Dénombrement

Exercice 1

Lors du lancement d'une pièce de monnaie, on s'intéresse à l'événement $F = \{\text{face}\}$. On répète l'expérience successivement n fois. A chaque lancement de la pièce on relève le résultat. On note $f_n(F)$ la fréquence relative d'apparition de F jusqu'au n^{e} lancer.

Réaliser autant d'expériences que possible et dresser le tableau des des couples $(n, f_n(F))$, $n \geqslant 1$ ainsi obtenus, puis représenter graphiquement les résultats.

Note.— Buffon (Georges Louis Leclerc, Comte de, 1707–1788) a joué 4040 coups et obtenu 2048 fois F, la fréquence relative était donc de 0,5069. Karl Pearson, au début de ce siècle a obtenu la fréquence relative de 0,5005 pour 24000 coups.

Exercice 2

Un parlement est constitué de 470 parlementaires. On procède à l'élection d'une commission de trois membres. Chaque parlementaire vote pour trois candidats A, B, C. 282 parlementaires ont voté pour A ; 117 pour A et B ; 105 pour A et C ; 79 pour A, B et C ; 117 pour B et C mais pas pour A ; 27 pour C mais ni pour A ni pour B ; 133 pour B mais par pour A.

Combien de parlementaires ont voté pour B ? pour C ? ni pour A, ni pour B ni pour C ?

Exercice 3

Combien d'anagrammes peut-on former avec les lettres et les symboles de :

$\mathrm{T_1E_1LE_2C_1OMS_1,S_2E_3RVIC_2E_4S_3{-_1}E_5T_2{-_2}US_4AGE_6S_5}$?

TELECOMS,SERVICES–ET–USAGES ?

Exercice 4

On appelle main tout ensemble de 13 cartes prises dans un jeu de 52 cartes.

1. Combien y a-t-il de mains différentes ?
2. Combien y a-t-il de mains contenant :
   - (a) au moins 1 pique ?
   - (b) au plus 1 pique ?
   - (c) exactement 1 as et contenant au plus 2 piques ?

Exercice 5

Charlotte descend les marches d'un escalier une ou deux à la fois. Combien y a-t-il de manières de descendre un escalier de 4 marches ? de 5 marches ?

On généralise à un nombre de marches n quelconque :

1. Méthode directe : on fixe un entier n quelconque.
   - (a) Soit i le nombre de pas de deux marches que l'on fait pour descendre l'escalier ($0 \leqslant i \leqslant [n/2]$, $[\cdot]$ désignant la partie entière), et j le nombre de pas d'une marche. Donner une équation reliant i, j et n.
   - (b) Pour i et j quelconques fixés, quel est le nombre de manières de descendre l'escalier en i pas de deux marches et j pas d'une marche ?
   - (c) Quel est le nombre total de manières de descendre l'escalier à n marches ?
2. Méthode par récurrence : on note N_n le nombre de manières de descendre l'escalier à n marches.
   - (a) Montrer que $N_n = N_{n-1} + N_{n-2}$.
   - (b) Déterminer N_1 et N_2.
   - (c) Exprimer N_n en fonction de n.

Exercice 6

Le vaguemestre de l'INSA arrive dans le hall du département TELECOMS, SERVICES ET USAGES. Il doit distribuer p prospectus dans n boîtes à lettres. De combien de façons peut-il le faire dans les cas suivants :

1. Chaque boîtes à lettres peut contenir au plus un prospectus et :
   (a) les prospectus sont tous différents ;
   (b) les prospectus sont tous identiques.
2. Chaque boîtes à lettres peut contenir un nombre quelconque de prospectus et :
   (a) les prospectus sont tous différents ;
   (b) les prospectus sont tous identiques.

Exercice 7

On note S_n^p le nombre d'applications surjectives d'un ensemble de n éléments sur un ensemble de p éléments ($p \leqslant n$).

1. Déterminer S_n^1 et S_n^2.
2. Montrer que $\sum_{k=1}^{p} C_p^k S_n^k = p^n$, ainsi que la formule de récurrence $S_n^p = p(S_{n-1}^p + S_{n-1}^{p-1})$.
3. En déduire que $S_n^p = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{p-k} C_p^k k^n$.

Application.— Dans un certain pandémonium de ploutocrates, il est d'usage que pour chaque hypermarché installé, les propriétaires (prévaricateurs) versent un bakchich à un parti politique (concussionnaire). Pour éviter d'indésirables tribulations, il est nécessaire que chaque parti touche au moins un dessous de table (malversation). Il y a n hypermarchés et p partis politiques. Quel est le nombre de répartitions possibles des n pots-de-vin entre les p partis ?

Exercice 8

Soit $G(z) = \dfrac{1}{(1-z)(1-z^2)(1-z^p)}$ où $p \geqslant 3$ est un entier impair fixé.

1. Décomposer la fraction rationnelle G en élément simples sur $\mathbb{C}$. On pourra poser $\omega_k = e^{i2\theta_k}$, $\theta_k = \frac{k\pi}{p}$ et utiliser $\omega_k - 1 = 2ie^{i\theta_k}\sin\theta_k$. Le résultat a la forme
$$G(z) = \frac{a}{(1-z)^3} + \frac{b}{(1-z)^2} + \frac{c}{1-z} + \frac{d}{1+z} + \sum_{k=1}^{p-1} \frac{A(\omega_k)}{1-\omega_k z}.$$
   On donne $\displaystyle\sum_{k=1}^{p-1} C_k^1 = C_p^2$ et $\displaystyle\sum_{k=2}^{p-1} C_k^2 = C_p^3$, et pour $|z| < 1$:
$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n, \quad \frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) z^n \quad \text{et} \quad \frac{1}{(1-z)^3} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) z^n.$$
2. En déduire le développement en série entière de $G(z)$.
3. En écrivant $G(z) = \dfrac{1}{1-z} \times \dfrac{1}{1-z^2} \times \dfrac{1}{1-z^p}$, montrer que le développement en série entière de $G(z)$ peut se mettre sous la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n z^n$ où l'on précisera α_n en termes de nombre de solutions d'une certaine équation. Déduire de la question précédente la valeur explicite de α_n.
4. **Application.**— De combien de manières peut-on constituer la somme de n francs avec des pièces de 1F, 2F et 5F ? Exemple numérique : $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.