Probabilités élémentaires

Exercice 1 (Le loto)

Au loto quelle est la probabilité, en choisissant sept numéros (de 1 à 49), d'avoir :

1. les six bons numéros plus le complémentaire ?
2. six bons numéros ?
3. cinq bons numéros plus le complémentaire ?
4. cinq bons numéros ?
5. quatre bons numéros ?
6. trois bons numéros ?

Exercice 2

Le chevalier de Méré (1607–1684), contemporain de Pascal, analysant un grand nombre de parties de « passe-dix » (on lance trois dés et on observe si la somme S des points dépasse ou non 10) s'aperçut que la fréquence de l'événement $\{S = 11\}$ est systématiquement légèrement différente de celle de $\{S = 12\}$.

Explicitant la liste des cas où $S = 11$, il trouvait :

641 632 551 542 533 443 soit 6 cas,

et pour $S = 12$,

651 642 633 552 543 444 soit encore 6 cas.

Les événements $\{S = 11\}$ et $\{S = 12\}$ ont-ils, sous des hypothèses « raisonnables », la même probabilité ?

Exercice 3 (Problème des anniversaires)

Dans un groupe de n personnes, quelle est la probabilité pour que les anniversaires de deux au moins d'entre elles tombent le même jour ? À partir de combien de personnes cette probabilité dépasse-t-elle $1/2$? (on néglige les problèmes d'années bissextiles.)

Exercice 4 (Les urnes de minuit)

On dispose d'une urne infiniment grande et d'une collection infinie de boules numérotées $1, 2, \ldots, n, \ldots$

1. On réalise l'expérience suivante : à minuit moins une, les boules 1 à 10 sont placées dans l'urne et la boule 10 en est retirée instantanément. A minuit moins 30 secondes, les boules 11 à 20 sont placées dans l'urne et la boule 20 retirée. A minuit moins 15 secondes, les boules 21 à 30 sont introduites et la boule 30 est retirée. A minuit moins 7 secondes et demie, etc.

   La question intéressante est la suivante : combien y a-t-il de boules dans l'urne à minuit ?

2. Modifions l'expérience précédente et supposons qu'à minuit moins une, les boules 1 à 10 sont placées dans l'urne et la boule 1 en est retirée. A minuit moins 30 secondes, les boules 11 à 20 sont introduites et la boule 2 est retirée. A minuit moins 15 secondes, les boules 21 à 30 sont introduites et la boule 3 est retirée. A minuit moins 7 secondes et demie, etc.

   Dans cette nouvelle expérience, combien y a-t-il de boules dans l'urne à minuit ?

3. Supposons maintenant que dès qu'il faut retirer une boule, celle-ci est prise au hasard parmi les boules déjà présentes dans l'urne. Cela veut dire qu'à minuit moins une, les boules 1 à 10 sont placées dans l'urne et une boule en est retirée au hasard, et ainsi de suite.

   (a) Définissons par A_n l'événement « la boule numéro 1 est encore dans l'urne après que les n premiers retraits ont été effectués ».

   Calculer $\mathbb{P}(A_n)$, puis la probabilité $\mathbb{P}(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)$ de l'événement « la boule numéro 1 se trouve dans l'urne à minuit ». On montrera que pour tout $\alpha > 0$, $\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right) = +\infty$, puis que $\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{n+\alpha} = 0$.

   (b) Définissons par B_i l'événement « la boule numéro i se trouve dans l'urne à minuit ».

   Calculer $\mathbb{P}(B_i)$, puis la probabilité $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i)$ d'avoir au mois une boule dans l'urne à minuit.

   (c) Combien de boules y a-t-il dans l'urne à minuit dans ce cas ?

Exercice 5 (Problème des rencontres)

On donne la formule de Poincaré :

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n} \mathbb{P}(A_{i_1}\cap\ldots\cap A_{i_k}).$$

1. Vérifier cette formule lorsque $n \leqslant 3$.
2. Un certain nombre n de personnes sont allées écouter une conférence en laissant leurs manteaux pendus à des patères à l'extérieur de la salle. Un farceur les jette à terre, puis, saisi d'une indicible contrition, remet le tout en place. Quelle est la probabilité pour que l'un au moins des auditeurs retrouve son manteau là où il l'avait laissé ?

   Autre énoncé : n couples mariés vont au bal agreste. Les couples se forment au hasard de telle sorte que chaque cavalier a la même probabilité de danser avec n'importe quelle cavalière. Quelle est la probabilité pour qu'au moins un mari danse avec sa propre femme ?

   Encore un autre énoncé : une secrétaire, foudroyée par une alacrité paraphrénique, écrit à n correspondants des épîtres élégiaques personnelles, met chaque missive dans une enveloppe, ferme les enveloppes, puis écrit les adresses au hasard. Son patron, de tendance habituellement acrimonieuse, voire atrabilaire, plutôt que de la tancer vertement, manifeste un élan munificent de compassion digne d'un sigisbée en lui enjoignant seulement de calculer la probabilité pour qu'au moins une lettre parvienne à son véritable destinataire.

Exercice 6 (Lois hypergéométrique et multinomiale)

On considère une urne contenant N boules dont N_1 sont de couleur rouge, N_2 de couleur verte et N_3 de couleur bleue ($N_1 + N_2 + N_3 = N$). De façon classique, on peut procéder au tirage de plusieurs boules de l'urne de trois manières a priori distinctes : ou bien tirer les boules simultanément, ou bien les tirer l'une après l'autre sans remise ou bien encore les tirer l'une après l'autre avec remise.

1. On tire au hasard n boules simultanément de l'urne. On admet, l'ordre des boules ne pouvant être repéré, que ceci revient à considérer toutes les combinaisons de n boules parmi N comme équiprobables. Trouver la probabilité p pour que l'on obtienne n_1 boules rouges, n_2 boules vertes et n_3 bleues. Traiter l'exemple $n = 5$, $n_1 = n_2 = 2$, $n_3 = 1$, $N_1 = 3$, $N_2 = 5$, $N_3 = 3$.
2. Traiter le même problème dans le cas où l'on tire les n boules successivement de l'urne, chacun des tirages se faisant sans remise de la boule tirée. On pourra d'abord chercher la probabilité correspondante notée q sur l'exemple numérique précédent. Que constate-t-on sur p et q ?
3. Traiter le même problème dans le cas d'un tirage avec remise. La probabilité cherchée est notée r. On pourra commencer d'abord par l'exemple numérique.

Exercice 7

On considère deux joueurs de Pile ou Face A et B. Un jeu est constitué de la façon suivante : le joueur A lance deux pièces successivement et le joueur B en lance trois. Le gagnant est celui qui obtient strictement plus de faces (par exemple, A gagne s'il obtient deux faces alors que B n'en obtient qu'une ou zéro).

1. Calculer la probabilité de gain de A ainsi que celle de B. Quelle est la probabilité pour qu'il n'y ait pas de gagnant ?
2. Cette fois, on effectue une partie dans laquelle il y aura nécessairement un gagnant. Elle est définie de la manière suivante : on effectue un premier jeu ; si A ou B gagne, il gagne la partie qui s'arrête à ce premier jeu. Sinon, le premier jeu étant nul, on fait un deuxième jeu puis un troisième si celui-ci est nul. Le gagnant de la partie est celui qui gagne un jeu, tous les précédents ayant été nuls, et ainsi de suite. Calculer la probabilité de gain de A ainsi que celle de B dans ce cas.

Exercice 8

1. **(L'aiguille de Buffon, 1777)** Considérons un parquet sur lequel sont tracées des droites parallèles équidistantes. On laisse tomber sur ce parquet une aiguille de longueur ℓ. On suppose $\ell < d$ où d est la distance entre deux droites
   voisines. Quelle est la probabilité pour que cette aiguille coupe une des droites ? On pourra repérer la position de l'aiguille à l'aide de son centre et de l'angle qu'elle forme avec la direction des droites.
2. On partage un segment en trois parties par deux points pris au hasard. Quelle est la probabilité pour que l'on puisse construire un triangle avec les trois segments ainsi obtenus pour côtés ?

Exercice 9

Un récepteur se bloque si la durée entre les instants de réception de deux signaux est inférieure au temps mort θ. On sait que les deux signaux atteignent le récepteur dans l'intervalle de temps $[0, t]$, et arrivent au hasard indépendamment l'un de l'autre.

1. Décrire l'ensemble fondamental Ω associé à cette expérience stochastique, et le représenter graphiquement.
2. Quelle est la probabilité que le récepteur se bloque ?
3. Simplifier le résultat lorsque $\theta << t$.