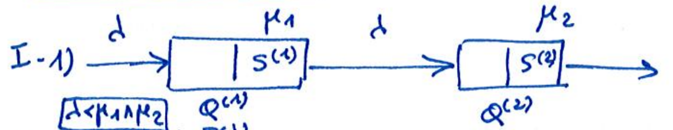
Files d'attente en série

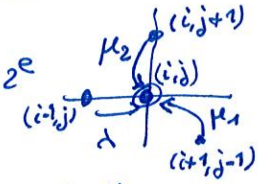
I-1) 

$Q_t = (Q_t^{(1)}, Q_t^{(2)})$ processus de naissance-mort sur $\mathbb{N}^2$

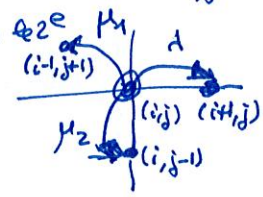
$\boxed{\lambda < \mu_1 \wedge \mu_2}$

2) sorties de $S1$: $\mathcal{P}(\lambda)$

3) balance globale : l'état (i,j) provient de $(i-1,j)$: 1 arrivée à l'entrée
$(i+1,j-1)$: 1 passage du 1er service vers le 2e
$(i,j+1)$: 1 départ du système



l'état (i,j) se transforme en $(i+1,j)$: 1 arrivée à l'entrée
$(i-1,j+1)$: 1 passage du 1er service vers le 2e
$(i,j-1)$: 1 départ du système



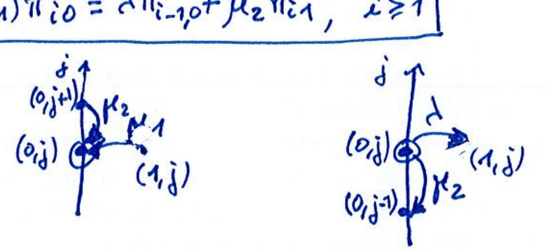
équations de balance globale : $\pi_{ij} = \mathbb{P}(Q_\infty^{(1)} = i, Q_\infty^{(2)} = j)$

bilan : $$\boxed{(\lambda+\mu_1+\mu_2)\pi_{ij} = \lambda \pi_{i-1,j} + \mu_1 \pi_{i+1,j-1} + \mu_2 \pi_{i,j+1} \quad , \ i,j \geq 1}$$

cas-frontières : $i \geq 1, j = 0$:

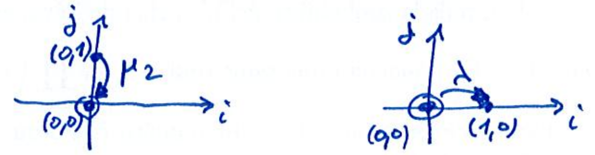
$$\boxed{(\lambda+\mu_1)\pi_{i0} = \lambda \pi_{i-1,0} + \mu_2 \pi_{i1} \ , \quad i \geq 1}$$

$i = 0, j \geq 1$:



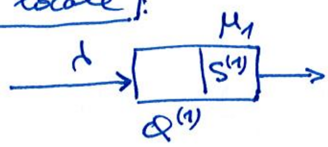
$$\boxed{(\lambda+\mu_2)\pi_{0j} = \mu_1 \pi_{1j} + \mu_0 \pi_{0,j+1} \ , \ j \geq 0}$$

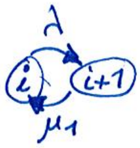
$i = 0, j = 0$:



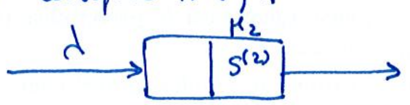
$$\boxed{\lambda \pi_{00} = \mu_2 \pi_{01}}$$

4) décomposition en balance locale :

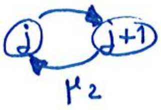
système 1 :  à j fixé : $\boxed{\lambda \pi_{ij} = \mu_1 \pi_{i+1,j}}$



système 2 : Les sorties du 1er service forment un processus de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ en régime stationnaire lorsque $\lambda < \mu_1$



à i fixé : $\boxed{\lambda \pi_{ij} = \mu_2 \pi_{i,j+1}}$



5) Résolution :

$\rho_1 = \frac{\lambda}{\mu_1}, \rho_2 = \frac{\lambda}{\mu_2}$

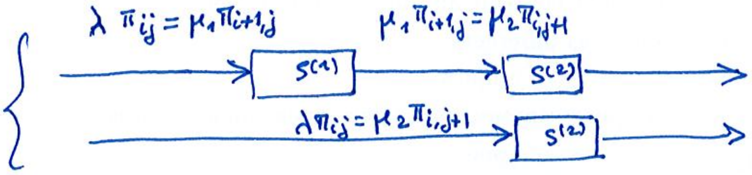
$$\left.\begin{array}{l} \pi_{i+1,j} = \rho_1 \pi_{ij} \Rightarrow \pi_{i,j} = \rho_1^i \pi_{0,j} \\ \pi_{i,j+1} = \rho_2 \pi_{ij} \Rightarrow \pi_{i,j} = \rho_2^j \pi_{i,0} \end{array}\right\} \Rightarrow \pi_{ij} = \rho_1^i \rho_2^j \pi_{00}$$

$$\sum_{i,j \geq 0} \pi_{ij} = 1 \Rightarrow \pi_{00} = (1-\rho_1)(1-\rho_2)$$

$$\boxed{\pi_{ij} = \mathbb{P}(Q_\infty^{(1)} = i, Q_\infty^{(2)} = j) = (1-\rho_1)(1-\rho_2)\rho_1^i \rho_2^j}$$

$\rho_1 < 1$ et $\rho_2 < 1$

Remarque : on a une troisième équation de balance locale : $\mu_2 \pi_{i,j+1} = \mu_1 \pi_{i+1,j}$
correspondant à la réversibilité avec l'interprétation suivante :



Ainsi si l'on trouve une solution aux trois équations de balance locale

$$\begin{cases} \lambda \pi_{ij} = \mu_2 \pi_{i,j+1} \\ \mu_1 \pi_{ij} = \lambda \pi_{i-1,j} \\ \mu_2 \pi_{ij} = \mu_1 \pi_{i+1,j-1} \end{cases}$$

c'est aussi une solution de l'équation de balance globale

$$(\lambda + \mu_1 + \mu_2)\pi_{ij} = \lambda \pi_{i-1,j} + \mu_1 \pi_{i+1,j-1} + \mu_2 \pi_{i,j+1}$$

6) $\boxed{Q_\infty^{(1)} : \mathcal{G}(1-\rho_1) \text{ et } Q_\infty^{(2)} : \mathcal{G}(1-\rho_2)}$

Longueur moyenne de la queue : $\mathbb{E}(Q_\infty^{(1)}) = \frac{\rho_1}{1-\rho_1}$, $\mathbb{E}(Q_\infty^{(2)}) = \frac{\rho_2}{1-\rho_2}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\mathbb{E}(Q_\infty) = \frac{\rho_1}{1-\rho_1} + \frac{\rho_2}{1-\rho_2}}$

Nombre moyen de clients en attente : $\mathbb{E}(\tilde{Q}_\infty^{(1)}) = \mathbb{E}(Q_\infty^{(1)} - \mathbb{1}_{\{Q_\infty^{(1)} \geq 1\}}) = \underbrace{\mathbb{E}(Q_\infty^{(1)})}_{\frac{\rho_1}{1-\rho_1}} - \underbrace{\mathbb{P}(Q_\infty^{(1)} \geq 1)}_{\rho_1} = \frac{\rho_1^2}{1-\rho_1} = \rho_1 \mathbb{E}(Q_\infty^{(1)})$

$$\tilde{Q}_\infty = \tilde{Q}_\infty^{(1)} + \tilde{Q}_\infty^{(2)} \longrightarrow \boxed{\mathbb{E}(\tilde{Q}_\infty) = \frac{\rho_1^2}{1-\rho_1} + \frac{\rho_2^2}{1-\rho_2}}$$

Temps d'attente : $\mathbb{E}(\tilde{W}_\infty^{(1)}) = \frac{1}{\mu_1}\mathbb{E}(Q_\infty^{(1)}) = \frac{1}{\lambda}\mathbb{E}(\tilde{Q}_\infty^{(1)}) = \frac{1}{\mu_1}\frac{\rho_1}{1-\rho_1}$

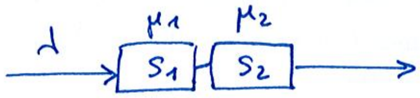
$\mathbb{E}(\tilde{W}_\infty^{(2)}) = \frac{1}{\mu_2}\mathbb{E}(Q_\infty^{(2)}) = \frac{1}{\lambda}\mathbb{E}(\tilde{Q}_\infty^{(2)}) = \frac{1}{\mu_2}\frac{\rho_2}{1-\rho_2}$ $\rightarrow$ $\boxed{\mathbb{E}(\tilde{W}_\infty) = \frac{\lambda}{\mu_1(\mu_1-\lambda)} + \frac{\lambda}{\mu_2(\mu_2-\lambda)}}$

Temps passé dans le système : $\mathbb{E}(W_\infty^{(1)}) = \frac{1}{\lambda}\mathbb{E}(Q_\infty^{(1)}) = \frac{1}{\lambda}\frac{\rho_1}{1-\rho_1}$

$\mathbb{E}(W_\infty^{(2)}) = \frac{1}{\lambda}\mathbb{E}(Q_\infty^{(2)}) = \frac{1}{\lambda}\frac{\rho_2}{1-\rho_2}$ $\rightarrow$ $\boxed{\mathbb{E}(W_\infty) = \frac{1}{\mu_1-\lambda} + \frac{1}{\mu_2-\lambda}}$

Formules de Little : $\boxed{\begin{array}{l} \mathbb{E}(Q_\infty) = \lambda\, \mathbb{E}(W_\infty) = \mu_1 \mathbb{E}(\tilde{W}_\infty^{(1)}) + \mu_2 \mathbb{E}(\tilde{W}_\infty^{(2)}) \\ \mathbb{E}(\tilde{Q}_\infty) = \lambda\, \mathbb{E}(\tilde{W}_\infty) \end{array}}$

II -



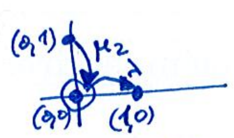
pas de salle d'attente entre S_1 et S_2.

a) cas : pas de salle d'attente à l'entrée : états $E = \{(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)\}$ (a_0, a_1, a_2, a_3)

générateur : $A = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\mu_1 & \mu_1 & 0 \\ \mu_2 & 0 & -(\lambda+\mu_2) & \lambda \\ 0 & \mu_2 & 0 & \mu_2 \end{pmatrix}$

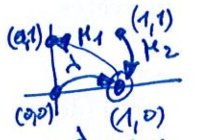
balance globale :

en (0,0) :



$\boxed{\lambda \pi_{00} = \mu_2 \pi_{01}}$

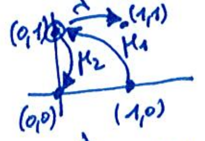
en (1,0) :



$\boxed{\mu_1 \pi_{10} = \lambda \pi_{00} + \mu_2 \pi_{11}}$

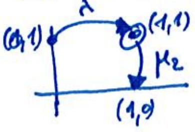
On vérifie que $\pi A = 0$.
où $\pi = (\pi_{a_0}, \pi_{a_1}, \pi_{a_2}, \pi_{a_3})$.

en (0,1) :



$\boxed{(\lambda + \mu_2)\pi_{01} = \mu_1 \pi_{10}}$

en (1,1)



$\boxed{\mu_2 \pi_{11} = \lambda \pi_{01}}$

résolution : $\begin{cases} \pi_{01} = \boxed{\rho_2 \pi_{00}} \\ \pi_{10} = \dfrac{\lambda+\mu_2}{\mu_1}\pi_{01} = \left(\rho_1 + \dfrac{\rho_1}{\rho_2}\right)\rho_2 \pi_{00} = \boxed{\rho_1(\rho_2+1)\pi_{00}} \\ \pi_{11} = \dfrac{\mu_1 \pi_{10} - \lambda \pi_{00}}{\mu_2} = [\rho_2(\rho_2+1) - \rho_2]\pi_{00} = \boxed{\rho_2^2 \pi_{00}} \\ \pi_{00}+\pi_{01}+\pi_{10}+\pi_{11} = 1 \implies \pi_{00}^{-1} = 1 + \rho_2 + \rho_1(\rho_2+1) + \rho_2^2 = \boxed{(1+\rho_1)(1+\rho_2)+\rho_2^2} \end{cases}$

d'où les lois marginales de $(Q_\infty^{(1)}, Q_\infty^{(2)})$:

$$\mathbb{P}(Q_\infty^{(1)} = i) = \pi_{i0} + \pi_{i1} = \begin{cases} \dfrac{1+\rho_2}{(1+\rho_1)(1+\rho_2)+\rho_2^2} & \text{si } i=0 \\ \dfrac{\rho_1(\rho_2+1)+\rho_2^2}{(1+\rho_1)(1+\rho_2)+\rho_2^2} & \text{si } i=1 \end{cases}$$

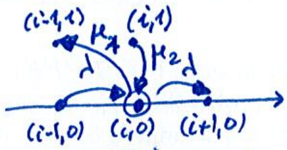
$$\mathbb{P}(Q_\infty^{(2)} = j) = \pi_{0j} + \pi_{1j} = \begin{cases} \dfrac{1+\rho_1(\rho_2+1)}{(1+\rho_1)(1+\rho_2)+\rho_2^2} & \text{si } j=0 \\ \dfrac{\rho_2(1+\rho_2)}{(1+\rho_1)(1+\rho_2)+\rho_2^2} & \text{si } j=1 \end{cases}$$

Longueurs moyennes : $\left.\begin{array}{l} \mathbb{E}(Q_\infty^{(1)}) = \mathbb{P}(Q_\infty^{(1)}=1) \\ \mathbb{E}(Q_\infty^{(2)}) = \mathbb{P}(Q_\infty^{(2)}=1) \end{array}\right\} \implies \mathbb{E}(Q_\infty) = \dfrac{(\rho_1+\rho_2)(1+\rho_2)+\rho_2^2}{(1+\rho_1)(1+\rho_2)+\rho_2^2}$

b) cas : salle d'attente à capacité illimitée à l'entrée ; états : $E = \mathbb{N}\times\{0,1\} = \{\underbrace{(i,0)}_{a_i}, \underbrace{(i,1)}_{b_i}, i \in \mathbb{N}\}$

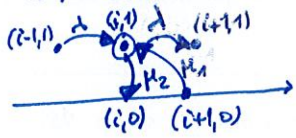
balance globale :

en $(i,0)$, $i \geq 1$:



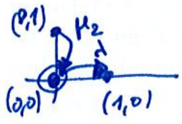
$\boxed{(\lambda+\mu_1)\pi_{i0} = \lambda\pi_{i-1,0} + \mu_2 \pi_{i1}}$

en $(i,1)$, $i \geq 1$:



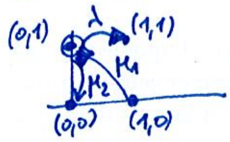
$\boxed{(\lambda+\mu_2)\pi_{i1} = \lambda\pi_{i-1,1} + \mu_1 \pi_{i+1,0}}$

cas frontières : en $(0,0)$:



$\boxed{\lambda\pi_{00} = \mu_2 \pi_{01}}$

en $(0,1)$:



$\boxed{(\lambda+\mu_2)\pi_{01} = \mu_1 \pi_{10}}$

générateur :

$a_i \xrightarrow{\lambda} a_{i+1}$, $a_i \xrightarrow{\mu_1} b_{i-1}$, $a_i \xrightarrow{-(\lambda+\mu_1)} a_i$; $b_i \xrightarrow{\lambda} b_{i+1}$, $b_i \xrightarrow{\mu_2} a_i$, $b_i \xrightarrow{-(\lambda+\mu_2)} b_i$

On a bien $\pi A = 0$ avec $\pi = (\pi_{a_0}, \pi_{a_1}, \cdots, \pi_{b_0}, \pi_{b_1}, \cdots)$

$$A = \begin{array}{cccccccc|cccccccc|l}
a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{i-1} & a_i & a_{i+1} & \cdots & b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{i-1} & b_i & b_{i+1} & \cdots & \\
\hline
-\lambda & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_0 \\
0 & -(\lambda+\mu_1) & \lambda & & 0 & 0 & 0 & \cdots & \mu_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1 \\
0 & 0 & -(\lambda+\mu_1) & \ddots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \mu_1 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & 0 & 0 & 0 & \cdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & & -(\lambda+\mu_1) & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \mu_1 & 0 & 0 & \cdots & a_{i-1} \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -(\lambda+\mu_1) & \lambda & & 0 & 0 & 0 & & 0 & \mu_1 & 0 & \cdots & a_i \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -(\lambda+\mu_1) & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \ddots & & a_{i+1} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & & & & & & & & & & \vdots \\
\hline
\mu_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & -(\lambda+\mu_2) & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & b_0 \\
0 & \mu_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -(\lambda+\mu_2) & \lambda & & 0 & 0 & 0 & \cdots & b_1 \\
0 & 0 & \mu_2 & & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -(\lambda+\mu_2) & \ddots & & \vdots & & & b_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & -(\lambda+\mu_2) & \lambda & 0 & \cdots & b_{i-1} \\
0 & 0 & 0 & & \mu_2 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -(\lambda+\mu_2) & \lambda & & b_i \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \mu_2 & 0 & & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -(\lambda+\mu_2) & & b_{i+1} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \mu_2 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \\
\end{array}$$

Résolution : on pose $u_i = \pi_{a_i} = \pi_{i0}$ et $v_i = \pi_{b_i} = \pi_{0i}$.

$$\begin{cases} (\lambda+\mu_1)u_i = \lambda u_{i-1} + \mu_2 v_i & (1) \\ (\lambda+\mu_2)v_i = \lambda v_{i-1} + \mu_1 u_{i+1} & (2) \end{cases} \quad i \geq 1 \qquad \text{et} \begin{cases} \lambda u_0 = \mu_2 v_0 \\ (\lambda+\mu_2)v_0 = \mu_1 u_1 \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow \boxed{v_i = \frac{\lambda+\mu_1}{\mu_2}u_i - \frac{\lambda}{\mu_2}u_{i-1}}$$

et alors $(2) \Rightarrow (\lambda+\mu_1)(\lambda+\mu_2)u_i - \lambda(\lambda+\mu_2)u_{i-1} = \lambda(\lambda+\mu_1)u_{i-1} - \lambda^2 u_{i-2} + \mu_1\mu_2 u_{i+1}$

$$\Rightarrow \mu_1\mu_2 u_{i+1} - (\lambda+\mu_1)(\lambda+\mu_2)u_i + \lambda(2\lambda+\mu_1+\mu_2)u_{i-1} - \lambda^2 u_{i-2} = 0$$

→ récurrence à 4 indices : $\boxed{u_{i+3} - (1+\rho_1)(1+\rho_2)u_{i+2} + (\rho_1+\rho_2+2\rho_1\rho_2)u_{i+1} - \rho_1\rho_2 u_i = 0}$

équation caractéristique : $r^3 - (1+\rho_1)(1+\rho_2)r^2 + (\rho_1+\rho_2+2\rho_1\rho_2)r - \rho_1\rho_2 = 0$

$$\Leftrightarrow (r-1)(r^2 - (\rho_1+\rho_2+\rho_1\rho_2)r + \rho_1\rho_2) = 0$$

$$\begin{cases} r_1 = \frac{1}{2}(\rho_1+\rho_2+\rho_1\rho_2 + \sqrt{\Delta}) \\ r_2 = \frac{1}{2}(\rho_1+\rho_2+\rho_1\rho_2 - \sqrt{\Delta}) \\ r_3 = 1 \end{cases} \qquad \Delta = (\rho_1+\rho_2+\rho_1\rho_2)^2 - 4\rho_1\rho_2$$

donc $u_i = Ar_1^i + Br_2^i + C$. En fait avec les conditions initiales on pourrait voir que $C=0$ (calculs...!)

légère simplification : introduire $w_i = u_i - (\rho_1+\rho_2+\rho_1\rho_2)u_{i-1} + \rho_1\rho_2 u_{i-2}$

Avec la récurrence à 4 indices :
$$\begin{aligned} w_{i+1} - w_i &= u_{i+1} - (\rho_1+\rho_2+\rho_1\rho_2)u_i + \rho_1\rho_2 u_{i-1} \\ &\quad - u_i + (\rho_1+\rho_2+\rho_1\rho_2)u_{i-1} - \rho_1\rho_2 u_{i-2} \\ &= u_{i+1} - (1+\rho_1)(1+\rho_2)u_i + (\rho_1+\rho_2+2\rho_1\rho_2)u_{i-1} \\ &\quad - \rho_1\rho_2 u_{i-2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow w_i = w_2 = u_2 - (\rho_1+\rho_2+\rho_1\rho_2)u_1 + \rho_1\rho_2 u_0$$

avec
$$\begin{cases} v_0 = \rho_2 u_0 \\ u_1 = \frac{\lambda+\mu_2}{\mu_1}v_0 = \boxed{\rho_1(\rho_2+1)u_0} \\ v_1 = \frac{\lambda+\mu_1}{\mu_2}u_1 - \frac{\lambda}{\mu_2}u_0 = (\rho_2+1)\frac{\lambda\rho_1+\lambda}{\mu_2}u_0 - \rho_2 u_0 \\ \quad = \rho_2(\rho_1+\rho_2+\rho_1\rho_2)u_0 \\ u_2 = \frac{\lambda+\mu_2}{\mu_1}v_1 - \frac{\lambda}{\mu_1}v_0 = (\rho_1+\rho_2+\rho_1\rho_2)\frac{\lambda\rho_2+\lambda}{\mu_1}u_0 - \rho_1\rho_2 u_0 \\ \quad = \boxed{\rho_1[(\rho_2+1)(\rho_1+\rho_2+\rho_1\rho_2) - \rho_2]u_0} \end{cases}$$

$$= (\rho_1+\rho_2+\rho_1\rho_2)u_1 - \rho_1\rho_2 u_0$$

d'où $w_2 = 0$

→ récurrence à 3 indices : $\boxed{u_{i+2} - (\rho_1+\rho_2+\rho_1\rho_2)u_{i+1} + \rho_1\rho_2 u_i = 0}$

$$\Rightarrow u_i = Ar_1^i + Br_2^i \qquad \text{on a} \begin{cases} r_1 + r_2 = \rho_1+\rho_2+\rho_1\rho_2 \\ r_1 r_2 = \rho_1\rho_2 \end{cases}$$

avec $\begin{cases} A + B = u_0 \\ Ar_1 + Br_2 = u_1 = \rho_1(\rho_2+1)u_0 \end{cases}$ $\qquad \rho_1\rho_2 + \rho_1 = r_1 + r_2 - \rho_2$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = \frac{r_2 - \rho_1(\rho_2+1)}{r_2 - r_1}u_0 = \frac{r_2 - \rho_1\rho_2 - \rho_1}{r_2 - r_1}u_0 = \frac{\rho_2 - r_1}{r_2 - r_1}u_0 \\ B = \frac{\rho_1(\rho_2+1) - r_1}{r_2 - r_1}u_0 = \frac{r_2 - \rho_2}{r_2 - r_1}u_0 \end{cases}$$

d'où $$\boxed{u_i = \frac{u_0}{r_2-r_1}\left[(\rho_2-r_1)r_1^i-(\rho_2-r_2)r_2^i\right]}\quad , i\geq 0$$

puis $$v_i = \frac{\lambda+\mu_1}{\mu_2}u_i - \frac{\lambda}{\mu_2}u_{i-1} = \frac{u_0}{(r_2-r_1)\mu_2}\Big[(\lambda+\mu_1)(\rho_2-r_1)r_1^i-(\lambda+\mu_1)(\rho_2-r_2)r_2^i$$
$$-\lambda(\rho_2-r_1)r_1^{i-1}+\lambda(\rho_2-r_2)r_2^{i-1}\Big]$$

$$\boxed{v_i = \frac{u_0}{\mu_2(r_2-r_1)}\left[(\rho_2-r_1)\left(\lambda+\mu_1-\frac{\lambda}{r_1}\right)r_1^i-(\rho_2-r_2)\left(\lambda+\mu_1-\frac{\lambda}{r_2}\right)r_2^i\right]}\quad , i\geq 1$$

<u>Détermination de u_0</u> :

$$\sum_{i=0}^{\infty}u_i = \frac{u_0}{r_2-r_1}\left[\frac{\rho_2-r_1}{1-r_1}-\frac{\rho_2-r_2}{1-r_2}\right] = u_0\,\frac{r_2-r_1+(r_1-r_2)\rho_2}{(r_2-r_1)(1-r_1)(1-r_2)} = \frac{u_0(1-\rho_2)}{1-r_1-r_2+r_1r_2}$$
$$= \frac{u_0(1-\rho_2)}{1-\rho_1-\rho_2}$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}v_i = \frac{u_0}{(r_2-r_1)\mu_2}\left[(\rho_2-r_1)\left(\lambda+\mu_1-\frac{\lambda}{r_1}\right)\frac{r_1}{1-r_1}-(\rho_2-r_2)\left(\lambda+\mu_1-\frac{\lambda}{r_2}\right)\frac{r_2}{1-r_2}\right]$$

$$= \frac{u_0}{(r_2-r_1)\mu_2}\left[(\lambda+\mu_1)\left(\frac{(\rho_2-r_1)r_1}{1-r_1}-\frac{(\rho_2-r_2)r_2}{1-r_2}\right)-\lambda\left(\frac{\rho_2-r_1}{1-r_1}-\frac{\rho_2-r_2}{1-r_2}\right)\right]$$

$$= \frac{u_0}{(r_2-r_1)\mu_2}\left[(\lambda+\mu_1)\frac{\overbrace{\rho_2(r_1-r_2)-r_1^2(1-r_2)+r_2^2(1-r_1)}^{(r_2-r_1)(r_1+r_2-\rho_1\rho_2)}}{(1-r_1)(1-r_2)}\right]-\frac{\lambda u_0(1-\rho_2)}{\mu_2(1-\rho_1-\rho_2)}$$

$$= \frac{u_0}{(r_2-r_1)\mu_2}\left[\frac{(\lambda+\mu_1)\,(r_2-r_1)\rho_1}{(1-r_1)(1-r_2)}\right]-\frac{\rho_2(1-\rho_2)}{1-\rho_1-\rho_2}u_0$$

$$= \frac{(\rho_1+1)\rho_2-\rho_2(1-\rho_2)}{1-\rho_1-\rho_2}u_0$$

$$= \frac{u_0\,\rho_2(\rho_1+\rho_2)}{1-\rho_1-\rho_2}$$

et $$\sum_{i=0}^{\infty}v_i = \rho_2u_0+\frac{\rho_2(\rho_1+\rho_2)}{1-\rho_1-\rho_2}u_0 = \frac{u_0\rho_2}{1-\rho_1-\rho_2}$$

D'où $$\sum_{i=0}^{\infty}(u_i+v_i) = \frac{u_0}{1-\rho_1-\rho_2} = 1 \implies \boxed{u_0 = 1-\rho_1-\rho_2} = \mathbb{P}(Q_\infty^{(1)}=Q_\infty^{(2)}=0)$$
$$= \mathbb{P}(Q_\infty=0)$$

Au passage : $$\sum_{i=0}^{\infty}u_i = \boxed{\mathbb{P}(Q_\infty^{(2)}=0)=1-\rho_2} \quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^{\infty}v_i = \boxed{\mathbb{P}(Q_\infty^{(2)}=1)=\rho_2}$$
$$\implies \boxed{\mathbb{E}(Q_\infty^{(2)})=\rho_2}$$

Les v.a. $Q_\infty^{(1)}$ et $Q_\infty^{(2)}$ suivent donc des lois combinaisons linéaires de lois géométriques.

Si $i\geq 1$: $$u_i+v_i = \frac{u_0}{r_2-r_1}\left[(\rho_2-r_1)\underbrace{\left(1+\frac{\lambda+\mu_1}{\mu_2}-\frac{\lambda}{\mu_2r_1}\right)}_{1+\rho_2+\frac{\rho_2}{\rho_1}-\frac{\rho_2}{r_1}=\frac{1}{\rho_1}\left[\underbrace{\rho_1+\rho_2+\rho_1\rho_2}_{r_1+r_2}-\underbrace{\frac{\rho_1\rho_2}{r_1}}_{r_2}\right]=\frac{r_1}{\rho_1}}r_1^i-(\rho_2-r_2)\left(1+\frac{\lambda+\mu_1}{\mu_2}-\frac{\lambda}{\mu_2r_2}\right)r_2^i\right]$$

$$= \frac{u_0}{\rho_1}\,\frac{(\rho_2-r_1)r_1^{i+1}-(\rho_2-r_2)r_2^{i+1}}{r_2-r_1}$$

$$= \frac{u_{i+1}}{\rho_1} \underset{\text{(vrai aussi pour } i=0)}{=} \xrightarrow{\text{loi de } Q_\infty^{(1)}:} \boxed{\mathbb{P}(Q_\infty^{(1)}=i) = \frac{u_0}{(r_2-r_1)\rho_1}\left[(\rho_2-r_1)r_1^{i+1}-(\rho_2-r_2)r_2^{i+1}\right]}\quad i\geq 0$$

Longueur moyenne du système :

$$\mathbb{E}(Q_\infty^{(1)}) = \frac{\mu_0}{(r_2-r_1)\rho_1}\left[(\rho_2-r_1)\sum_{i=0}^{\infty} i\, r_1^{i+1} - (\rho_2-r_2)\sum_{i=0}^{\infty} i\, r_2^{i+1}\right]$$

$$= \frac{\mu_0}{(r_2-r_1)\rho_1}\underbrace{\left[\frac{(\rho_2-r_1)\, r_1^2}{(1-r_1)^2} - \frac{(\rho_2-r_2)\, r_2^2}{(1-r_2)^2}\right]}$$

$$\left[(\rho_2-r_1)\, r_1^2(1-r_2)^2 - (\rho_2-r_2)\, r_2^2(1-r_1)^2\right] / \left[(1-r_1)(1-r_2)\right]^2$$

$$= \Big\{\rho_2\big[\underbrace{(r_1(1-r_2))^2 - (r_2(1-r_1))^2}_{(r_1-r_2)(r_1+r_2-2r_1r_2)}\big] - \big[\underbrace{r_1^3 - r_2^3}_{(r_1-r_2)(r_1^2+r_1r_2+r_2^2)} - 2r_1r_2(r_1^2-r_2^2) + r_1^2r_2^2(r_1-r_2)\big]\Big\} / \left[(1-r_1-r_2+r_1r_2)\right]^2$$

$$= (r_2-r_1)\left[-\rho_2(\rho_1+\rho_2-\rho_1\rho_2) + (r_1+r_2)^2 - \rho_1\rho_2 - 2\rho_1\rho_2(r_1+r_2) + \rho_1^2\rho_2^2\right] / \left[1-\rho_1-\rho_2\right]^2$$

$$= (r_2-r_1)\big[-\cancel{\rho_1\rho_2} - \cancel{\rho_2^2} + \rho_1\rho_2^2 + \rho_1^2 + \cancel{\rho_2^2} + \cancel{2\rho_1\rho_2} + 2\rho_1^2\rho_2 + 2\rho_1\rho_2^2 + \cancel{\rho_1^2\rho_2^2}$$
$$- \cancel{\rho_1\rho_2} - 2\rho_1^2\rho_2 - 2\rho_1\rho_2^2 - \cancel{2\rho_1^2\rho_2^2} + \cancel{\rho_1^2\rho_2^2}\big] / \left[1-\rho_1-\rho_2\right]^2$$

$$= (r_2-r_1)\ \rho_1(\rho_1+\rho_2^2) / \left[1-\rho_1-\rho_2\right]^2$$

d'où $\boxed{\mathbb{E}(Q_\infty^{(1)}) = \dfrac{\rho_1+\rho_2^2}{1-\rho_1-\rho_2}}$ et comme $\mathbb{E}(Q_\infty^{(2)}) = \mathbb{P}(Q_\infty^{(2)}=1) = \rho_2$,

$$\boxed{\mathbb{E}(Q_\infty) = \frac{\rho_1+\rho_2-\rho_1\rho_2}{1-\rho_1-\rho_2}}$$

complément : fonction génératrice

$$G_\mu(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu_i z^i = \frac{\mu_0}{r_2-r_1}\left[\frac{\rho_2-r_1}{1-r_1 z} - \frac{\rho_2-r_2}{1-r_2 z}\right] = \frac{\mu_0}{r_2-r_1}\ \frac{r_2-r_1+\rho_2(r_1-r_2)z}{(1-r_1 z)(1-r_2 z)} = \frac{\mu_0(1-\rho_2 z)}{(1-r_1 z)(1-r_2 z)}$$

$$\Rightarrow \boxed{G_{(Q_\infty^{(1)},0)}(z) = (1-\rho_1-\rho_2)\frac{1-\rho_2 z}{1-(\rho_1+\rho_2+\rho_1\rho_2)z+\rho_1\rho_2 z^2}}$$

$$G_v(z) = \sum_{i=0}^{\infty} v_i z^i = v_0 + \frac{\mu_0}{\mu_2(r_2-r_1)}\left[(\rho_2-r_1)\left(\lambda+\mu_1-\frac{\lambda}{r_1}\right)\frac{r_1 z}{1-r_1 z} - (\rho_2-r_2)\left(\lambda+\mu_1-\frac{\lambda}{r_2}\right)\frac{r_2 z}{1-r_2 z}\right]$$

$$= \rho_2\mu_0 + \frac{\mu_0 z}{\mu_2(r_2-r_1)}\left[(\lambda+\mu_1)\left(\frac{(\rho_2-r_1)r_1}{1-r_1 z} - \frac{(\rho_2-r_2)r_2}{1-r_2 z}\right) - \lambda\underbrace{\left(\frac{\rho_2-r_1}{1-r_1 z} - \frac{\rho_2-r_2}{1-r_2 z}\right)}_{\text{cf. ci-dessus}}\right]$$

$$= \rho_2\mu_0 - \frac{(1-\rho_1-\rho_2)\rho_2 z(1-\rho_2 z)}{1-(\rho_1+\rho_2+\rho_1\rho_2)z+\rho_1\rho_2 z^2} + \frac{(\lambda+\mu_1)\mu_0}{\mu_2(r_2-r_1)}\ \frac{\left[\rho_2(r_1 - r_1r_2 z - r_2 + r_1r_2 z) - r_1^2 + r_1^2r_2 z + r_2^2 - r_1r_2^2 z\right]}{1-(\rho_1+\rho_2+\rho_1\rho_2)z+\rho_1\rho_2 z^2}$$

$$(r_2-r_1)(\underbrace{r_1+r_2}_{\rho_1+\rho_2+\rho_1\rho_2} - r_1r_2 z - \rho_2) = (r_2-r_1)\rho_1\left[1+\rho_2(1-z)\right]$$

$$= \rho_2\mu_0 + \frac{\mu_0 z}{\mu_2\left[1-(\rho_1+\rho_2+\rho_1\rho_2)z+\rho_1\rho_2 z^2\right]}\Big[\underbrace{(\lambda+\mu_1)\,\rho_1(1+\rho_2(1-z)) - \lambda(1-\rho_2 z)}\Big]$$

$$\lambda(1+\rho_1)(1+\rho_2-\rho_2 z) - \lambda(1-\rho_2 z) = \lambda(\rho_1+\rho_2+\rho_1\rho_2-\rho_1\rho_2 z)$$

$$= \rho_2\mu_0 + \frac{\rho_2(\rho_1+\rho_2+\rho_1\rho_2-\rho_1\rho_2 z)\mu_0 z}{1-(\rho_1+\rho_2+\rho_1\rho_2)z+\rho_1\rho_2 z^2} = \rho_2\mu_0\ \frac{1-\cancel{(\rho_1+\rho_2+\rho_1\rho_2)z}+\cancel{\rho_1\rho_2 z^2}+\cancel{(\rho_1+\rho_2+\rho_1\rho_2)z}-\cancel{\rho_1\rho_2 z^2}}{1-(\rho_1+\rho_2+\rho_1\rho_2)z+\rho_1\rho_2 z^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{G_{(0,Q_\infty^{(2)})}(z) = \frac{(1-\rho_1-\rho_2)\,\rho_2 z}{1-(\rho_1+\rho_2+\rho_1\rho_2)z+\rho_1\rho_2 z^2}}$$

D'où $G_{Q_\infty}(z,\zeta) = G_\pi(z,\zeta) = G_u(z) + G_v(z)\zeta = \boxed{\dfrac{(1-\rho_1-\rho_2)(1-\rho_2(z-\zeta))}{1-(\rho_1+\rho_2+\rho_1\rho_2)z-\rho_1\rho_2 z^2}}$

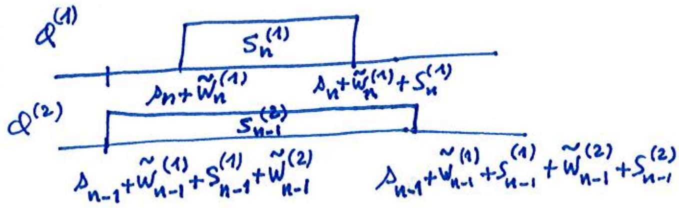
$$= \sum_{(i,j)\in E} \pi_{ij} z^i \zeta^j$$

En particulier $G_{Q_\infty^{(1)}}(z) = G_{Q_\infty}(z,1) = \dfrac{(1-\rho_1-\rho_2)(1+\rho_2(1-z))}{1-(\rho_1+\rho_2+\rho_1\rho_2)z+\rho_1\rho_2 z^2}$

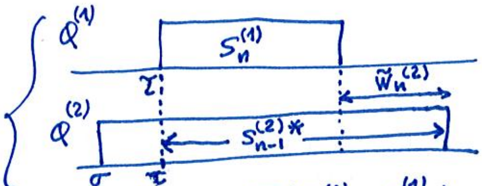
$$E(Q_\infty^{(1)}) = G'_{Q_\infty^{(1)}}(1) = (1-\rho_1-\rho_2)\left[\frac{-\rho_2}{1-\rho_1-\rho_2} - \frac{2\rho_1\rho_2-(\rho_1+\rho_2+\rho_1\rho_2)}{(1-\rho_1-\rho_2)^2}\right] = -\rho_2 + \frac{\rho_1+\rho_2-\rho_1\rho_2}{1-\rho_1-\rho_2}$$

$$\Longrightarrow \boxed{E(Q_\infty^{(1)}) = \frac{\rho_1+\rho_2^2}{1-\rho_1-\rho_2}} \quad .$$

Probabilité de blocage :



ou plus simplement



$S_{n-1}^{(2)*}$: temps de service restant depuis τ sachant que le temps de service est $> \tau-\sigma$

$\Rightarrow S_{n-1}^{(2)*} \overset{\text{loi}}{=} S_{n-1}^{(2)}$
(caractère de mémoire)

$$P_B = \mathbb{P}(\tilde{W}_n^{(2)} > 0) = \mathbb{P}(S_{n-1}^{(2)*} > S_n^{(1)}) = \mathbb{P}(S_{n-1}^{(2)} > S_n^{(1)})$$

$$= \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(S^{(2)} > t)\, f_{S^{(1)}}(t)\,dt \qquad \text{(indépendant de } n\text{)}$$

$$= \int_0^{+\infty} \mu_1 e^{-(\mu_1+\mu_2)t}\,dt$$

$$= \frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2} = \boxed{\frac{\rho_2}{\rho_1+\rho_2}}$$

Cas où il y a une salle d'attente entre les 2 système et le système 2 a une capacité N : il y a attente au 2e service si un client, à l'issue de son 1er service, trouve N clients dans le système 2 i.e. $S_n^{(1)} < \underbrace{S_{n-N}^{(2)*} + S_{n-N+1}^{(2)} + \dots + S_{n-1}^{(2)}}_{\text{Erlang } E(N,\mu_2)}$ → attente au syst 2

$\mathbb{P}(\tilde{W}^{(2)}=0) = \int_0^\infty \mathbb{P}(S^{(1)}>t)\, f_{E(N,\mu_2)}(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-\mu_1 t} \dfrac{\mu_2^N t^{N-1}}{(N-1)!} e^{-\mu_2 t}\,dt$

$\boxed{\mathbb{P}(W^{(2)}=0) = \left(\dfrac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}\right)^N}$

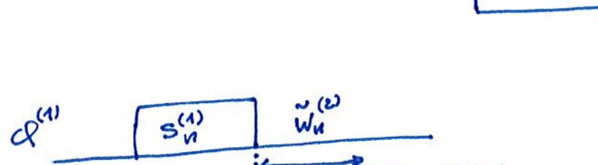
capacité N :
$P_B = \mathbb{P}(S_n^{(1)} < S_{n-N}^{(2)*}) = \dfrac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}$, $\forall N$ fini

la $(n-N)^e$ personne est encore au 2e service

si $E(S_1) < E(S_2)$, $\mu_1 > \mu_2 \Longrightarrow P_B^{S_1,S_2} > P_B^{S_2,S_1}$, il est donc préférable de mettre le service le plus long en premier.

Temps d'attente :

a) cas : pas de salle d'attente à l'entrée :



Il n'y a pas d'attente à l'entrée du système et le temps de transit est $S_n^{(1)} + \tilde{W}_n^{(2)} + S_n^{(2)}$.
donc le temps d'attente est $S_n^{(1)} + \tilde{W}_n^{(2)}$ et

La v.a. $\tilde{W}_n^{(2)}$ suit une loi exponentielle pondérée en 0 : $\begin{cases} \mathbb{P}(\tilde{W}_n^{(2)} > t) = \dfrac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2} e^{-\mu_2 t} \\ \mathbb{P}(\tilde{W}_n^{(2)} = 0) = \dfrac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2} \end{cases}$

$$\Longrightarrow E(\tilde{W}_n^{(2)}) = \frac{\mu_1}{\mu_2(\mu_1+\mu_2)}$$

temps d'attente moyen : $E(S_\infty^{(1)} + \tilde{W}_\infty^{(2)}) = \dfrac{1}{\mu_1} + \dfrac{\mu_1}{\mu_2(\mu_1+\mu_2)} = \boxed{\dfrac{\rho_1^2+\rho_1\rho_2+\rho_2^2}{\lambda(\rho_1+\rho_2)}}$

temps de séjour : $E(S_\infty^{(1)} + \tilde{W}_\infty^{(2)} + S_\infty^{(2)}) = \dfrac{1}{\mu_1} + \dfrac{\mu_1}{\mu_2(\mu_1+\mu_2)} + \dfrac{1}{\mu_2}$

$$= \boxed{\frac{1}{\lambda}\,\frac{\rho_1^2+2\rho_2(\rho_1+\rho_2)}{\rho_1+\rho_2}}$$

Le temps d'attente moyen est indépendant de l'ordre des services

Quant au temps de séjour : $T_{S_1,S_2} - T_{S_2,S_1} = \frac{1}{\lambda(\rho_1+\rho_2)}\left[\rho_1^2 + 2\rho_2(\rho_1+\rho_2) - \rho_2^2 - 2\rho_1(\rho_1+\rho_2)\right] = \frac{\rho_2-\rho_1}{\lambda}$

$$= \frac{1}{\mu_2} - \frac{1}{\mu_1}$$

donc si $E(S_1) < E(S_2)$, $\mu_1 > \mu_2 \Rightarrow T_{S_1,S_2} > T_{S_2,S_1}$, il est donc préférable de mettre le service le plus long <u>en premier</u> de nouveau.

<u>complément</u> : quelques densités et f.r.

$$f_{S^{(1)}}(t) = \mu_1 e^{-\mu_1 t}\,\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(t) \quad , \quad f_{\tilde{W}^{(2)}}(t) = \frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2}\delta_0(t) + \frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1+\mu_2}e^{-\mu_2 t}\,\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(t)$$

<u>$S^{(1)}+\tilde{W}^{(2)}$</u>

- $f_{S^{(1)}+\tilde{W}^{(2)}}(t) = (f_{S^{(1)}} * f_{\tilde{W}^{(2)}})(t) = \frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1+\mu_2}e^{-\mu_1 t} + \frac{\mu_1^2\mu_2}{\mu_1+\mu_2}\underbrace{\int_0^t e^{-\mu_1 s}e^{-\mu_2(t-s)}\,ds}_{\frac{e^{-\mu_1 t}-e^{-\mu_2 t}}{\mu_2-\mu_1}}$

$$= \boxed{\frac{\mu_1\mu_2}{\mu_2^2-\mu_1^2}\left[\mu_2 e^{-\mu_1 t} - \mu_1 e^{-\mu_2 t}\right]}$$

- $\mathbb{P}(S^{(1)}+\tilde{W}^{(2)} > t) = \boxed{\frac{\mu_2^2 e^{-\mu_1 t} - \mu_1^2 e^{-\mu_2 t}}{\mu_2^2-\mu_1^2}}$

- transformée de Laplace:

$$L_{S^{(1)}+\tilde{W}^{(2)}}(z) = L_{S^{(1)}}(z)\,L_{\tilde{W}^{(2)}}(z) = \frac{\mu_1}{\mu_1+z}\left[\mathbb{P}(\tilde{W}^{(2)}=0) + \frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1+\mu_2}\int_0^\infty e^{-(\mu_2+z)s}\,ds\right]$$

$$= \frac{\mu_1}{\mu_1+z}\left[\frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2} + \frac{\mu_1\mu_2}{(\mu_1+\mu_2)(\mu_2+z)}\right] = \boxed{\frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2}\cdot\frac{\mu_1}{\mu_1+z} + \frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}\cdot\frac{\mu_1}{\mu_1+z}\cdot\frac{\mu_2}{\mu_2+z}}$$

$\longrightarrow$ <u>loi de Cox</u>:

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r] & \boxed{S^{(1)}} \arrow[r, "\frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}"] \arrow[dr, "\frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2}"'] & \boxed{W^{(2)}} \\ & & \text{direct} \end{tikzcd}$$

<u>$S^{(1)}+S^{(2)}$</u>

- $f_{S^{(1)}+S^{(2)}}(t) = (f_{S^{(1)}} * f_{S^{(2)}})(t) = \int_0^t \mu_1 e^{-\mu_1 s}\mu_2 e^{-\mu_2(t-s)}\,ds = \boxed{\frac{\mu_1\mu_2}{\mu_2-\mu_1}\left(e^{-\mu_1 t} - e^{-\mu_2 t}\right)}$
- $\mathbb{P}(S^{(1)}+S^{(2)} > t) = \boxed{\frac{\mu_2 e^{-\mu_1 t} - \mu_1 e^{-\mu_2 t}}{\mu_2-\mu_1}}$ $\longrightarrow$ <u>loi d'Erlang généralisée</u>
- transformée de Laplace : $L_{S^{(1)}+S^{(2)}}(z) = \boxed{\frac{\mu_1}{\mu_1+z}\,\frac{\mu_2}{\mu_2+z}}$

<u>$S^{(1)}+\tilde{W}^{(2)}+S^{(2)}$</u>

- $f_{S^{(1)}+\tilde{W}^{(2)}+S^{(2)}}(t) = \int_0^t \frac{\mu_1\mu_2}{\mu_2^2-\mu_1^2}\left[\mu_2 e^{-\mu_1 s} - \mu_1 e^{-\mu_2 s}\right]\mu_2 e^{-\mu_2(t-s)}\,ds$

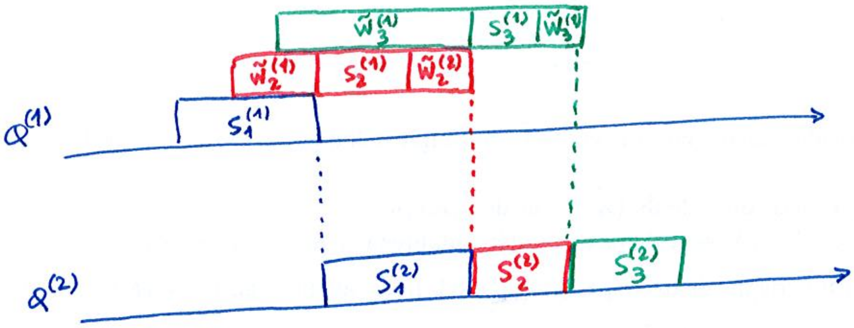
$$= \frac{\mu_1\mu_2^2}{\mu_2^2-\mu_1^2}\left[\frac{\mu_2}{\mu_2-\mu_1}\left(e^{-\mu_1 t} - e^{-\mu_2 t}\right) - \mu_1 t\,e^{-\mu_2 t}\right]$$

$$= \boxed{\frac{\mu_1\mu_2^2}{(\mu_2+\mu_1)(\mu_2-\mu_1)^2}\left[\mu_2 e^{-\mu_1 t} - \left(\mu_2 + \mu_1(\mu_2-\mu_1)t\right)e^{-\mu_2 t}\right]}$$

- $\mathbb{P}(S^{(1)}+\tilde{W}^{(2)}+S^{(2)}>t) = \dfrac{1}{(\mu_2+\mu_1)(\mu_2-\mu_1)^2}\left[\mu_2^3 e^{-\mu_1 t} - \mu_1\left(\mu_1\mu_2(\mu_2-\mu_1)t + (\mu_2^2+\mu_1\mu_2-\mu_1^2)\right)e^{-\mu_2 t}\right]$

- $L_{S^{(1)}+\tilde{W}^{(2)}+S^{(2)}}(z) = L_{S^{(1)}+\tilde{W}^{(2)}}(z)\, L_{S^{(2)}}(z) = \dfrac{\mu_1\mu_2}{\mu_1+\mu_2}\times\dfrac{\mu_1+\mu_2+z}{(\mu_1+z)(\mu_2+z)}\times\dfrac{\mu_2}{\mu_2+z} = \boxed{\dfrac{\mu_1\mu_2^2}{\mu_1+\mu_2}\times\dfrac{\mu_1+\mu_2+z}{(\mu_1+z)(\mu_2+z)^2}}$

b) cas : salle d'attente à capacité illimitée à l'entrée



Attente à l'entrée : si une personne trouve à son arrivée n personnes dans le système à l'instant t,

$$(\tilde{W}_t^{(1)} \mid Q_t^{(1)}=n) = \begin{cases} (S_1^{(1)}+\tilde{W}_1^{(2)})^* + (S_2^{(1)}+\tilde{W}_2^{(2)}) + \cdots + (S_n^{(1)}+\tilde{W}_n^{(2)}), & n\geq 1 \\ 0 \text{ si } n=0 \end{cases}$$

$(S_1^{(1)}+\tilde{W}_1^{(2)})^*$ est le temps résiduel de service de la première personne en train de se faire servir. Contrairement au service exponentiel pour lequel $S^* \overset{loi}{=} S$, ici $(S_1^{(1)}+\tilde{W}_1^{(2)})^*$ n'est pas calculable. Cependant, en régime stationnaire $(t\to+\infty)$, ce temps résiduel disparaît ; on considère en fait $\tilde{W}_{D_n}^{(1)}$, D_n étant la date de départ du n^e client. On a $\lim\limits_{t\to+\infty}\tilde{W}_t^{(1)} \overset{loi}{=} \lim\limits_{n\to\infty}\tilde{W}_{D_n}^{(1)}$.

$$\mathbb{E}(\tilde{W}_\infty^{(1)}) = \sum_{n=0}^{\infty}\pi_n\, \mathbb{E}(\tilde{W}_\infty^{(1)} \mid Q_\infty^{(1)}=n) = \sum_{n=0}^{\infty} n\pi_n\, \mathbb{E}(S_\infty^{(1)}+\tilde{W}_\infty^{(2)}) = \mathbb{E}(Q_\infty^{(1)})\,\mathbb{E}(S_\infty^{(1)}+\tilde{W}_\infty^{(2)})$$

$$= \frac{1}{\lambda}\,\frac{\rho_1+\rho_2^2}{1-\rho_1-\rho_2}\times\frac{\rho_1^2+\rho_1\rho_2+\rho_2^2}{\rho_1+\rho_2}$$

d'où : temps d'attente moyen : $\mathbb{E}(\tilde{W}_\infty) = \mathbb{E}(\tilde{W}_\infty^{(1)}+\tilde{W}_\infty^{(2)}) = \dfrac{1}{\lambda(\rho_1+\rho_2)}\left[\dfrac{(\rho_1+\rho_2^2)(\rho_1^2+\rho_1\rho_2+\rho_2^2)}{1-\rho_1-\rho_2} + \rho_2^2\right]$

temps de séjour moyen : $\mathbb{E}(W_\infty)$

$$= \mathbb{E}(\tilde{W}_\infty^{(1)}+S_\infty^{(1)}+\tilde{W}_\infty^{(2)}+S_\infty^{(2)})$$

$$= \left[\mathbb{E}(Q_\infty^{(1)})+1\right]\mathbb{E}(S_\infty^{(1)}+\tilde{W}_\infty^{(2)}) + \mathbb{E}(S_\infty^{2})$$

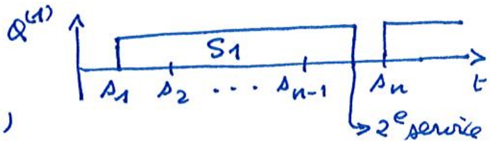
$$= \frac{1}{\lambda}\left[\frac{1-\rho_2+\rho_2^2}{1-\rho_1-\rho_2}\times\frac{\rho_1^2+\rho_1\rho_2+\rho_2^2}{\rho_1+\rho_2} + \rho_2\right]$$

Processus des personnes non-refoulées

Posons $\begin{cases} N_1 = 1 & (1^{\text{ère}} \text{ personne: acceptée}) \\ N_{k+1} = \min\{ n > N_k : \text{la } n^e \text{ personne est acceptée} \} \end{cases}$ N_k : k^e personne acceptée.

$$\mathbb{P}(N_2 = n) = \mathbb{P}(\text{les } 2^e, \dots, (n-1)^e \text{ personnes sont refoulées, la } n^e \text{ est acceptée})$$

$$= \mathbb{P}(s_{n-1} - s_1 \leq S_1 < s_n - s_1)$$



$$= \mathbb{P}(S_1 \geq \underbrace{s_{n-1} - s_1}_{\substack{\to \text{ loi } \Gamma(n-2,\lambda) \\ \text{indép. de } S_1}}) - \mathbb{P}(S_1 \geq \underbrace{s_n - s_1}_{\substack{\to \text{ loi } \Gamma(n-1,\lambda) \\ \text{indép. de } S_1}})$$

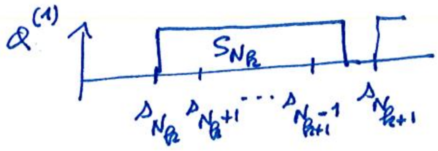
$$= \mathbb{E}\left[e^{-\mu(s_{n-1}-s_1)}\right] - \mathbb{E}\left[e^{-\mu(s_n - s_1)}\right]$$

$\left(\mathbb{P}(S>T) = \mathbb{E}(e^{-\mu T})\right)$ $S : \mathcal{E}(\mu)$ indép de T

$$= \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{n-2} - \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{n-1}$$

$$= \frac{\mu}{\lambda+\mu}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{n-2}, \quad n \geq 2$$

$$\mathbb{P}(N_{k+1} = n \mid N_k = m) = \mathbb{P}(s_{n-1} - s_{N_k} \leq S_{N_k} < s_n - s_{N_k} \mid N_k = m)$$



$$= \mathbb{P}(\underbrace{s_{n-1} - s_m}_{\substack{\text{loi } \Gamma(n-m-1,\lambda) \\ \text{indép de } S_m}} \leq S_m < \underbrace{s_n - s_m}_{\substack{\text{loi } \Gamma(n-m,\lambda) \\ \text{indép de } S_m}})$$

$$= \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{n-m-1} - \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{n-m}$$

$$= \boxed{\frac{\mu}{\lambda+\mu}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{n-m-1}}, \quad \begin{cases} n \geq m+1 \\ m \geq k \end{cases}$$

ex : $\mathbb{P}(N_3 = n) = \sum_{m=2}^{n-1} \mathbb{P}(N_3 = n \mid N_2 = m)\,\mathbb{P}(N_2 = m) = \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^2 \sum_{m=2}^{n-1} \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{n-3} = (n-2)\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{n-3}\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^2, \; n \geq 3.$

En fait : $\boxed{\mathbb{P}(N_k = n) = C_{n-2}^{k-2}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{n-k}\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{k-1}, \; n \geq k}$

i.e. N_k : Loi de Pascal
(séries d'épreuves de Bernoulli :
$\begin{cases} \text{acceptation avec proba } \frac{\mu}{\lambda+\mu} & (\text{sortie de service}) \\ \text{refoulement avec proba } \frac{\lambda}{\lambda+\mu} & (\text{service occupé}) \end{cases}$)

Dém : par récurrence

$$\mathbb{P}(N_{k+1} = n) = \sum_{m=k}^{n-1} \mathbb{P}(N_{k+1} = n \mid N_k = m)\,\mathbb{P}(N_k = m)$$

$$= \sum_{m=k}^{n-1} C_{m-2}^{k-2}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{n-k-1}\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^k$$

or $\sum_{k=0}^{m} C_{n+k}^{n} = \sum_{k=n}^{m+n} C_k^n = C_{n+m+1}^{n+1}$ donc $\sum_{k=n}^{m} C_k^n = C_{m+1}^{n+1}$

ici : $\sum_{m=k}^{n-1} C_{m-2}^{k-2} = \sum_{m=k-2}^{n-3} C_m^{k-2} = C_{n-2}^{k-1}$ d'où $\mathbb{P}(N_{k+1} = n) = C_{n-2}^{k-1}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{n-k-1}\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^k$

OK.

Loi de s_{N_k} : $f_{s_{N_k}}(t) = \sum_{n=k}^{\infty} f_{s_n}(t)\,\mathbb{P}(N_k = n) = \sum_{n=k}^{\infty} C_{n-2}^{k-2}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{n-k}\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{k-1} \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t}$

$$= \frac{\lambda^k (\mu t)^{k-1} e^{-\lambda t}}{(\lambda+\mu)^{k-1}} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{C_{n-2}^{k-2}}{(n-1)!}\left(\frac{\lambda^2 t}{\lambda+\mu}\right)^{n-k} = \boxed{\frac{\lambda^k}{(k-2)!}\left(\frac{\mu t}{\lambda+\mu}\right)^{k-1} e^{-\lambda t} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+k-1} \frac{\left(\frac{\lambda^2 t}{\lambda+\mu}\right)^n}{n!}}_{{}_1F_1\left(k-1;\, k;\, \frac{\lambda^2 t}{\lambda+\mu}\right)}}$$

ex : $k=2$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!} = \frac{e^x - 1}{x} \to \boxed{f_{s_{N_2}}(t) = \mu\left[e^{-\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}t} - e^{-\lambda t}\right]}$