# Tests d'hypothèse

**Exercice 1**

Un fabricant de tubes à essais pour laboratoire fonde sa publicité sur le fait que la durée de vie de ses tubes correspond à 1500 heures de chauffage à l'air d'un bec Bunzen. Un laboratoire de contrôle de publicité constate que sur 100 tubes à essais, la durée de vie est de 1485 heures de chauffage, l'écart-type de cet échantillon étant de 110 heures. Au risque de 5 %, la durée de vie des tubes à essais est-elle différente de 1500 heures de chauffage ?

---

**Exercice 2**

Les postes téléphoniques d'une certaine marque — que nous ne dévoilerons pas ici, nous ne sommes pas des sycophantes — ont une durée de vie moyenne de 3000 heures avec un écart-type de 150 heures. A la suite d'une modification dans la fabrication des appareils, la société de vente — dont nous tairons pudiquement le nom — affirme que les nouveaux postes ont une durée de vie supérieure à celle des anciens. On a testé un échantillon de 50 nouveaux postes et l'on a trouvé une durée de vie moyenne de 3250 heures avec un écart-type de 200 heures. Peut-on conclure au risque de 1 % à l'amélioration de durée de vie des nouveaux téléphones ?

---

**Exercice 3**

Dans les locaux de France Telecom, des mesures ont été prises pour améliorer la santé du personnel (prévention contre la maniaco-vésanie). A la suite de ces dispositions, on réalise une enquête qui a donné les résultats suivants :

- sur 100 personnes interrogées, 9 d'entre elles déclarent avoir eu un problème de santé (surchage d'appels téléphoniques) l'année précédant les nouvelles conditions ;
- d'après 400 personnes interrogées, il y a eu 56 problèmes de santé l'année qui suit les nouvelles conditions.

Peut-on considérer au risque de 5 % que ces dispositions ont apporté une réelle amélioration à la santé du personnel ?

---

**Exercice 4**

Une société de vente par correspondance a observé qu'en 1995, le montant $X$ des commandes suivait la loi normale de moyenne $m_0 = 250$ F et d'écart-type $\sigma_0 = 75$ F. Des études statistiques antérieures montrent que cet écart-type est stable, on le suppose donc inchangé dans la suite.
Au cours du premier trimestre 1996, un échantillon de 225 commandes est prélevé pour vérifier l'hypothèse $H_0$ que le montant moyen des commandes est stable. On note $X_1, X_2, \ldots, X_{225}$ les 225 v.a. indépendantes donnant les montants respectifs de 225 commandes prélevées au hasard, variables qui, sous l'hypothèse $H_0$, suivent la loi de $X$. Soit $\overline{X}$ leur moyenne.

1. Donner une approximation de la loi de la v.a. $\overline{X}$.
2. La région d'acceptation de $H_0$ est définie par $\overline{X} \leqslant 261.5$. Préciser l'hypothèse alternative $H_1$ correspondante, puis calculer le risque de première espèce de ce test, c'est-à-dire la probabilité de rejeter à tort $H_0$.
3. La moyenne observée de l'échantillon tiré est 260 F. Calculer dans ce cas le risque d'erreur de deuxième espèce correspondant à la région d'acceptation définie en 2., c'est-à-dire la probabilité d'accepter à tort $H_0$.
4. Dans le cas d'un test bilatéral, calculer le nombre minimum de commandes à examiner pour obtenir un intervalle de confiance de longueur 10 au risque $\alpha = 0.1$.

---

**Exercice 5**

Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un échantillon issu d'une loi uniforme sur $[0, \theta]$ où $\theta > 0$ est un paramètre inconnu. On pose $X_{(1)} = \min(X_1, \ldots, X_n)$ et $X_{(n)} = \max(X_1, \ldots, X_n)$.

1. Donner la puissance $\pi_1(\theta)$ de la procédure consistant à rejeter l'hypothèse $H_0$ si $X_{(n)} \leqslant 0.5$ ou $X_{(n)} \geqslant 1$ pour tester $H_0 : \theta = 1$ contre $H_1 : \theta \neq 1$.
2. Donner la puissance $\pi_2(\theta)$ de la procédure consistant à rejeter l'hypothèse $H_0$ si $X_{(1)} \geqslant 0.5$ pour tester $H_0 : \theta = 1$ contre $H_1 : \theta > 1$.
3. Comparer $\pi_1(\theta)$ et $\pi_2(\theta)$ pour $\theta > 1$.