow{\mu_1} (0,0)$$
$$(0,1)^{\textcircled{2}} \xrightarrow{\mu_2} (0,0)$$



$$\boxed{(\lambda_1+\lambda_2)\pi_{00} = \mu_1 \pi_{10}^{\textcircled{1}} + \mu_2 \pi_{01}^{\textcircled{2}}}$$

On introduit les fonctions génératrices : si $i \geq 1$: $G_i^{\textcircled{1}}(\zeta) = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_{ij}^{\textcircled{1}} \zeta^j = \mathbb{E}(\zeta^{Q_\infty^{(2)}}, Q_\infty^{(1)} = i, N' = \textcircled{1})$

puis $G^{\textcircled{1}}(z,\zeta) = \sum_{i=1}^{\infty} G_i^{\textcircled{1}}(\zeta) z^i = \sum_{i\geq 1, j \geq 0} \pi_{ij}^{\textcircled{1}} z^i \zeta^j$

si $i \geq 0$: $G_i^{\textcircled{2}}(\zeta) = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_{ij}^{\textcircled{2}} \zeta^j = \mathbb{E}(\zeta^{Q_\infty^{(2)}}, Q_\infty^{(1)} = i, N' = \textcircled{2})$

puis $G^{\textcircled{2}}(z,\zeta) = \sum_{i=0}^{\infty} G_i^{\textcircled{2}}(\zeta) z^i = \sum_{i\geq 0, j \geq 1} \pi_{ij}^{\textcircled{2}} z^i \zeta^j$

D'après 1), si $i \geq 2$:
$$\underbrace{(\lambda_1+\lambda_2+\mu_1)\sum_{j=0}^{\infty} \pi_{ij}^{\textcircled{1}} \zeta^j}_{G_i^{\textcircled{1}}(\zeta)} = \lambda_1 \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} \pi_{i-1,j}^{\textcircled{1}} \zeta^j}_{G_{i-1}^{\textcircled{1}}(\zeta)} + \lambda_2 \underbrace{\sum_{j=1}^{\infty} \pi_{i,j-1}^{\textcircled{1}} \zeta^j}_{\zeta G_i^{\textcircled{1}}(\zeta)} + \mu_1 \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} \pi_{i+1,j}^{\textcircled{1}} \zeta^j}_{G_{i+1}^{\textcircled{1}}(\zeta)} + \mu_2 \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} \pi_{i,j+1}^{\textcircled{2}} \zeta^j}_{\frac{1}{\zeta} G_i^{\textcircled{2}}(\zeta)}$$

$$\underset{\text{(E1)}}{\Rightarrow} \boxed{-\mu_1 G_{i+1}^{\textcircled{1}}(\zeta) + [\lambda_1+\mu_1+\lambda_2(1-\zeta)] G_i^{\textcircled{1}}(\zeta) - \lambda_1 G_{i-1}^{\textcircled{1}}(\zeta) = \frac{\mu_2}{\zeta} G_i^{\textcircled{2}}(\zeta) \text{ si } i \geq 2}$$

D'après 2), si $i=1$:
$$(\lambda_1+\lambda_2+\mu_1)\underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} \pi_{1j}^{\textcircled{1}} \zeta^j}_{G_1^{\textcircled{1}}(\zeta)} = \lambda_2 \underbrace{\sum_{j=1}^{\infty} \pi_{1,j-1}^{\textcircled{1}} \zeta^j}_{\zeta G_1^{\textcircled{1}}(\zeta)} + \mu_1 \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} \pi_{2j}^{\textcircled{1}} \zeta^j}_{G_2^{\textcircled{1}}(\zeta)} + \mu_2 \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} \pi_{1,j+1}^{\textcircled{2}} \zeta^j}_{\frac{1}{\zeta} G_1^{\textcircled{2}}(\zeta)} + \lambda_1 \pi_{00}$$

$$\underset{\text{(E2)}}{\Rightarrow} \boxed{-\mu_1 G_2^{\textcircled{1}}(\zeta) + [\lambda_1+\mu_1+\lambda_2(1-\zeta)] G_1^{\textcircled{1}}(\zeta) - \lambda_1 \pi_{00} = \frac{\mu_2}{\zeta} G_1^{\textcircled{2}}(\zeta)}$$

D'après 3a) et 4a), si $i \geq 1$:
$$(\lambda_1+\lambda_2+\mu_2)\underbrace{\sum_{j=1}^{\infty} \pi_{ij}^{\textcircled{2}} \zeta^j}_{G_i^{\textcircled{2}}(\zeta)} = \lambda_1 \underbrace{\sum_{j=1}^{\infty} \pi_{i-1,j} \zeta^j}_{G_{i-1}^{\textcircled{2}}(\zeta)} + \lambda_2 \underbrace{\sum_{j=2}^{\infty} \pi_{i,j-1}^{\textcircled{2}} \zeta^j}_{\zeta G_i^{\textcircled{2}}(\zeta)}$$

$$\underset{\text{(E3)}}{\Rightarrow} \boxed{[\lambda_1+\mu_2+\lambda_2(1-\zeta)] G_i^{\textcircled{2}}(\zeta) = \lambda_1 G_{i-1}^{\textcircled{2}}(\zeta) \text{ si } i \geq 1}$$

D'après 3b), 4b) et 5), si $i=0$: $(\lambda_1+\lambda_2+\mu_2)\sum_{j=1}^{\infty} \pi_{0j}^{\textcircled{2}} \zeta^j + (\lambda_1+\lambda_2)\pi_{00} = \lambda_2 \sum_{j=2}^{\infty} \pi_{0,j-1}^{\textcircled{2}} \zeta^j + \mu_1 \sum_{j=0}^{\infty} \pi_{1j}^{\textcircled{1}} \zeta^j + \mu_2 \sum_{j=0}^{\infty} \pi_{0,j+1}^{\textcircled{2}} \zeta^j$

$$\Rightarrow \boxed{\left[\lambda_1+\mu_2+\lambda_2(1-\zeta) - \frac{\mu_2}{\zeta}\right] G_0^{\textcircled{2}}(\zeta) = \mu_1 G_1^{\textcircled{1}}(\zeta) - [\lambda_1+\lambda_2(1-\zeta)]\pi_{00}}$$

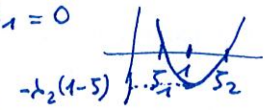
De (E3) on tire $\boxed{G_i^{\textcircled{2}}(\zeta) = \left[\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\mu_2+\lambda_2(1-\zeta)}\right]^i G_0^{\textcircled{2}}(\zeta), \quad i \geq 0}$

De (E1) on déduit que $G_i^{\textcircled{1}}(\zeta)$ est de la forme $\alpha(\zeta)\zeta_1^i + \beta(\zeta)\zeta_2^i + \gamma(\zeta)\left[\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\mu_2+\lambda_2(1-\zeta)}\right]^i$

(récurrence linéaire avec second membre suite géométrique → solution particulière suite géo. de même type)

$\zeta_1 < 1 < \zeta_2$: racines de $\mu_1 x^2 - [\lambda_1+\mu_1+\lambda_2(1-\zeta)]x + \lambda_1 = 0$

Pour que $G_i^{\textcircled{1}}(\zeta)$ reste borné lorsque $i \to +\infty$ il faut que $\beta = 0$.



On a donc $\boxed{G_i^{\textcircled{1}}(\zeta) = \alpha(\zeta)\,\zeta_1^i + \gamma(\zeta)\left[\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\mu_2+\lambda_2(1-\zeta)}\right]^i}$ avec $\zeta_1 = \frac{\lambda_1+\mu_1+\lambda_2(1-\zeta) - \sqrt{[\lambda_1+\mu_1+\lambda_2(1-\zeta)]^2 - 4\lambda_1}}{2\mu_1}$

$$\text{et } \gamma(\zeta) = -\frac{\lambda_1\mu_2\, G_0^{\textcircled{2}}(\zeta)}{\lambda_1\mu_1\zeta + (\mu_2-\mu_1)\zeta[\lambda_1+\mu_2+\lambda_2(1-\zeta)]} \times \frac{\lambda_1+\mu_2+\lambda_2(1-}{\lambda_1}$$

$$= -\frac{\mu_2[\lambda_1+\mu_2+\lambda_2(1-\zeta)]}{\zeta[\lambda_1\mu_1 + (\mu_2-\mu_1)(\lambda_1+\mu_2+\lambda_2(1-\zeta))]}\, G_0^{\textcircled{2}}(\zeta)$$

En faisant comme si l'équation (E1) était prolongeable en $i \in \{0,1\}$, on trouverait

- pour $i=1$: $-\mu_1 G_2^{\textcircled{1}}(\zeta) + [\lambda_1+\mu_1+\lambda_2(1-\zeta)]\,G_1^{\textcircled{1}}(\zeta) - \lambda_1 G_0^{\textcircled{1}}(\zeta) = \frac{\mu_2}{\zeta} G_1^{\textcircled{2}}(\zeta)$

  soit, en comparant avec (E2) : $\boxed{G_0^{(1)}(\zeta) = \pi_{00}}$

- pour $i=0$: $-\mu_1 G_1^{\textcircled{1}}(\zeta) + [\lambda_1+\mu_1+\lambda_2(1-\zeta)]\,\underbrace{G_0^{\textcircled{1}}(\zeta)}_{\pi_{00}} - \lambda_1 G_{-1}^{\textcircled{1}}(\zeta) = \frac{\mu_2}{\zeta} G_0^{\textcircled{2}}(\zeta)$

  or, d'après (E4) : $\mu_1 G_1^{\textcircled{1}}(\zeta) = \left[\lambda_1+\mu_2+\lambda_2(1-\zeta) - \frac{\mu_2}{\zeta}\right] G_0^{\textcircled{2}}(\zeta) + [\lambda_1+\lambda_2(1-\zeta)]\pi_{00}$

  d'où $\boxed{G_{-1}^{\textcircled{1}}(\zeta) = \frac{1}{\lambda_1}\left[\mu_1\pi_{00} - [\lambda_1+\mu_2+\lambda_2(1-\zeta)]\,G_0^{\textcircled{2}}(\zeta)\right]}$

Ainsi $\begin{cases} G_0^{\textcircled{1}}(\zeta) = \alpha(\zeta) + \gamma(\zeta) = \pi_{00} \\ G_{-1}^{\textcircled{1}}(\zeta) = \frac{\alpha(\zeta)}{\zeta_1} + \gamma(\zeta)\,\frac{\lambda_1+\mu_2+\lambda_2(1-\zeta)}{\lambda_1} = \frac{\mu_1}{\lambda_1}\pi_0 - \frac{\lambda_1+\mu_2+\lambda_2(1-\zeta)}{\lambda_1}\, G_0^{\textcircled{2}}(\zeta) \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \gamma(\zeta)\left[\frac{1}{\zeta_1} - \frac{\lambda_1+\mu_2+\lambda_2(1-\zeta)}{\lambda_1}\right] - \frac{\lambda_1+\mu_2+\lambda_2(1-\zeta)}{\lambda_1}\, G_0^{\textcircled{2}}(\zeta) = \pi_{00}\left(\frac{1}{\zeta_1} - \frac{\mu_1}{\lambda_1}\right) \\ \text{avec } \gamma(\zeta) = -\frac{\mu_2[\lambda_1+\mu_2+\lambda_2(1-\zeta)]}{\zeta[\lambda_1\mu_1 + (\mu_2-\mu_1)(\lambda_1+\mu_2+\lambda_2(1-\zeta))]}\, G_0^{\textcircled{2}}(\zeta) \\ \text{puis } \alpha(\zeta) = \pi_{00} - \gamma(\zeta) \end{cases}$$

On va en déduire $G_0^{\textcircled{2}}(\zeta)$: on a $\frac{1}{\zeta_1} = \frac{\mu_1}{\lambda_1}\zeta_2 = \frac{\mu_1}{\lambda_1}\left[\frac{\lambda_1+\mu_1+\lambda_2(1-\zeta)}{\mu_1} - \zeta_1\right]$

$$= \frac{\lambda_1+\mu_1+\lambda_2(1-\zeta)}{\lambda_1} - \frac{\mu_1}{\lambda_1}\zeta_1$$

$$\Rightarrow \gamma(\zeta)\left[\frac{\mu_1-\mu_2}{\lambda_1} - \frac{\mu_1}{\lambda_1}\zeta_1\right] - \frac{\lambda_1+\mu_2+\lambda_2(1-\zeta)}{\lambda_1}\, G_0^{\textcircled{2}}(\zeta) = \pi_{00}\left[\frac{\lambda_1+\lambda_2(1-\zeta) - \mu_1\zeta_1}{\lambda_1}\right]$$

$$\Rightarrow \left[-\frac{\mu_2[\mu_1(1-\zeta_1)-\mu_2]}{\lambda_1\mu_1 + (\mu_2-\mu_1)(\lambda_1+\mu_2+\lambda_2(1-\zeta))} - \zeta\right][\lambda_1+\mu_2+\lambda_2(1-\zeta)]\, G_0^{\textcircled{2}}(\zeta) = \pi_{00}[\lambda_1+\lambda_2(1-\zeta)-\mu_1\zeta_1]\zeta$$

D'où $$\boxed{G_0^{\textcircled{2}}(\zeta) = \frac{\pi_{00}\ \zeta\,[\lambda_1+\lambda_2(1-\zeta)-\mu_1\zeta_1][(\mu_1-\mu_2)(\lambda_1+\mu_2+\lambda_2(1-\zeta))-\lambda_1\mu_1]}{[\lambda_1+\mu_2+\lambda_2(1-\zeta)\,][\lambda_1\mu_1\zeta+(\mu_2-\mu_1)\zeta[\lambda_1+\mu_2+\lambda_2(1-\zeta)]+\mu_2[\mu_1(1-\zeta_1)-\mu_2]]}}$$

puis $$\left\{\begin{aligned} G_i^{\textcircled{1}}(\zeta) &= \alpha(\zeta)\,\zeta_1^{\,i} + \gamma(\zeta)\left[\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\mu_2+\lambda_2(1-\zeta)}\right]^i \\ G_i^{\textcircled{2}}(\zeta) &= \left[\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\mu_2+\lambda_2(1-\zeta)}\right]^i G_0^{\textcircled{2}}(\zeta) \end{aligned}\right.$$

avec $$\left\{\begin{aligned} \alpha(\zeta) &= \pi_{00}-\gamma(\zeta) \\ \gamma(\zeta) &= -\frac{\mu_2\,[\lambda_1+\mu_2+\lambda_2(1-\zeta)]\ G_0^{\textcircled{2}}(\zeta)}{\zeta\,[\lambda_1\mu_1+(\mu_2-\mu_1)(\lambda_1+\mu_2+\lambda_2(1-\zeta))]} \end{aligned}\right.$$

En fait $\pi_{00} = 1-\rho$ (obtenu en calculant $\sum_{i=1}^{\infty} G_i^{\textcircled{1}}(1) + \sum_{i=0}^{\infty} G_i^{\textcircled{2}}(1) + \pi_{00} = 1$)

* <u>En $\zeta = 1$</u> : $$G_0^{\textcircled{2}}(1) = \pi_{00}\,\frac{\overbrace{(\mu_1-\mu_2)(\lambda_1+\mu_2)-\lambda_1\mu_1}^{\mu_2(\mu_1-\mu_2-\lambda_1)}}{\lambda_1+\mu_2}\ \lim_{\zeta\to 1^-} \frac{\lambda_1+\lambda_2(1-\zeta)-\mu_1\zeta_1}{\lambda_1\mu_1\zeta+(\mu_2-\mu_1)\zeta(\lambda_1+\mu_2+\lambda_2(1-\zeta))+\mu_2[\mu_1(1-\zeta_1)-\mu}$$

$\to \frac{0}{0}$! $\zeta_1 \to \rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1}$

$$\lim_{\zeta\to 1} \cdots = \frac{-\lambda_2-\mu_1\zeta_1'}{\lambda_1\mu_1+(\lambda_1+\mu_2)(\mu_2-\mu_1)-\lambda_2(\mu_2-\mu_1)-\mu_1\mu_2\zeta_1'}$$

avec $$\zeta_1' = \frac{-\lambda_2+\frac{(\lambda_1+\mu_1)\lambda_2}{\mu_1-\lambda_1}}{2\mu_1} = \frac{\lambda_1\lambda_2}{\mu_1(\mu_1-\lambda_1)}$$

$$= -\frac{\frac{\mu_1\lambda_2}{\mu_1-\lambda_1}}{(\mu_2-\mu_1)(\lambda_1+\mu_2-\lambda_2)+\lambda_1\mu_1\left(1-\frac{\lambda_2\mu_2}{\mu_1(\mu_1-\lambda_1)}\right)}$$

$$= -\frac{\lambda_2\mu_1}{(\mu_2-\mu_1)(\lambda_1+\mu_2-\lambda_2)(\mu_1-\lambda_1)+\lambda_1(\mu_1^2-\lambda_1\mu_1-\lambda_2\mu_2)}$$

$$= \frac{-\lambda_2\mu_1}{(\mu_2-\mu_1)(\mu_1\mu_2-\lambda_1\mu_2-\lambda_2\mu_1)+\lambda_1[\underbrace{(\mu_2-\mu_1)(\mu_1-\lambda_1+\lambda_2)+(\mu_1^2-\lambda_1\mu_1-\lambda_2\mu_2)}_{\mu_1\mu_2-\lambda_1\mu_2-\lambda_2\mu_1}]}$$

$$= \frac{-\lambda_2\mu_1}{(\mu_2-\mu_1+\lambda_1)(\underbrace{\mu_1\mu_2-\lambda_1\mu_2-\lambda_2\mu_1}_{\mu_1\mu_2(1-\rho_1-\rho_2)})}$$

$$\Rightarrow G_0^{\textcircled{2}}(1) = \frac{\pi_{00}}{1-\rho_1-\rho_2} \times \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\mu_2}$$

$$\boxed{G_0^{\textcircled{2}}(1) = \mathbb{P}(Q_\infty^{(1)}=0,\, N'=2) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\mu_2}}$$

et alors $$\gamma(1) = \frac{-\lambda_2}{\lambda_1-\mu_1+\mu_2}$$

$$\alpha(1) = \pi_{00}-\gamma(1) = \frac{\mu_1\mu_2-\lambda_1\mu_2-\lambda_2\mu_1}{\mu_1\mu_2} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1-\mu_1+\mu}$$

$$= \frac{(\lambda_1-\mu_1)[\mu_1\mu_2-\lambda_1\mu_2-\lambda_2\mu_1]+\mu_2^2(\mu_1-\lambda_1)}{\mu_1\mu_2(\lambda_1-\mu_1+\mu_2)}$$

$$= \frac{(\mu_1-\lambda_1)[\mu_2(\lambda_1-\mu_1+\mu_2)+\lambda_2\mu_1]}{\mu_1\mu_2[\lambda_1-\mu_1+\mu_2]}$$

et alors $$\| \ G_i^{\textcircled{2}}(1) = \mathbb{P}(Q_\infty^{(1)}=i,\, N'=2) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\mu_2}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\mu_2}\right)^i,\ i\geq 0$$

En sommant sur $i \geq 0$ on récupère $\boxed{\mathbb{P}(N'=2) = \frac{\lambda_2}{\mu_2} = \rho_2}$.

(formule différente de la générale $\mathbb{P}(N'=2) = \frac{\lambda_2}{\lambda}$ car ici N_t' est le type du client en service alors qu'avant on avait affaire à N_n' : type du n^e client en service (ou juste sorti'))

$$\| \ G_i^{\textcircled{1}}(1) = \mathbb{P}(Q_\infty^{(1)}=i,\, N'=1) = \frac{(\mu_1-\lambda_1)[\mu_2(\lambda_1-\mu_1+\mu_2)+\lambda_2\mu_1]}{\mu_1\mu_2[\lambda_1-\mu_1+\mu_2]}\,\rho_1^{\,i} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1-\mu_1+\mu_2}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\mu_2}\right)^i,\ i\geq 1$$

En sommant sur $i \geq 1$ ($\mathbb{P}(Q_\infty^{(1)}=0, N'=1)=0$!) on récupère

$$\mathbb{P}(N'=1) = \frac{\lambda_1[\mu_2(\lambda_1-\mu_1+\mu_2)+\lambda_2\mu_1]}{\text{[illegible]}} - \frac{\lambda_1\lambda_2}{\mu_2[\lambda_1-\mu_1+\mu_2]} = \frac{\lambda_1\mu_2(\lambda_1-\mu_1+\mu_2)}{\mu_1\mu_2(\lambda_1-\mu_1+\mu_2)} \Rightarrow \boxed{\mathbb{P}(N'=1) = \frac{\lambda_1}{\mu_1} = \rho_1}$$

Nombre moyen de clients de type 1.

$$\sum_{i=1}^{\infty} i\, G_i^{\textcircled{1}}(1) = \frac{(\mu_1-\lambda_1)[\mu_2(\lambda_1-\mu_1+\mu_2)+\lambda_2\mu_1]}{\mu_1\mu_2[\lambda_1-\mu_1+\mu_2]} \times \frac{\rho_1}{(1-\rho_1)^2} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1-\mu_1+\mu_2} \times \frac{\lambda_1(\lambda_1+\mu_2)}{\mu_2^2}$$

$$= \frac{\lambda_1[\mu_2(\lambda_1-\mu_1+\mu_2)+\lambda_2\mu_1]}{\mu_2(\mu_1-\lambda_1)[\lambda_1-\mu_1+\mu_2]} - \frac{\lambda_1\lambda_2(\lambda_1+\mu_2)}{\mu_2^2[\lambda_1-\mu_1+\mu_2]}$$

$$= \frac{\lambda_1}{\mu_2[\lambda_1-\mu_1+\mu_2]}\left[\frac{\mu_2(\lambda_1-\mu_1+\mu_2)+\lambda_2\mu_1}{\mu_1-\lambda_1} - \frac{\lambda_2(\lambda_1+\mu_2)}{\mu_2}\right]$$

$$= \frac{\lambda_1}{\mu_2[\lambda_1-\mu_1+\mu_2]} \times \frac{\mu_2^2(\lambda_1-\mu_1+\mu_2)+\lambda_2\mu_1\mu_2-\lambda_2(\lambda_1+\mu_2)(\mu_1-\lambda_1)}{(\mu_1-\lambda_1)\mu_2}$$

$$= \frac{\lambda_1}{\mu_2^2(\mu_1-\lambda_1)} \times \frac{\mu_2^2(\lambda_1-\mu_1+\mu_2)+\lambda_1\lambda_2(\lambda_1-\mu_1+\mu_2)}{(\mu_1-\lambda_1)\mu_2}$$

$$= \frac{\lambda_1(\mu_2^2+\lambda_1\lambda_2)}{\mu_2^2(\mu_1-\lambda_1)}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} i\, G_i^{\textcircled{2}}(1) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\mu_2} \times \frac{\lambda_1(\lambda_1+\mu_2)}{\mu_2^2} = \frac{\lambda_1\lambda_2}{\mu_2^2}$$

D'où $\mathbb{E}(Q_\infty^{(1)}) = \sum_{i=1}^{\infty} i[G_i^{\textcircled{1}}(1)+G_i^{\textcircled{2}}(1)] \Rightarrow \boxed{\mathbb{E}[Q_\infty^{(1)}] = \frac{\lambda_1}{\mu_1-\lambda_1}\left(1+\frac{\lambda_2\mu_1}{\mu_2^2}\right)} = \rho_1 + \frac{\lambda_1}{2}\, \frac{\lambda_1 \mathbb{E}(S_1^2)+\lambda_2 \mathbb{E}(S}{1-\rho_1}$

En recommençant avec les autres fonctions génératrices $\mathbb{E}(z^{Q_\infty^{(1)}}, Q_\infty^{(2)}=j, N'=\dots)$, on obtiendrait $\boxed{\mathbb{E}[Q_\infty^{(2)}] = \rho_2 + \frac{\lambda_2}{\mu_1-\lambda_1} \times \frac{\rho_1+\rho_2\,\mu_1/\mu_2}{1-\rho}} = \rho_2 + \frac{\lambda_2}{2}\, \frac{\lambda_1\mathbb{E}(S_1^2)+\lambda_2\mathbb{E}(S_2^2)}{(1-\rho_1)(1-\rho)}$

(formules différentes du cas général (chaîne induite))

La fonction génératrice conjointe est donnée par

$$G_{Q_\infty}(z,\zeta) = \mathbb{E}\left[z^{Q_\infty^{(1)}} \zeta^{Q_\infty^{(2)}}\right] = \sum_{i\geq 0, j\geq 0} \pi_{ij}\, z^i \zeta^j = \pi_{00} + \sum_{i\geq 1} \underset{\substack{\downarrow \\ \pi_{i0}^{\textcircled{1}}}}{\pi_{i0}} z^i + \sum_{j\geq 1} \underset{\substack{\downarrow \\ \pi_{0j}^{\textcircled{2}}}}{\pi_{0j}} \zeta^j + \sum_{i\geq 1, j\geq 1} \overset{\substack{\pi_{ij}^{\textcircled{1}}+\pi_{ij}^{\textcircled{2}} \\ \uparrow}}{\pi_{ij}} z^i\zeta^j$$

$$= \pi_{00} + \sum_{i\geq 1, j\geq 0} \pi_{ij}^{\textcircled{1}} z^i \zeta^j + \sum_{i\geq 0, j\geq 1} \pi_{ij}^{\textcircled{2}} z^i\zeta^j$$

$$= G^{\textcircled{1}}(z,\zeta) + G^{\textcircled{2}}(z,\zeta) + \pi_{00}$$

$$\begin{cases} G^{\textcircled{1}}(\zeta) = [\pi_{00}-\gamma(\zeta)]\dfrac{\zeta_1 z}{1-\zeta_1 z} + \gamma(\zeta)\dfrac{\lambda_1 z}{\lambda_1(1-z)+\lambda_2(1-\zeta)+\mu_2} \\ G^{\textcircled{2}}(\zeta) = \dfrac{\lambda_1+\lambda_2(1-\zeta)+\mu_2}{\lambda_1(1-z)+\lambda_2(1-\zeta)+\mu_2}\, G_0^{\textcircled{2}}(\zeta) \end{cases}$$

avec $\gamma(z) = \pi_{00}\, \frac{\mu_2[\lambda_1+\lambda_2(1-\zeta)-\mu\zeta_1]}{\lambda_1\mu_1\zeta+(\mu_2-\mu_1)\zeta[\lambda_1+\lambda_2(1-\zeta)+\mu_2]+ +\mu_2(\mu_1(1-\zeta_1)}$

Après calculs :
(voir R.G. Miller : Priority queues)

$$\boxed{G_{Q_\infty}(z,\zeta) = \frac{(1-\rho)\mu_1(1-1/z)}{\lambda_1(1-z)+\lambda_2(1-\zeta)+\mu_1(1-1/z)} + \frac{G_0^{\textcircled{2}}(\zeta)[\lambda_1+\lambda_2(1-z)+\mu_2][\mu_1(1-\frac{1}{z})-\mu_2(1-\frac{1}{\zeta})]}{[\lambda_1(1-z)+\lambda_2(1-\zeta)+\mu_2][\lambda_1(1-z)+\lambda_2(1-\zeta)+\mu_1(1-1/z)]}}$$

rem : $\frac{\mu_1(1-1/z)}{\lambda_1(1-z)+\lambda_2(1-\zeta)+\mu_1(1-1/z)} = \frac{\mu_1(1-z)}{\mu_1-(\lambda_1+\mu_1+\lambda_2(1-\zeta))z+\lambda_1 z^2} = \frac{1-z}{(1-\zeta_1 z)(1-\zeta_2 z)}$ (peut peut-être aider … !)

* Longueur de la file totale

$$G_{Q_\infty^{(1)}+Q_\infty^{(2)}}(z) = G_{Q_\infty}(z,z) = \left[(1-\rho)\mu_1 + \frac{(\mu_1-\mu_2)\,G_0^{\textcircled{2}}(z)\,[\lambda-\lambda_2 z+\mu_2]}{\lambda(1-z)+\mu_2}\right] \frac{1-\frac{1}{z}}{\lambda(1-z)+\mu_1(1-\frac{1}{z})}$$

$$= \frac{1}{\mu_1-\lambda z}\left[(1-\rho)\mu_1 + (\mu_1-\mu_2)\,G_0^{\textcircled{2}}(z)\,\frac{\lambda-\lambda_2 z+\mu_2}{\lambda(1-z)+\mu_2}\right]$$

$$\lambda=\lambda_1+\lambda_2$$

Lorsque $\mu_1=\mu_2=\mu$: $G_{Q_\infty^{(1)}+Q_\infty^{(2)}}(z) = \dfrac{(1-\rho)\mu}{\mu-\lambda z} = \boxed{\dfrac{1-\rho}{1-\rho z}}$, $\rho = \dfrac{\lambda_1}{\mu_1}+\dfrac{\lambda_2}{\mu_2} = \dfrac{\lambda}{\mu}$.

$\rightarrow$ $Q_\infty^{(1)}+Q_\infty^{(2)}$: $\mathcal{G}(1-\rho)$ file $M(\lambda)/M(\mu)/1$.