Chaînes de Markov à temps discret (suite)

Exercice 1 (Processus de naissance-mort discret)

1. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de naissance-mort sur $\mathbb{N}$ telle que $p_{ii} = r_i$ et $p_{i\,i+1} = p_i > 0$ si $i \geqslant 0$, $p_{i\,i-1} = q_i > 0$ si $i \geqslant 1$, où p_i, q_i et r_i sont tels que $p_0 + r_0 = 1$, $p_i + q_i + r_i = 1$ pour $i \in \mathbb{N}^*$, et $p_{ij} = 0$ dans les autres cas. On pose
$$\gamma_0 = 1 \text{ et } \gamma_j = \frac{q_1 q_2 \cdots q_j}{p_1 p_2 \cdots p_j} \text{ pour } j \in \mathbb{N}^*.$$
   (a) Soit $\tau_j = \min\{n \in \mathbb{N} : X_n = j\}$ et $u_j = \mathbb{P}_j(\tau_a < \tau_b)$ pour $a \leqslant j \leqslant b$. Trouver une relation entre $u_{j+1} - u_j$ et $u_j - u_{j-1}$ pour $a < j < b$.
   (b) En déduire que
$$u_j = \frac{\sum_{i=j}^{b-1} \gamma_i}{\sum_{i=a}^{b-1} \gamma_i}$$
   (on pourra exprimer u_j en fonction de $u_{a+1} - u_a$ puis remarquer que $u_a = 1$ et $u_b = 0$.)
   (c) Étudier le cas particulier où $p_i = q_i$ pour tout $i \in \mathbb{N}^*$.
2. (a) Calculer $\mathbb{P}_1(\tau_0 = +\infty)$ à l'aide des γ_i, $i \in \mathbb{N}$, en utilisant ce qui précède avec $a = 0$ et $b = n$ puis $n \to +\infty$.
   (b) Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est récurrente si et seulement si $\displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} \gamma_j = +\infty$.
   (c) Montrer que dans ce cas, la chaîne est récurrente-positive si et seulement si $\displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{p_j \gamma_j} < +\infty$ (on cherchera une probabilité invariante).
   (d) Particulariser ces résultats au cas où $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $p_i = p_0 = p$, $q_i = r_0 = 1 - p$ et $r_i = 0$.

Exercice 2 (File d'attente $D/G/1$)

Soient $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. indépendantes à valeurs entières et de même loi donnée par $\mathbb{P}(U_0 = j) = a_j > 0$, $j \in \mathbb{N}$. Soit en outre $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $X_0 = 0$ et $X_{n+1} = (X_n + 1 - U_n)^+$, $n \in \mathbb{N}$.

1. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est le modèle d'une file d'attente. Décrire celle-ci.
2. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov et écrire sa matrice de transition.
3. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est récurrente-positive si $\mathbb{E}(U_0) > 1$. On cherchera une probabilité stationnaire de la forme $\pi_j = c\lambda^j$, $\lambda \in]0, 1[$, et on montrera que λ est l'unique solution sur $]0, 1[$ de l'équation $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} a_j \lambda^j = \lambda$.
4. En observant que $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^+ \geqslant x$, montrer que $X_n \geqslant X_0 + n - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} U_k$. En déduire, en utilisant la loi des grands nombres que $\mathbb{P}(X_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty) = 1$ si $\mathbb{E}(U_0) < 1$.

Exercice 3 (File d'attente $G/D/1$)

On étudie une file d'attente à un guichet où le temps de service d'un client est constant et pris comme unité de temps. On note V_n le nombre de clients arrivant pendant la n^{e} période de temps et on suppose la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ indépendante équidistribuée de loi donnée par $\mathbb{P}(V_0 = j) = b_j$, $j \in \mathbb{N}$, $b_0, b_1, b_2 > 0$. Un client arrivant dans cette période de temps ne peut être servi avant l'instant $n + 1$, même si personne ne se trouvait au guichet quand il est arrivé. On note X_n le nombre de clients dans la file d'attente à l'instant n et l'on suppose X_0 indépendant de la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Exprimer X_{n+1} en fonction de X_n et V_n ; en déduire que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov et écrire sa matrice de transition.
2. (a) Montrer que $X_n = X_0 + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} V_k - n + \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_{\{X_k = 0\}}$.
   (b) En déduire, en utilisant la loi des grands nombres, que la v.a. $N_0 = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{X_n=0\}}$ est p.s. infinie si $\mathbb{E}(V_0) < 1$, puis que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est récurrente dans ce cas.
   En fait, la chaîne est récurrente-positive. On désigne par π la loi stationnaire ; π vérifie le système
$$(S) \qquad \pi_j = \pi_0 b_j + \sum_{i=1}^{j+1} \pi_i b_{j-i+1},\ j \geqslant 0.$$

(c) En multipliant j^{e} équation de (S) par j puis en sommant les équations ainsi obtenues, calculer π_0. Que représente π_0 ?

(d) En multipliant la j^{e} équation de (S) par j^2 puis en sommant les équations ainsi obtenues, calculer $\sum_{j=0}^{+\infty} j\pi_j$. Que représente cette somme ?

3. En observant que $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^+ \geqslant x$, montrer que $X_n \geqslant X_0 + \sum_{k=0}^{n-1} V_k - n$. En déduire, en utilisant de nouveau la loi des grands nombres, que $\mathbb{P}(X_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty) = 1$ si $\mathbb{E}(V_0) > 1$.
4. Cas particulier : on suppose qu'il peut arriver 0, 1 ou 2 personnes avec les probabilités respectives $q(1-\alpha)$, α et $p(1-\alpha)$ où p, q, $\alpha \in]0,1[$ et $p + q = 1$. Étudier la chaîne $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 4 (Marches aléatoires absorbantes sur $\{0, 1, \ldots, N\}$ et sur $\mathbb{N}$)

Soit $p \in]0,1[$ et $q = 1 - p$. On considère la marche aléatoire absorbante $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\{0, 1, \ldots, N\}$ ayant pour matrice de transition

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les états 0 et N sont absorbants.

1. On se propose d'évaluer

$$\begin{cases} u_i = f_{i0}^* = \mathbb{P}_i(\exists n \in \mathbb{N}^* : X_n = 0) = \mathbb{P}_i(\tau_0 < +\infty) \\ v_i = f_{iN}^* = \mathbb{P}_i(\exists n \in \mathbb{N}^* : X_n = N) = \mathbb{P}_i(\tau_N < +\infty) \end{cases},$$

probabilités d'absorption dans les états 0 et N, avec $\tau_0 = \min\{n \in \mathbb{N} : X_n = 0\}$ et $\tau_N = \min\{n \in \mathbb{N} : X_n = N\}$. On pose également

$$\begin{cases} u_i^{(n)} = f_{i0}^{(n)} = \mathbb{P}_i(\tau_0 = n) \\ v_i^{(n)} = f_{iN}^{(n)} = \mathbb{P}_i(\tau_N = n). \end{cases}$$

(a) Expliquer pourquoi on a $u_i = \mathbb{P}_i(\tau_0 < \tau_N)$.

(b) Calculer $u_i^{(1)}$.

(c) Prouver la relation de récurrence $u_i^{(n)} = \sum_{j=1}^{N-1} p_{ij} u_j^{(n-1)}$, $i = 1, 2, \ldots, N-1$, $n \geqslant 2$ (conditionner par X_1).

(d) En déduire la relation suivante : $u_i = u_i^{(1)} + \sum_{j=1}^{N-1} p_{ij} u_j$, $i = 1, 2, \ldots, N-1$.

(e) Résoudre le système précédent dans le cas présent. On trouve $u_i = \dfrac{\rho^i - \rho^N}{1 - \rho^N}$ si $\rho = \dfrac{q}{p} \neq 1$ et $u_i = \dfrac{N - i}{N}$ si $p = q = \frac{1}{2}$. Écrire de même v_i en remarquant que $v_i = 1 - u_i$.

2. On se propose de calculer le temps moyen d'absorption de la marche : $w_i = \mathbb{E}_i[\min(\tau_0, \tau_N)]$.

(a) Montrer que $w_i = p_{i0} + p_{iN} + \sum_{j=1}^{N-1} p_{ij}(w_j + 1)$ pour $i = 1, 2, \ldots, N-1$.

(b) Résoudre le système précédent. On trouve $w_i = \dfrac{i}{q-p} - \dfrac{N}{q-p} \dfrac{1-\rho^i}{1-\rho^N}$ si $\rho \neq 1$ et $w_i = i(N-i)$ si $p = q = \frac{1}{2}$.

3. Étudier le cas de la marche aléatoire absorbante sur $\mathbb{N}$ en faisant $N \to +\infty$.