Probabilités conditionnelles

Exercice 1

On considère une chaîne de n individus $I_1, I_2, \ldots, I_n$. L'individu I_1 possède une information ; celle-ci ou son contraire, va être transmise de la manière suivante : pour tout $i = 1, \ldots, n$, l'individu I_i donne à I_{i+1} l'information qu'il reçoit avec la probabilité $p \in]0, 1[$, et il transmet le contraire avec la probabilité $q = 1 - p$. Soit p_n la probabilité pour que l'individu I_n reçoive l'information.

1. Trouver une relation de récurrence entre p_n et p_{n-1} de la forme $p_n = \alpha p_{n-1} + \beta$.
2. Calculer alors p_n (on pourra introduire $p'_n = p_n - \frac{\beta}{1-\alpha}$).
3. Déterminer $\lim_{n\to\infty} p_n$.

Exercice 2

On considère trois cartes à jouer de même forme. Cependant, les deux faces de la première carte ont été coloriées en noir, les deux faces de la deuxième carte en rouge, tandis que la troisième porte une face noire et l'autre rouge. On mélange les trois cartes au fond d'un chapeau, puis une carte tirée au hasard en est extraite et placée au sol. Si la face apparente est rouge, quelle est la probabilité que l'autre soit noire ?

Exercice 3

Pour dépister une maladie, on applique un test. Si le patient est effectivement atteint, le test donne un résultat positif dans 99% des cas. Mais il se peut aussi que le résultat du test soit positif alors que le consultant est en bonne santé, et ceci se produit dans 2% des cas. Sachant qu'en moyenne un consultant sur 1000 est atteint de la maladie à dépister, calculer la probabilité qu'un client soit atteint sachant que son test a été positif. Comment améliorer ce résultat ?

Exercice 4

Cinq ouvriers travaillent successivement sur une chaîne de montage, au même poste, pendant 24 heures. La table ci-dessous indique le nombre d'heures qu'effectue chaque ouvrier, le nombre de pièces que chacun fabrique par heure et le pourcentage de pièces défectueuses que chacun fabrique.

Ouvrier	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5
Heures	6	5	5	4	4
Pièces/heure	110	100	130	140	150
% pièces défectueuses	8	7	6	4	4

Au bout de 24 heures, les productions des ouvriers sont mélangées pour constituer la production totale journalière. On suppose qu'en tirant au hasard une pièce dans cette production totale, on obtienne une pièce sans défaut, quelle est alors la probabilité qu'elle ait été fabriquée par chacun des ouvriers ?

Exercice 5

Dans un bureau de France Telecom, il y a trois caissons possédant chacune deux tiroirs. Dans chaque tiroir il y a un poste téléphonique. Dans le premier caisson il y a deux postes AMARYS 220 (France Telecom), dans le deuxième il y a deux postes EVALIA 5400 (intrusion de Philips) et dans le troisième il y a un AMARYS 220 et un EVALIA 5400.

1. On ouvre au hasard l'un des six tiroirs. On trouve un EVALIA 5400. Quelle est la probabilité d'avoir ouvert un tiroir du deuxième caisson ?
2. On renouvelle l'expérience. Quelle est la probabilité d'avoir vidé le deuxième caisson ?

Exercice 6

Quand on téléphone chez Omar entre 18 et 19 heures, on a neuf chances sur dix de tomber sur son répondeur. Il utilise cet interlocuteur électronique, lorsqu'il est là, deux fois sur trois pour ne pas avoir à répondre aux importuns intempestifs. Quand il est absent, il l'utilise toujours.

1. Calculer la probabilité pour qu'il soit là entre 18 et 19 heures.
2. On tombe sur le répondeur. Calculer la probabilité pour qu'il soit présent.