Variables aléatoires discrètes

Exercice 1

Soit X et Y deux v.a. binomiales indépendantes, de paramètres respectifs (m, p) et (n, p).

1. Quelle est la loi de $S = X + Y$?
2. Déterminer la loi de «X sachant $S = s$» où $s \in \{0, 1, \ldots, m + n\}$ est fixé. Reconnaître la distribution de probabilité obtenue.
3. Interpréter le résultat de la question précédente à l'aide d'un jeu de pile ou face à $m + n$ lancers.

On donne $\displaystyle\sum_{i=\max(0,j-n)}^{\min(j,m)} C_m^i C_n^{j-i} = C_{m+n}^j$.

Exercice 2 (Loi trinomiale)

Soit $Z = (X, Y)$ un couple aléatoire à valeurs dans $\{0, 1, \ldots, n\}^2$ suivant la loi

$$\mathbb{P}(Z = (i, j)) = \begin{cases} \dfrac{n!}{i!\, j!\, (n-i-j)!}\, p^i q^j (1-p-q)^{n-i-j} & \text{si } i + j \leqslant n, \\ 0 \ \text{sinon}, \end{cases}$$

$p, q \in]0, 1[$ étant fixés tels que $p + q \leqslant 1$.

1. Préciser les lois marginales. Sont-elles indépendantes ?
2. Déterminer la loi de $S = X + Y$.
3. Déterminer la loi de conditionnelle «X sachant $S = s$» où $s \in \{0, 1, \ldots, n\}$ est fixé.

Exercice 3

Soit X et Y deux v.a. indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ.

1. Quelle est la loi de $S = X + Y$?
2. Reconnaître la loi conditionnelle de «X sachant $S = s$» où $s \in \mathbb{N}$.

Exercice 4

Un standard téléphonique reçoit N appels par jour. On suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre λ. Parmi ces N numéros, il y a X faux numéros, et chaque numéro parmi les N a la probabilité p d'être faux. On note Y le nombre de bons numéros parmi les N.

1. Déterminer la loi du couple aléatoire (X, N).
2. En déduire la loi de chacune des v.a. X et Y. Les v.a. X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Déterminer la loi conditionnelle de «N sachant $X = x$» où $x \in \mathbb{N}$.
4. Calculer le coefficient de corrélation $\rho(X, N)$.

Exercice 5

Une station de comptage de voitures dénombre les véhicules qui circulent sur une route. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n le nombre de véhicules passés entre les instants 0 et n ; on a $X_0 = 0$. On suppose qu'il existe un réel $\lambda > 0$ tel que pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ avec $0 \leqslant m \leqslant n$:

(i) la v.a. $X_n - X_m$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda(n - m)$;

(ii) les v.a. X_m et $X_n - X_m$ sont indépendantes.

1. Déterminer la loi conjointe du couple aléatoire (X_m, X_n).
2. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ tels que $0 \leqslant m < n$. Quelle la loi conditionnelle de X_m sachant $X_n = k$?
3. On note $N = \min\{n \geqslant 1 : X_n \geqslant 1\}$. Déterminer la loi de N ainsi que son espérance.

Exercice 6

Soit X et Y deux v.a. suivant des lois géométriques de paramètres respectifs p et q. On pose $Z = \min(X, Y)$.

1. Montrer que pour tout $z \geqslant 1$, $\mathbb{P}(Z = z) = \mathbb{P}(X \geqslant z)\mathbb{P}(Y \geqslant z) - \mathbb{P}(X \geqslant z + 1)\mathbb{P}(Y \geqslant z + 1)$.
2. Reconnaître la loi de la v.a. Z.

Exercice 7 (Problème de l'ivrogne)

Arrivé devant la porte de son domicile, un noctambule éméché se trouve confronté au redoutable problème consistant à trouver la bonne clé parmi les n qui composent son trousseau.

1. Travaillant sans méthode, c'est-à-dire prenant une clé au hasard sans prendre soin de l'isoler après l'avoir testée, calculer la probabilité qu'il parvienne à ouvrir la porte au premier essai ; au deuxième ; après le n-ième essai ? Après combien d'essais peut-il espérer ouvrir la porte ? Que peut-on en déduire ?
2. Reprendre le problème dans le cas où, dans un indicible éclair de lucidité, il met au fur et à mesure de côté les clés testées.
3. Reprendre le problème dans le cas où deux clés du trousseau permettent d'ouvrir la porte.

On donne $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice 8 (Loi hypergéométrique)

Soit un ensemble E constitué de M éléments de type 1 et $N-M$ de type 2. On effectue n tirages sans remise dans E. Soit X_k la v.a. définie par $X_k = 1$ si le k-ième tirage dans E donne un élément de type 1 et $X_k = 0$ si le k-ième tirage dans E donne un élément de type 2, et soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

1. Quelle est la loi de S_n ?
2. Déterminer la loi de X_k, puis calculer l'espérance et la variance de X_k.
3. Calculer $\mathrm{cov}(X_i, X_j)$ pour i, j distincts.
4. En déduire l'espérance et la variance de S_n.

Exercice 9 (L'urne de Pólya)

Une urne contient b boules blanches et r boules rouges. Une boule étant tirée puis remise, on rajoute dans l'urne c boules de la couleur de la boule tirée ($c < 0$ signifiant que l'on retire éventuellement les boules).

On pose $X_n = 0$ si on tire une boule blanche lors du n-ième tirage, $X_n = 1$ sinon.

1. Déterminer la loi de X_1, puis celle de X_2.
2. On pose $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Montrer que $\mathbb{P}(X_n = 1) = \dfrac{r + c\mathbb{E}(S_{n-1})}{b + r + (n-1)c}$.
3. En déduire la loi de X_n.
4. Calculer la loi de S_n.

Exercice 10 (Lois de Pascal et binomiale négative)

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de v.a. à valeurs dans $\{0, 1\}$ de même loi de Bernoulli de paramètre p ($\mathbb{P}(X_n = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X_n = 0) = q = 1 - p$). Pour tout entier $r \geqslant 1$ et tout $\omega \in \Omega$, on pose

$$\tau_r(\omega) = \inf\{n \geqslant 1 : X_1(\omega) + X_2(\omega) + \ldots + X_n(\omega) = r\}$$

et

$$\theta_r(\omega) = \inf\{n \geqslant 0 : X_1(\omega) + X_2(\omega) + \ldots + X_{n+r}(\omega) = r\}$$

avec la convention $\inf \emptyset = +\infty$. On rappelle la relation suivante valable pour tout $x \in]0, 1[$:

$$\sum_{k=r}^{+\infty} C_{k-1}^{r-1} x^{k-r} = \frac{1}{(1-x)^r}.$$

1. Montrer que τ_r est une v.a. à valeurs dans $(\mathbb{N} \cap [r, +\infty[) \cup \{+\infty\}$, telle que $\mathbb{P}(\tau_r = +\infty) = 0$ et suit la loi de Pascal de paramètres r et p :
$$\mathbb{P}(\tau_r = k) = C_{k-1}^{r-1} p^r q^{k-r},\ k \geqslant r.$$
2. (a) Trouver une relation entre θ_r et τ_r.
   (b) Montrer alors que θ_r est une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, telle que $\mathbb{P}(\theta_r = +\infty) = 0$ et suit la loi binomiale-négative de paramètres r et p :
$$\mathbb{P}(\theta_r = k) = C_{k+r-1}^{r-1} p^r q^k,\ k \geqslant 0.$$
3. Donner une interprétation de τ_r et θ_r en terme de jeu de Pile ou Face.

Application.— Problème des boîtes d'allumettes de Stephan Banach. Montrer qu'un des deux modèles précédents permet de formaliser le problème suivant :

Un fumeur a dans chacune de ses deux poches une boîte contenant au départ N allumettes. Chaque fois qu'il désire fumer une cigarette, il choisit une poche au hasard. Quelle est la probabilité que, le fumeur se rendant compte pour la première fois qu'une boîte est vide, l'autre boîte contienne k allumettes, $k \leqslant N$?

Exercice 11

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de v.a. indépendantes suivant une même loi X qui admet un moment d'ordre 2 fini, et N une v.a. discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendante des X_n. On note G_X et G_N les fonctions génératrices de X et N et on pose $S_N = X_1 + \cdots + X_N$ et $S_0 = 0$.

1. Exprimer l'espérance et la variance de la v.a. S_N en fonction des espérances et des variances des v.a. X et N.
2. Exprimer la fonction génératrice de S_N en fonction de G_X et G_N. Retrouver le résultat de la question précédente.

Application.— Déterminer la loi de S_N dans les cas suivants :

1. X suit la loi de Bernoulli de paramètre p et N la loi binomiale de paramètres (n, q) ;
2. X suit la loi de Bernoulli de paramètre p et N la loi de Poisson de paramètre λ ;
3. X suit la loi géométrique de paramètre p et N la loi de Pascal de paramètres (r, q).