INSA 3TC
Aimé Lachal

LOIS DE PROBABILITÉ USUELLES

Lois discrètes

distribution	*loi de probabilité*	$\mathbb{E}(X)$	$\operatorname{var}(X)$	*fonction génératrice* $\mathbb{E}(z^X)$
Bernoulli	$\mathbb{P}(X=0)=q,\ \mathbb{P}(X=1)=p$ $q=1-p$	p	pq	$pz+q$
Binomiale $\mathcal{B}(n,p)$	$\mathbb{P}(X=k)=C_n^k\,p^kq^{n-k}$ $q=1-p, \quad k=0,1,\dots,n$	np	npq	$(pz+q)^n$
Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$	$\mathbb{P}(X=k)=e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$ $k=0,1,\dots$	λ	λ	$e^{\lambda(z-1)}$
Géométrique $\mathcal{G}(p)$	$\mathbb{P}(X=k)=pq^{k-1}$ $q=1-p, \quad k=1,2,\dots$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{q}{p^2}$	$\dfrac{pz}{1-qz}$
Hypergéométrique $\mathcal{H}(N,n,p)$	$\mathbb{P}(X=k)=\dfrac{C_{Np}^k\,C_{Nq}^{n-k}}{C_N^n}$ $q=1-p$ $\max(0,n-Nq)\leqslant k\leqslant\min(Np,n)$	np	$npq\dfrac{N-n}{N-1}$	$\dfrac{C_{Nq}^n}{C_N^n}F(-n,-Np;Nq-n+1;z)$
Binomiale négative	$\mathbb{P}(X=k)=C_{k+r-1}^{r-1}\,p^rq^k$ $q=1-p, \quad k=0,1,\dots$	$\dfrac{rq}{p}$	$\dfrac{rq}{p^2}$	$\left(\dfrac{p}{1-qz}\right)^r$
Pascal	$\mathbb{P}(X=k)=C_{k-1}^{r-1}\,p^rq^{k-r}$ $q=1-p, \quad k=r,r+1,\dots$	$\dfrac{r}{p}$	$\dfrac{rq}{p^2}$	$\left(\dfrac{pz}{1-qz}\right)^r$

Fonction hypergéométrique : $F(a,b;c;z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{a(a+1)\dots(a+n-1)\,b(b+1)\dots(b+n-1)}{c(c+1)\dots(c+n-1)}\dfrac{z^n}{n!}$

- La somme de n v.a. indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre p suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.
- La somme de deux v.a. indépendantes suivant les lois binomiales $\mathcal{B}(m,p)$ et $\mathcal{B}(n,p)$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(m+n,p)$.
- La somme de deux v.a. indépendantes suivant les lois de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ et $\mathcal{P}(\mu)$ suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda+\mu)$.
- La somme de deux v.a. indépendantes suivant les lois binomiales négatives de paramètres (r,p) et (s,p) suit la loi binomiale négative de paramètres $(r+s,p)$.
- La somme de r v.a. indépendantes suivant la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ suit la loi de Pascal de paramètres (r,p).

Lois absolument continues

distribution	*loi de probabilité*	$\mathbb{E}(X)$	$\text{var}(X)$	*fonction caract.* $\mathbb{E}(e^{itX})$
Uniforme $\mathcal{U}(a,b)$	$\frac{1}{b-a}\mathbb{1}_{[a,b]}(x)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{e^{ibt}-e^{iat}}{i(b-a)t}$
Exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$	$\lambda e^{-\lambda x}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\frac{\lambda}{\lambda-it}$
Normale $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\ \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$	m	σ^2	$e^{imt-\frac{1}{2}\sigma^2t^2}$
Weibull $\mathcal{W}(\lambda,a)$	$\lambda a x^{a-1}e^{-\lambda x^a}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)$	$\lambda^{-\frac{1}{a}}\Gamma\left(\frac{1}{a}+1\right)$	$\lambda^{-\frac{2}{a}}[\Gamma\left(\frac{2}{a}+1\right)$ $-\Gamma\left(\frac{1}{a}+1\right)^2]$	
Cauchy $\mathcal{C}(a,b)$	$\frac{a}{\pi(a^2+(x-b)^2)}$	non définie	non définie	$e^{ibt-a\lvert t\rvert}$
Gamma $\Gamma(a,\lambda)$	$\frac{\lambda^a}{\Gamma(a)}\ x^{a-1}e^{-\lambda x}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)$	$\frac{a}{\lambda}$	$\frac{a}{\lambda^2}$	$\left(\frac{\lambda}{\lambda-it}\right)^a$
Bêta $B(a,b)$	$\frac{1}{B(a,b)}\ x^{a-1}(1-x)^{b-1}\mathbb{1}_{]0,1[}(x)$	$\frac{a}{a+b}$	$\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$	$M(a,a+b;it)$
Khi-Deux $\chi^2(n)$	$\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}\ x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)$	n	$2n$	$(1-2it)^{-n/2}$
Student $\mathcal{T}(n)$	$\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{\pi n}\,\Gamma(\frac{n}{2})}\ \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$	0 si $n>1$	$\frac{n}{n-2}$ si $n>2$	$\frac{2}{\Gamma(\frac{n}{2})}\left(\frac{\lvert t\rvert\sqrt{n}}{2}\right)^{\frac{n}{2}} K_{\frac{n}{2}}(\lvert t\rvert\sqrt{n})$
Fisher $\mathcal{F}(m,n)$	$\frac{m^{\frac{m}{2}}n^{\frac{n}{2}}}{B(\frac{m}{2},\frac{n}{2})}\frac{x^{\frac{m}{2}-1}}{(mx+n)^{\frac{m+n}{2}}}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)$	$\frac{n}{n-2}$ si $n>2$	$\frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-4)(n-2)^2}$ si $n>4$	$M\left(\frac{m}{2};-\frac{n}{2};-\frac{n}{m}it\right)$

Fonction Gamma : $\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}\,dx$

Fonction Bêta : $B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx$

Fonction de Kummer : $M(a;b;z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a(a+1)\dots(a+n-1)}{b(b+1)\dots(b+n-1)}\frac{z^n}{n!}$

Fonction de Bessel modifiée : $K_\nu(z) = \frac{\pi}{2}\frac{I_{-\nu}(z)-I_\nu(z)}{\sin\pi\nu}$ où $I_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!\,\Gamma(n+\nu+1)}\left(\frac{z^2}{4}\right)^n$

- La somme de n v.a. indépendantes suivant la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ suit la loi Gamma $\Gamma(n,\lambda)$.
- La somme de deux v.a. indépendantes suivant les lois Gamma $\Gamma(a,\lambda)$ et $\Gamma(b,\lambda)$ suit la loi Gamma $\Gamma(a+b,\lambda)$.
- Si les v.a. indépendantes X et Y suivent les lois Gamma $\Gamma(a,\lambda)$ et $\Gamma(b,\lambda)$, alors $\frac{X}{X+Y}$ suit la loi Bêta $B(a,b)$.
- La somme de deux v.a. indépendantes suivant les lois normales $\mathcal{N}(m_1,\sigma_1^2)$ et $\mathcal{N}(m_2,\sigma_2^2)$ suit la loi normale $\mathcal{N}(m_1+m_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$.
- Le quotient de deux variables indépendantes suivant la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ suit la loi de Cauchy $\mathcal{C}(1,0)=\mathcal{T}(1)$.
- La somme des carrés de n v.a. indépendantes suivant la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ suit la loi du Khi-Deux $\chi^2(n)=\Gamma(\frac{n}{2},\frac{1}{2})$.
- Si les v.a. indépendantes X et Y suivent les lois normale $\mathcal{N}(0,1)$ et du Khi-Deux $\chi^2(n)$, alors $\frac{X}{\sqrt{Y/n}}$ suit la loi de Student $\mathcal{T}(n)$.
- Si les v.a. indépendantes X et Y suivent les lois du Khi-Deux $\chi^2(m)$ et $\chi^2(n)$, alors $\frac{mX}{nY}$ suit la loi de Fisher $\mathcal{F}(m,n)$.