Chapitre 1

Chaînes de Markov à temps discret

Ex 1 (barrage)

X_n : quantité d'eau dans le barrage au début du n^e jour, Y_n : amenée d'eau dans le n^e jour.

$$X_{n+1} = \begin{cases} 0 & \text{si } X_n+Y_n \leq 1 \\ X_n+Y_n-1 & \text{si } 1 \leq X_n+Y_n \leq 4 \\ 3 & \text{si } X_n+Y_n \geq 4 \end{cases}$$

$\begin{cases} \text{si } X_n=0, \ X_{n+1} = (Y_n-1)^+ \\ \text{si } X_n=3, \ X_{n+1} = 3+(Y_n-1)^- \end{cases}$

$E=\{0,1,2,3\}$

$$= (X_n+Y_n-1)^+ \wedge 3$$

$$P(X_{n+1}=j \mid X_n=i) = P((Y+i-1)^+ \wedge 3 = j)$$

si $i=0$: $P((Y-1)^+ \wedge 3 = j) = \begin{cases} P((Y-1)^+=0) = P(Y=0 \text{ ou } 1) & \text{si } j=0 \\ P(Y=j+1) & \text{si } 1 \leq j \leq 2 \\ P(Y \geq 4) & \text{si } j=3 \end{cases}$

i\j	0	1	2	3
0	0.7	0.2	0.1	0

si $i=1$: $P(Y \wedge 3 = j) = P(Y=j)$

i\j	0	1	2	3
1	0.2	0.5	0.2	0.1

si $i=2$: $P((Y+1) \wedge 3 = j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j=0 \\ P(Y=j-1) & \text{si } 1 \leq j \leq 2 \\ P(Y=2 \text{ ou } 3) & \text{si } j=3 \end{cases}$

i\j	0	1	2	3
2	0	0.2	0.5	0.3

si $i=3$: $P((Y+2) \wedge 3 = j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \leq 1 \\ P(Y=0) & \text{si } j=2 \\ P(Y \geq 1) & \text{si } j=3 \end{cases}$

i\j	0	1	2	3
3	0	0	0.2	0.8

$$P = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 & 0 \\ 0.2 & 0.5 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$$

$\pi = \pi P \Leftrightarrow \boxed{\pi = (0{,}099 \,;\, 0.148 \,;\, 0.272 \,;\, 0.481)}$

Ex 2 (deux machines)

X_n = nombre de machines en panne au début du n^e jour

1) $E=\{0,1\}$ il n'y a pas plus d'une machine en panne par jour.

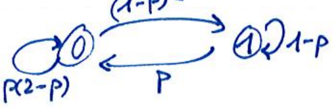
$P(X_{n+1}=0 \mid X_n=0) = P$ (aucune machine ne tombe en panne le n^e jour)
$+ P$ (une seule machine tombe en panne le n^e jour et est réparée dans la nuit)
$= p^2 + 2p(1-p) = p(2-p)$

$P(X_{n+1}=0 \mid X_n=1) = P$ (une seule machine tombe en panne le n^e jour et a été réparée)
$= P$ (l'autre machine est en marche pendant le n^e jour) $= p$

$P(X_{n+1}=1 \mid X_n=0) = P$ (les deux machines sont tombées le n^e jour) (et alors une seule a été réparée dans la nuit)
$= (1-p)^2$

$P(X_{n+1}=1 \mid X_n=1) = P$ (une machine était en panne le n^e jour, l'autre est tombée en panne pendant le n^e jour, et l'une des deux a été réparée dans la nuit)
$= P$ (l'autre est tombée en panne le n^e jour)
$= 1-p$

$$P = \begin{pmatrix} p(2-p) & (1-p)^2 \\ p & (1-p) \end{pmatrix}$$



2) $P(X_{n+1}=0 \mid X_n=2, X_{n-1}=2) = 1$ car $X_n=2, X_{n-1}=2 \Rightarrow$ la réparation des deux machines s'est fait pendant deux jours donc état de marche après $\Rightarrow X_{n+1}=0$

$P(X_{n+1}=0 \mid X_n=2, X_{n-1}=0) = 0$ car $X_n=2, X_{n-1}=0 \Rightarrow$ les deux machines sont tombées en panne pendant le $(n-1)^e$ jour et ne seront en marche que le $(n+2)^e$ jour (réparation pendant deux jours) i.e. $X_n = X_{n+1} = 2$

On introduit un autre espace d'états : $E = \{a_0, a_1, a'_1, a_2, a'_2, a''_2\}$

a_0 : les deux machines fonctionnent

a_1 : une machine fonctionne, la 2^e est dans sa $1^{ère}$ journée de réparation

a'_1 : " " $2^{ème}$ "

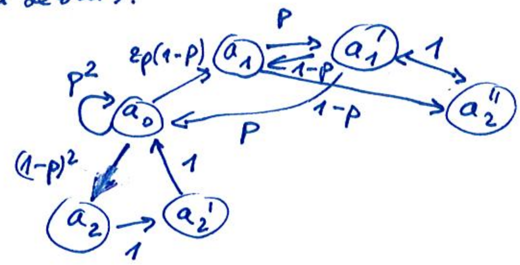
a_2 : les deux machines sont en panne, dans leur $1^{ère}$ journée de réparation

a'_2 : " " $2^{ème}$ "

a''_2 : " , l'une dans sa $1^{ère}$ journée de réparation
l'autre " $2^{ème}$ "

X_n : état des deux machines le n^e jour (au début).

$$P = \begin{pmatrix} p^2 & 2p(1-p) & 0 & (1-p)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 & 0 & 1-p \\ p & 1-p & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Ex3 (2 boîtes) $E = \{0, 1, \dots, d\}$ X_n = nb de boules noires dans la $1^{ère}$ boîte juste après n tirages

modèle de Laplace-Bernoulli

On a $P(X_{n+1} = j \mid X_n = 0) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq 1 \\ 1 & \text{si } j = 1 \end{cases}$

[d rouges] A [d noires] B → [(d-1) rouges, 1 noire] A [(d-1) noires, 1 rouge] B

et de même $P(X_{n+1} = j \mid X_n = d) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq d-1 \\ 1 & \text{si } j = d-1 \end{cases}$

Pour $1 \leq i \leq d-1$:

$$\begin{cases} P_{ii} = 2\left(\frac{i}{d}\right)\left(\frac{d-i}{d}\right) \\ P_{i\,i+1} = \left(\frac{d-i}{d}\right)^2 \\ P_{i\,i-1} = \left(\frac{i}{d}\right)^2 \\ P_{ij} = 0 \quad \text{si } |j-i| > 1 \end{cases}$$

[i noires / d-i rouges] A [d-i noires / i rouges] B

P_{ii} → tirer [1 rouge dans A / 1 rouge dans B] ou [1 noire dans A / 1 noire dans B]

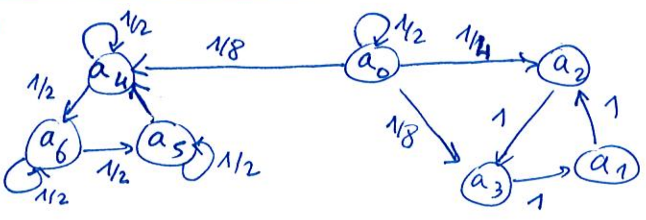
$P_{i\,i+1}$ → tirer [1 rouge dans A / 1 noire dans B]

$P_{i\,i-1}$ → tirer [1 noire dans A / 1 rouge dans B]

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \left(\frac{1}{d}\right)^2 & 2\frac{1}{d}\left(1-\frac{1}{d}\right) & \left(1-\frac{1}{d}\right)^2 & 0 & \dots \\ 0 & \left(\frac{2}{d}\right)^2 & 2\frac{2}{d}\left(1-\frac{2}{d}\right) & \left(1-\frac{2}{d}\right)^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ & & \left(1-\frac{1}{d}\right)^2 & \frac{2}{d}\left(1-\frac{1}{d}\right) & \left(\frac{1}{d}\right)^2 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ex4 (matrices, 1)

a)



$\{a_1, a_2, a_3\}$, $\{a_4, a_5, a_6\}$ classes fermées finies donc réc.

a_0 : transitoire

- $f^*_{ij} = 1$ si $a_i \neq a_0$ (états récurrents)
- $f^*_{01} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_{a_0}(\tau_{a_1} = n)$. Or $\mathbb{P}_{a_0}(\tau_{a_1} = 1) = \mathbb{P}_{a_0}(X_1 = a_1) = 0$

$\mathbb{P}_{a_0}(\tau_{a_1} = 2) = \mathbb{P}_{a_0}(X_1 = a_3, X_2 = a_1) = \frac{1}{4}$

$\mathbb{P}_{a_0}(\tau_{a_1} = 3) = \mathbb{P}_{a_0}(X_1 = a_0, X_2 = a_3, X_3 = a_1) + \mathbb{P}_{a_0}(X_1 = a_2, X_2 = a_3, X_3 = a_1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$

...

$\mathbb{P}_{a_0}(\tau_{a_1} = n) = \mathbb{P}_{a_0}(X_1 = \dots = X_{n-3} = a_0, X_{n-2} = a_2, X_{n-1} = a_3, X_n = a_1) + \mathbb{P}_{a_0}(X_1 = \dots = X_{n-2} = a_0, X_{n-1} = a_3, X_n = a_1)$

$= \boxed{\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}}$

méthode immédiate :

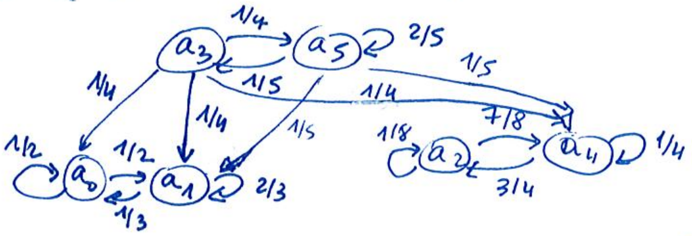
$f^*_{01} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_{a_0}(X_1 = \dots = X_n = a_0, X_{n+1} \in \{a_2, a_3\})$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{4}\right) \frac{1}{2^n} = \frac{3}{8} \times 2 = \boxed{\frac{3}{4}}$

d'où $f^*_{01} = \frac{1}{4} + \sum_{n=3}^{\infty} \underbrace{\left[\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \right]}_{1/2^{n-1}} = \boxed{\frac{3}{4}} = f^*_{02} = f^*_{03}$ (e.g. $\mathbb{P}_{a_0}(\tau_{a_1}<\infty) = \mathbb{P}_{a_0}(\tau_{a_3}<\infty)\underbrace{\mathbb{P}_{a_3}(\tau_{a_1}<\infty)}_{1}$)

- $f^*_{04} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_{a_0}(\tau_{a_4}=n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_{a_0}(X_1=\dots=X_{n-1}=a_0, X_n=a_4) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \boxed{\frac{1}{4}} = f^*_{05} = f^*_{06}$.
- $f^*_{00} = \mathbb{P}_{a_0}(\tau_{a_0}<\infty) = \mathbb{P}_{a_0}(X_1=a_0) = f^{(1)}_{00} = \boxed{\frac{1}{2}}$ (si $X_1 \neq a_0$ alors $\tau_{a_0}=+\infty$)

b)



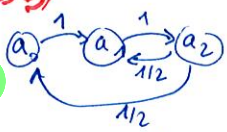
$\{a_0,a_1\}, \{a_2,a_4\}$: classes fermées
$\{a_3,a_5\}$: classe transitoire

$P^* =$

	a_0	a_1	a_2	a_4	a_3	a_5
a_0	1/2	1/2	0	0	0	0
a_1	1/2	2/3	0	0	0	0
a_2	0	0	1/8	7/8	0	0
a_4	0	0	3/4	1/4	0	0
a_3	1/4	1/4	0	1/4	0	1/4
a_5	0	1/5	0	1/5	1/5	2/5

ex8 (matrices 3)

1) a)

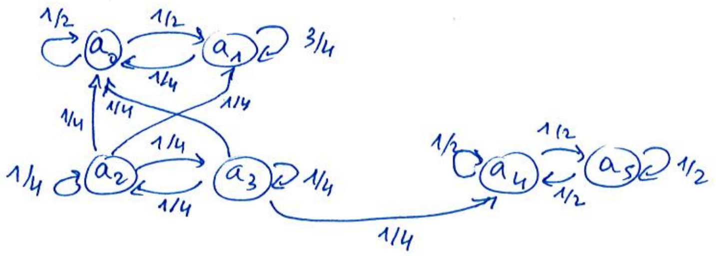


$\longrightarrow$ chaîne irréductible apériodique récurrente.

b)

deux classes récurrentes : $\{a_0,a_1,a_3\}$, période $d=3$; $\{a_2\}$ absorbant

c)



$\{a_0,a_1\}, \{a_4,a_5\}$: classes fermées irréductibles récurrentes apériodiques
$\{a_2,a_3\}$: classe transitoire

$P^* =$

	a_0	a_1	a_4	a_5	a_2	a_3
a_0	1/2	1/2	0	0	0	0
a_1	1/4	3/4	0	0	0	0
a_4	0	0	1/2	1/2	0	0
a_5	0	0	1/2	1/2	0	0
a_2	1/4	1/4	0	0	1/4	1/4
a_3	1/4	0	0	1/4	1/4	1/4

2) $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = Q D Q^{-1}$ $\quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i/2 & 0 \\ 0 & 0 & -i/2 \end{pmatrix}$

$p^{(n)}_{00} = (P^n)_{00} = (Q D^n Q^{-1})_{00}$ de la forme $a + b\left(\frac{i}{2}\right)^n + c\left(-\frac{i}{2}\right)^n$ ou encore $\alpha + \frac{1}{2^n}\left(\beta \cos\frac{n\pi}{2} + \gamma \sin\frac{n\pi}{2}\right)$

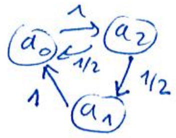
or $\begin{cases} p^{(0)}_{00} = 1 = \alpha + \beta \\ p^{(1)}_{00} = 0 = \alpha + \frac{\gamma}{2} \\ p^{(2)}_{00} = 0 = \alpha - \frac{\beta}{4} \end{cases}$ $\longrightarrow$ $\boxed{p^{(n)}_{00} = \frac{1}{5} + \frac{1}{2^n}\left[\frac{4}{5}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{2}{5}\sin\frac{n\pi}{2}\right]}$.

ex9 (temps de sortie)

Soit $a_i \in F$. $\mu_i = \mathbb{E}_{a_i}(\tau_F) = \sum_{a_j\in F} \underbrace{\mathbb{E}_{a_i}(\tau_F \mid X_1=a_j)}_{\mathbb{E}_{a_j}(\tau_F+1)} p_{ij} + \mathbb{E}_{a_i}(\tau_F \underbrace{\mathbb{1}_{\{X_1\notin F\}}}_{\Rightarrow \tau_F=1})$

$= \sum_{a_j\in F} p_{ij}(\mu_j+1) + \sum_{a_j\in E\setminus F} p_{ij} = \boxed{1 + \sum_{a_j\in F} p_{ij}\mu_j}$.

Ex 5 (matrices 2)

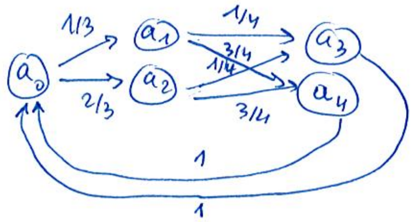
a) 

chaîne fermée irréductible finie $\Rightarrow$ récurrente

$\pi = \pi P \Rightarrow \pi = \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)$

$p_{00}^{(2)} = \frac{1}{2} > 0,\ p_{00}^{(3)} = \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow d_0 \leq pgcd(2,3) = 1$

$\Rightarrow$ chaîne apériodique.

b) 

chaîne fermée irréductible finie $\Rightarrow$ récurrente

$$\begin{cases} p_{00}^{(1)} = p_{00}^{(2)} = 0 \\ p_{00}^{(3)} = p_{01}p_{13} + p_{01}p_{14} + p_{02}p_{23} + p_{02}p_{24} = \frac{1}{12} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = 1 \end{cases}$$

$\pi = \pi P \Rightarrow \boxed{\pi = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{1}{12}, \frac{1}{4}\right)}$

$$\Rightarrow \begin{cases} p_{00}^{(3n)} = 1 \\ p_{00}^{(3n+1 \text{ ou } 2)} = 0 \end{cases} \forall n \Rightarrow \boxed{d_0 = 3}$$

Ex 7 (chaîne des succès)

1) $$P = \begin{bmatrix} 1-p & p & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1-p & 0 & p & 0 & 0 & \cdots \\ 1-p & 0 & 0 & p & 0 & \cdots \\ 1-p & 0 & 0 & 0 & p & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \end{bmatrix}$$

si $j > i$, $p_{ij}^{(j-i)} = \mathbb{P}_i(X_{j-i} = j) \geq \mathbb{P}_i(X_{j-i} = j, X_{j-i-1} = j-1, \dots, X_1 = i+1)$
$= p^{j-i} > 0$
$(i \to i+1 \to i+2 \to \dots \to j-1 \to j)$

si $j < i$, $p_{ij}^{(j+1)} = \mathbb{P}_i(X_j = j+1) \geq \mathbb{P}_i(X_{j+1} = j, X_j = j-1, \dots, X_1 = 0)$
$= (1-p)p^j$
$(i \to 0 \to 1 \to \dots \to j-1 \to j)$

Dans les deux cas $i \to j$. Et inversement $\Rightarrow$ irréductible.

2) $f_{00}^{(n)} = \mathbb{P}_0(\tau_0 = n) = \mathbb{P}_0(X_1, \dots, X_{n-1} \neq 0, X_n = 0) = \boxed{p^{n-1}(1-p)}$

3) $f_{00}^{*} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{00}^{(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} p^{n-1}(1-p) = 1 \Rightarrow 0$ récurrente (+ irréductible) $\Rightarrow$ chaîne récurrente.

Généralisation : $P = \begin{bmatrix} 1-p_0 & p_0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1-p_1 & 0 & p_1 & 0 & \cdots \\ 1-p_2 & 0 & 0 & p_2 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \end{bmatrix}$ $\quad f_{00}^{(n)} = p_0 p_1 \cdots p_{n-2}(1-p_{n-1}) = u_{n-2} - u_{n-1}$

avec $u_n = p_0 p_1 \cdots p_n = \mathbb{P}_0(\tau_0 > n)$.

$$f_{00}^{*} = 1 \Leftrightarrow \sum_{n=2}^{\infty}(u_{n-2} - u_{n-1}) = 1 = \lim_{n\to\infty} u_n - \underset{1}{\underset{\shortparallel}{u_0}} \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \Leftrightarrow \prod_{n=0}^{\infty}(1-(1-p_n)) \text{ divergent}$$

$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(1-p_n)$ divergente donc : $\boxed{\text{chaîne récurrente} \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(1-p_n) = +\infty}$.

Ex 8 (chaîne à 2 états)

1) $P = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix} = QDQ^{-1}$ $\quad Q = \begin{pmatrix} 1 & -p \\ 1 & q \end{pmatrix}$ $\quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-p-q \end{pmatrix}$ $\quad Q^{-1} = \frac{1}{p+q}\begin{pmatrix} q & p \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$P^n = \frac{1}{p+q}\begin{pmatrix} 1 & -p \\ 1 & q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1-p-q)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q & p \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\frac{1}{p+q}\left[\begin{pmatrix} q & p \\ q & p \end{pmatrix} + (1-p-q)^n \begin{pmatrix} p & -p \\ -q & q \end{pmatrix}\right]}$$

$p = q = 0 : P = I$. $\quad p = q = 1 : P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

2) si $0 < p+q < 2$: $\lim_{n\to+\infty} P^n = \frac{1}{p+q}\begin{pmatrix} q & p \\ q & p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi \\ \pi \end{pmatrix}$ avec $\boxed{\pi = \left(\frac{q}{p+q}, \frac{p}{p+q}\right)}$

3) $P^n - \underset{=\Pi}{\Pi} = \frac{(1-p-q)^n}{p+q}\begin{pmatrix} p & -p \\ -q & q \end{pmatrix} \Rightarrow |p_{ij}^{(n)} - \pi_j| \leq \frac{1}{p+q}|1-p-q|^n = \boxed{A\rho^n}$, $A = \frac{1}{p+q}$, $\rho = |1-p-q|$

4) $f_{ij}^{(n)} = \mathbb{P}_{a_i}(\tau_{a_j} = n)$. si $a_i \neq a_j$: $f_{ij}^{(n)} = \mathbb{P}_{a_i}(X_1, \dots, X_{n-1} \neq a_i, X_n = a_j) = p_{ii}^{n-1}p_{ij} = \begin{cases} (1-p)^{n-1}p \\ (1-q)^{n-1}q \end{cases}$.

si $a_i = a_j$: $f_{ii}^{(n)} = \mathbb{P}_{a_i}(X_1, \dots, X_{n-1} \neq a_i, X_n = a_i) = p_{ii'}p_{i'i'}^{n-2}p_{i'i} = \begin{cases} pq(1-q)^{n-2} \\ pq(1-p)^{n-2} \end{cases}$ si $n \geq 2$
(donc $= a_i'$)
où $\{a_i'\} = E \setminus \{a_i\}$

$f_{ii}^{(1)} = \mathbb{P}_{a_i}(X_1 = a_i) = \begin{cases} 1-p \\ 1-q \end{cases}$ $(n=1)$

$$\nu_{ij} := \mathbb{E}_{a_i}(\tau_{a_j}) = \begin{cases} \frac{1}{p} & \text{si } i=1, j=2 \\ \frac{1}{q} & \text{si } i=2, j=1 \end{cases}, \begin{cases} 1-p+pq\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} n(1-q)^{n-2}}_{\frac{1}{1-q}\left(\frac{1}{q^2}-1\right) = \frac{1+q}{q^2}} = 1 + \frac{p}{q} = \frac{1}{\pi_1} & \text{si } i=j=1 \\ \text{idem} \dots = \frac{1}{\pi_2} & \text{si } i=j=2 \end{cases}$$

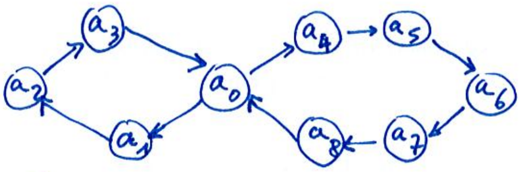
Autres exemples de matrices périodiques

1)

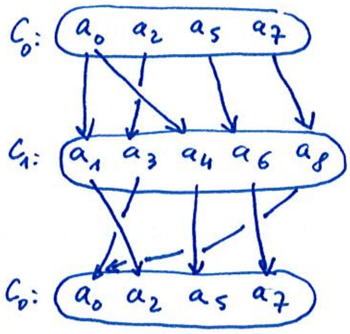
$$P = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{array}{cc} \begin{array}{ccccccccc} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \end{array} \end{array}$$

$$C_0 = \{a_j \in E : \exists n \in \mathbb{N} / p_{0j}^{(2n)} > 0\} = \{a_0, a_2, a_5, a_7\}$$

$$C_1 = \{a_j \in E : \exists n \in \mathbb{N} / p_{0j}^{(2n+1)} > 0\} = \{a_1, a_3, a_4, a_6, a_8\}$$



ou encore

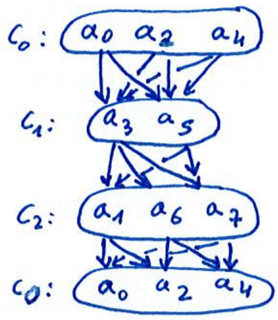


décomposition en blocs :

$$P^* = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccccccc} a_0 & a_2 & a_5 & a_7 & a_1 & a_3 & a_4 & a_6 & a_8 \end{array} & \\ \left[\begin{array}{cccc|ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] & \begin{array}{c} a_0 \\ a_2 \\ a_5 \\ a_7 \\ a_1 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_6 \\ a_8 \end{array} \end{array}$$

2)

$$P = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccccccc} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 & 3/4 & 0 & 0 & 0 \\ 1/6 & 0 & 0 & 0 & 5/6 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \end{array} \end{array}$$



La chaîne est irréductible

a_0 : état de période 3

$$C_0 = \{a_j \in E : \exists n \in \mathbb{N} / p_{0j}^{(3n)} > 0\} = \{a_0, a_2, a_4\}$$

$$C_1 = \{a_j \in E : \exists n \in \mathbb{N} / p_{0j}^{(3n+1)} > 0\} = \{a_3, a_5\}$$

$$C_2 = \{a_j \in E : \exists n \in \mathbb{N} / p_{0j}^{(3n+2)} > 0\} = \{a_1, a_6, a_7\}$$

décomposition en blocs :

$$P^* = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccccccc} a_0 & a_2 & a_4 & a_3 & a_5 & a_1 & a_6 & a_7 \end{array} & \\ \left[\begin{array}{ccc|cc|ccc} 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 2/3 \\ \hline 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/6 & 5/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] & \begin{array}{c} a_0 \\ a_2 \\ a_4 \\ a_3 \\ a_5 \\ a_1 \\ a_6 \\ a_7 \end{array} \end{array}$$