Chaînes de Markov à temps discret (suite)

Ex1 (processus de naissance-mort discret)

1 a) soit $i \in]a,b[$. $u_i = \mathbb{P}_i(\tau_a < \tau_b) = \sum_{j=a}^{b} p_{ij}\, \mathbb{P}(\tau_a < \tau_b \mid X_1 = j) = p_{i\,i-1} u_{i-1} + p_{ii} u_i + p_{i\,i+1} u_{i+1}$

$$= q_i u_{i-1} + (1-p_i-q_i) u_i + p_i u_{i+1}$$

$$\Rightarrow u_{j+1} - u_j = \frac{q_j}{p_j}(u_j - u_{j-1}) = \dots = \frac{q_j q_{j-1} \cdots q_{a+1}}{p_j p_{j-1} \cdots p_{a+1}}(u_{a+1} - u_a) = \frac{\gamma_j}{\gamma_a}(u_{a+1} - u_a).$$

b) $u_a = 1,\ u_b = 0 \Rightarrow \sum_{j=a}^{b-1}(u_{j+1} - u_j) = u_b - u_a = -1 = \frac{1}{\gamma_a} \sum_{j=a}^{b-1} \gamma_j \cdot (u_{a+1} - u_a)$ → vrai pour $j \in [a, b-1]$

d'où $u_{a+1} - u_a = -\frac{\gamma_a}{\sum_{j=a}^{b-1} \gamma_j}$ et $u_{j+1} - u_j = -\frac{\gamma_j}{\sum_{i=a}^{b-1} \gamma_i}$ puis $u_j = -\sum_{i=j}^{b-1}(u_{i+1} - u_i)$

$$\to \boxed{u_j = \frac{\sum_{i=j}^{b-1} \gamma_i}{\sum_{i=a}^{b-1} \gamma_i}} \quad a \le j \le b \quad \text{avec } \sum_{i=b}^{b-1} = 0.$$

c) si $p_i = q_i$, $\gamma_i = 1$, $\boxed{u_j = \frac{b-j}{b-a}}$

2 a) $a = 0,\ b = n$: $\mathbb{P}_1(\tau_0 < \tau_n) = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i}{\sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mathbb{P}_1(\tau_0 < +\infty) = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i}{\sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i} = 1 - \frac{1}{\sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i}$

$\Rightarrow \boxed{\mathbb{P}_1(\tau_0 = +\infty) = \frac{1}{\sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i}}$. Plus généralement $\boxed{\mathbb{P}_j(\tau_0 = +\infty) = \frac{\sum_{i=0}^{j-1} \gamma_i}{\sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i}}$.

b) La chaîne est irréductible donc soit récurrente, soit transitoire.

Si elle est récurrente, $f^*_{10} = \mathbb{P}_1\{\tau_0 < +\infty\} = 1$ et donc $\sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i = +\infty$.

Si $\sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i = +\infty$, alors $f^*_{10} = 1 - \frac{1}{\sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i} = 1$. Montrons que $f^*_{00} = \mathbb{P}_0(T_0 < \infty) = 1$ aussi.
avec $T_0 = \min\{n \in \mathbb{N}^* : X_n = 0\}$

$$f^*_{00} = \mathbb{P}_0(T_0 = 1) + \mathbb{P}_0(X_1 = 1, T_0 < \infty) = r_0 + p_0 \underbrace{\mathbb{P}_1(T_0 < \infty)}_{f^*_{10} = 1} = r_0 + p_0 = 1.$$

Donc 0 est récurrent ainsi que la chaîne.

c) π probabilité invariante $\iff \pi = \pi P \iff \begin{cases} \pi_0 = \pi_0 \underbrace{r_0}_{1-p_0} + \pi_1 q_1 \\ \pi_j = \pi_{j-1} p_{j-1} + \pi_j \underbrace{r_j}_{1-p_j-q_j} + \pi_{j+1} q_{j+1}, \quad j \ge 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \pi_1 = \frac{p_0}{q_1} \pi_0 \\ q_{j+1} \pi_{j+1} - p_j \pi_j = q_j \pi_j - p_{j-1} \pi_{j-1}, \quad j \ge 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow q_j \pi_j - p_{j-1} \pi_{j-1} = c^{te} = q_1 \pi_1 - p_0 \pi_0 = 0$$

$$\Rightarrow \pi_j = \frac{p_{j-1}}{q_j} \pi_{j-1} = \dots = \frac{p_{j-1} p_{j-2} \cdots p_1}{q_j q_{j-1} \cdots q_2} \pi_1 = \frac{p_{j-1} p_{j-2} \cdots p_0}{q_j q_{j-1} \cdots q_1} \pi_0 = \frac{p_0}{p_j \gamma_j} \pi_0$$

$$\exists \pi_0 > 0 \,/\, \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1 \iff \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{p_j \gamma_j} < \infty$$

En résumé : si $\sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j < \infty$, la chaîne est transitoire (en fait $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ p.s.)

si $\sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j = \infty$:
- si $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{p_j \gamma_j} = \infty$, la chaîne est récurrente nulle
- si $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{p_j \gamma_j} < \infty$, la chaîne est récurrente positive et $\pi_j = \dfrac{\frac{1}{p_j\gamma_j}}{\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{p_i \gamma_i}}$.

d) $p_i = p$, $q_i = 1-p$, $r_i = 0$, $i \geq 1$. $\gamma_j = \left(\frac{q}{p}\right)^j$

$$\begin{cases} \text{si } q<p, & \text{la chaîne est transitoire} \\ \text{si } q=p, & \text{la chaîne est récurrente nulle} \\ \text{si } q>p, & \text{la chaîne est récurrente positive} \\ & \text{et } \pi_j = \left(1-\frac{p}{q}\right)\left(\frac{p}{q}\right)^j,\ j \geq 0. \end{cases}$$

Ex 2 : (file D/G/1)

X_n : nombre de personnes en attente devant un guichet, le débit d'arrivée étant régulier : 1 personne arrive à chaque instant $n \in \mathbb{N}$.
U_n : nombre de personnes qui sont servies pendant le laps de temps $[n, n+1[$.

1) $X_{n+1} = \begin{cases} X_n + 1 - U_n & \text{si } U_n \leq X_n + 1 \\ 0 & \text{si } U_n > X_n + 1 \end{cases}$

2) $X_{n+1} = \varphi(X_n, U_n)$
avec $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i.i.d, indépendantes de X_0
$\Rightarrow (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ chaîne de Markov homogène

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = \mathbb{P}\left((i+1-U_n)^+ = j\right) = \mathbb{P}(U_n = i-j+1 \text{ et } 0 \leq U_n \leq i+1) + \mathbb{P}(j=0 \text{ et } U_n > i+1)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } j > i+1 \\ a_{i-j+1} & \text{si } 1 \leq j \leq i+1 \\ \alpha_i = \sum_{k=i+1}^{\infty} a_k & \text{si } j = 0 \end{cases} \qquad P = \begin{pmatrix} \alpha_0 & a_0 & 0 & 0 & \cdots \\ \alpha_1 & a_1 & a_0 & 0 & \cdots \\ \alpha_2 & a_2 & a_1 & a_0 & \ddots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

$\alpha_i = \sum_{k=i+1}^{\infty} a_k = \mathbb{P}(U_0 > i)$

3) Comme $\forall k \in \mathbb{N}$, $a_k > 0$, tout a_i mène à a_0 et $a_0 \to a_1 \to \cdots \to a_i$.
La chaîne est donc irréductible.

<u>On suppose $\mathbb{E}(U_0) > 1$.</u> On cherche une loi stationnaire de la forme $\pi_j = c\,d^j$.

$$\pi = \pi P \Rightarrow \begin{cases} j=0 : & 1 = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i d^i \\ \forall j \geq 1 : & d^j = \sum_{i=j-1}^{\infty} a_{i-j+1} d^i = \sum_{i=0}^{\infty} a_i d^{i+j-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{i=0}^{\infty} a_i d^i = d \\ \text{et } \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i d^i = 1 \end{cases}$$

Si la première équation est vérifiée, la deuxième aussi : $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i d^i = \sum_{i=0}^{\infty} d^i \sum_{j=i+1}^{\infty} a_j = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \sum_{i=0}^{j-1} d^i$
$= \frac{1}{1-d} \sum_{j=1 \text{ ou } 0}^{\infty} (1-d^j) a_j = \frac{1}{1-d}\Big(1 - \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} d^j a_j}_{d}\Big) = 1.$

Soit $f(d) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j d^j - d$. On a $f(0) = a_0$, $f(1) = 0$

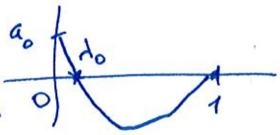
$f'(1) = \sum_{j=0}^{\infty} j a_j - 1 = \mathbb{E}(U_0) - 1 > 0$

$f'' > 0$ car tous les $a_j > 0 \Rightarrow f$ convexe

$\Rightarrow \exists!\, d_0 \in]0,1[\ / \ f(d_0) = 0.$

d	0	d_0	1
f'			$+$
f	a_0	$\searrow 0 \searrow$	$\nearrow 0$

$$\Rightarrow \boxed{\pi_j = (1-d_0)\, d_0^{\,j}, \ j \geq 0}$$



4) $x^+ \geq x \Rightarrow X_{n+1} \geq X_n + 1 - U_n \Rightarrow X_n \geq X_0 + n\left[1 - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} U_k\right]$

or $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} U_k \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}(U_0)$ p.s. (L.G.N) donc <u>si</u> $\mathbb{E}(U_0) < 1$, $1 - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} U_k \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 - \mathbb{E}(U_0) > 0$ p.s

d'où $X_n \xrightarrow{} +\infty$ p.s. (si $\mathbb{E}(U_0) = 1$, en utilisant la LLI - raffinement de LGN - on prouve la récurrence nulle) ex 3 : (file G/D/1)

1) $\boxed{X_{n+1} = V_n + (X_n - 1)^+}$ En effet : • si à l'instant n, il n'y a pas de queue ($X_n = 0$), alors il n'y a pas de service, et V_n personnes arrivent pendant $]n, n+1]$ d'où $X_{n+1} = V_n$.

• si à l'instant n, il y a une file d'attente ($X_n \geq 1$), alors un client se fait servir durant $[n, n+1[$ et $(X_n - 1) + V_n$ feront la queue à l'instant $n+1$, soit $X_{n+1} = (X_n - 1) + V_n$.

$X_{n+1} = \varphi(X_n, V_n)$ avec $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ iid, indépendante de X_0 $\Rightarrow$ $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ chaîne de Markov homogène

$$p_{ij} = \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = \mathbb{P}(V_n = j - (i-1)^+) = \begin{cases} b_j & \text{si } i = 0 \\ b_{j-i+1} & \text{si } i \geq 1 \end{cases} \qquad P = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \cdots \\ b_0 & b_1 & b_2 & \cdots \\ 0 & b_0 & b_1 & \\ 0 & 0 & b_0 & \ddots \\ \vdots & \vdots & & \ddots \end{bmatrix}$$

si $b_0, b_1, b_2 > 0$ alors $0 \to 1 \to 2 \to 3 \to \cdots$

et $i \to i-1 \to \cdots \to 0$

$\Rightarrow$ la chaîne est irréductible.

2) Soit $N_0 = \text{card}\{n \in \mathbb{N} : X_n = 0\} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_n = 0\}}$.

a) $X_n = V_{n-1} + \underbrace{X_{n-1}\mathbb{1}_{\{X_{n-1} \geq 1\}}}_{X_{n-1} - 1 + \mathbb{1}_{\{X_{n-1} = 0\}}} = \cdots = X_0 + \sum_{k=0}^{n-1} V_k - n + \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_{\{X_k = 0\}} = X_0 + n\left[\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} V_k - 1\right] + \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_{\{X_k = 0\}}$

b) Supposons $E(V_0) < 1$: LGN $\Rightarrow$ $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} V_k \xrightarrow[n \to \infty]{} E(V_0)$ p.s.

Or $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n \geq 0$ donc nécessairement $\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_{\{X_k = 0\}} \xrightarrow[n \to \infty]{} N_0 = \infty$ p.s. (sinon $X_n \xrightarrow[n \to \infty]{} -\infty$)

D'où $E_0(N_0) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{00}^{(n)} = +\infty$ et la chaîne est récurrente.

On admet qu'elle est récurrente positive. Soit π sa loi stationnaire. $\pi = \pi P$

$\Rightarrow \pi_j = \pi_0 b_j + \sum_{i=1}^{j+1} \pi_i b_{j-i+1}$

c) $\sum_{j=0}^{\infty} j\pi_j = \pi_0 \sum_{j=0}^{\infty} j b_j + \sum_{j=0}^{\infty} j \sum_{i=1}^{j+1} \pi_i b_{j-i+1} = \pi_0 E(V_0) + \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i \underbrace{\sum_{j=i-1}^{\infty} j\, b_{j-i+1}}_{\sum_{j=0}^{\infty}(j+i-1) b_j = E(V_0) + i - 1} = \pi_0 E(V_0) + (E(V_0) - 1)(1 - \pi_0) + \sum_{i=1 \text{ ou } 0}^{\infty} i\pi_i$

d'où $\pi_0 + E(V_0) - 1 = 0$ $\Rightarrow$ $\boxed{\pi_0 = 1 - E(V_0)} = \mathbb{P}(X_\infty = 0)$ queue vide

d) $\sum_{j=0}^{\infty} j^2 \pi_j = \pi_0 \sum_{j=0}^{\infty} j^2 b_j + \sum_{j=0}^{\infty} j^2 \sum_{i=1}^{j+1} \pi_i b_{j-i+1} = \pi_0 E(V_0^2) + \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i \underbrace{\sum_{j=i-1}^{\infty} j^2 b_{j-i+1}}_{\sum_{j=0}^{\infty}(i + (j-1))^2 b_j = i^2 + 2i(E V_0 - 1) + E(V_0 - 1)^2}$

d'où $\pi_0 E(V_0^2) + E(V_0 - 1)^2 (1 - \pi_0) + 2(E(V_0) - 1)\sum_{i=1}^{\infty} i\pi_i = 0$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} i\pi_i = \frac{1}{2(1 - E(V_0))}\left[(1 - E(V_0))E(V_0^2) + E(V_0)\, E(V_0 - 1)^2\right] = \boxed{E(V_0) + \frac{1}{2}\frac{E(V_0^2) - E(V_0)}{1 - E(V_0)}} = E(X_\infty)$

longueur moyenne de la queue

3) $x^+ \geq x \Rightarrow X_n \geq X_{n-1} + V_{n-1} - 1 \Rightarrow X_n \geq X_0 + \sum_{k=0}^{n-1} V_k - n$.

Si $E(V_0) > 1$, $\frac{1}{n}\left(\sum_{k=0}^{n-1} V_k - n\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} E(V_0) - 1 > 0$ $\Rightarrow$ $\boxed{X_n \xrightarrow[n \to \infty]{} +\infty \text{ p.s.}}$

complément à 2) c) : fonction génératrice de la loi stationnaire $G_\pi(z)=\sum_j \pi_j z^j$.

On a $G_\pi(z)=\pi_0\sum_{j=0}^\infty b_j z^j+\sum_{j=0}^\infty z^j\sum_{i=1}^{j+1}\pi_i b_{j-i+1}=\pi_0 G_{V_0}(z)+\sum_{i=1}^\infty \pi_i \underbrace{\sum_{j=i-1}^\infty b_{j-i+1} z^j}_{z^{i-1}\sum_{j=0}^\infty b_j z^j}$

$=\pi_0 G_{V_0}(z)+\frac{1}{z}G_{V_0}(z)\underbrace{\sum_{i=1}^\infty \pi_i z^i}_{G_\pi(z)-\pi_0}$

$\Rightarrow [z-G_B(z)]\,G_\pi(z)=\pi_0 G_{V_0}(z)(z-1)$ d'où $\boxed{G_\pi(z)=[1-E(V_0)](z-1)\dfrac{G_{V_0}(z)}{z-G_{V_0}(z)}}$

4) cas $b_0=q(1-\alpha)$, $b_1=\alpha$, $b_2=p(1-\alpha)$

$$P=\begin{pmatrix} q(1-\alpha) & \alpha & p(1-\alpha) & 0 & \cdots \\ q(1-\alpha) & \alpha & p(1-\alpha) & 0 & \cdots \\ 0 & q(1-\alpha) & \alpha & p(1-\alpha) & \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \vdots & & & \end{pmatrix}$$

$b_0,b_1,b_2>0 \Rightarrow$ chaîne irréductible.

$E(V_0)=b_1+2b_2=\alpha+2(1-\alpha)p=\alpha(1-2p)+2p$

$E(V_0)<1 \iff (1-2p)\underbrace{(1-\alpha)}_{>0}>0 \iff p<\frac12$

Donc $\begin{cases} p<\frac12 : \text{récurrente positive} \\ p=\frac12 : \text{récurrente nulle} \\ p>\frac12 : \text{transitoire}\end{cases}$

complément : loi stationnaire : $\begin{cases}\pi_0=q(1-\alpha)\pi_0+q(1-\alpha)\pi_1 \\ \pi_1=\alpha\pi_0+\alpha\pi_1+q(1-\alpha)\pi_2 \\ \pi_2=p(1-\alpha)\pi_0+p(1-\alpha)\pi_1+\alpha\pi_2+q(1-\alpha)\pi_3 \\ \pi_j=p(1-\alpha)\pi_{j-1}+\alpha\pi_j+q(1-\alpha)\pi_{j+1}\ ,\ j\geq 3\end{cases}$

autre méthode :

$q\pi_{j+1}-p\pi_j=q\pi_j-p\pi_{j-1}, j\geq 3$

d'où $q\pi_{j+1}-p\pi_j=q\pi_3-p\pi_2=\underbrace{\frac{p^2}{q^2(1-\alpha)}\pi_0-\frac{p^2}{q^2(1-\alpha)}\pi_0}_{=0}$

$\Rightarrow \pi_j=\left(\frac pq\right)^{j-2}\pi_2\ , j\geq 2$

$=\frac{\pi_0}{p(1-\alpha)}\left(\frac pq\right)^j$

$\Rightarrow \pi_j=p\pi_{j-1}+q\pi_{j+1} \Rightarrow q(\pi_{j+1}-\pi_j)=p(\pi_j-\pi_{j-1}),\ j\geq 3$

d'où $\pi_{j+1}-\pi_j=\left(\frac pq\right)^{j-2}(\pi_3-\pi_2)$.

D'autre part, $\begin{cases}\pi_1=\dfrac{p+q\alpha}{q(1-\alpha)}\pi_0 \\ \pi_2=\dfrac{1}{q(1-\alpha)}[(1-\alpha)\pi_1-\alpha\pi_0]=\boxed{\dfrac{p}{q^2(1-\alpha)}\pi_0} \\ \pi_3=\frac1q[\pi_2-p(\pi_0+\pi_1)]=\frac{\pi_0}{q}\left[\dfrac{p}{q^2(1-\alpha)}-p\underbrace{\left(1+\dfrac{p+q\alpha}{q(1-\alpha)}\right)}_{\frac{1}{q(1-\alpha)}}\right]=\dfrac{p^2}{q^3(1-\alpha)}\pi_0\end{cases}$

$\pi_0+\pi_1=\dfrac{1}{q(1-\alpha)}\pi_0$

$\Rightarrow \pi_3-\pi_2=\dfrac{p}{q^3}\,\dfrac{p-q}{1-\alpha}\pi_0$

On a $\pi_j-\pi_{j-1}=\left(\frac pq\right)^{j-3}(\pi_3-\pi_2),\ j\geq 4$ donc $\pi_j-\pi_3=(\pi_3-\pi_2)\sum_{k=4}^j\left(\frac pq\right)^{k-3}=(\pi_3-\pi_2)\frac pq\dfrac{1-\left(\frac pq\right)^{j-3}}{1-\frac pq}$

$\Rightarrow \pi_j=\pi_0\dfrac{p^2}{q^3(1-\alpha)}-\pi_0\dfrac{p^2}{q^3(1-\alpha)}\left[1-\left(\frac pq\right)^{j-3}\right]=\boxed{\pi_0\dfrac{1}{p(1-\alpha)}\left(\frac pq\right)^j,\ j\geq 3}$ (même pour $j=2$)

Enfin $\sum_{j=0}^\infty \pi_j=1 \Rightarrow \pi_0=\dfrac{1}{\dfrac{1}{q^2(1-\alpha)}+\dfrac{p^3}{q^2(q-p)}}=\boxed{\dfrac{q^2(q-p)(1-\alpha)}{q-p+p^3(1-\alpha)}}$

$\pi_0+\pi_1+\pi_2=\dfrac{1}{q^2(1-\alpha)}\pi_0$

ex 4 (marches aléatoires absorbantes sur $\{0,1,\dots,N\}$ et sur $\mathbb{N}$)

1 a) On a $u_i = P_i(\tau_0 < \infty) = P_i(\tau_0 < \tau_N)$ car $\{1,2,\dots,N-1\}$ est transitoire, $\{1\},\{N\}$ absorbants

b) $u_i^{(1)} = P_i(\tau_0 = 1) = P_i(X_1 = 0) = p_{i0} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=0 \\ q & \text{si } i=1 \\ 0 & \text{si } i \geq 2 \end{cases}$

c) $u_i^{(n)} = P_i(\tau_0 = n) = \sum_{j=1}^{N} P_i(X_1 = j, \tau_0 = n) = \sum_{j=1}^{N} p_{ij} P_j(\tau_0 = n-1) = \sum_{j=1}^{N-1} p_{ij} \underbrace{u_j^{(n-1)}}_{0 \text{ si } j=N}$ pour $2 \leq i \leq N-1$, $n \geq 2$

d) $u_i = P_i(\tau_0 < \infty) = \sum_{n=1}^{\infty} u_i^{(n)} \Rightarrow u_i = u_i^{(1)} + \sum_{j=1}^{N-1} p_{ij} \sum_{n=2}^{\infty} u_j^{(n-1)} = u_i^{(1)} + \sum_{j=1}^{N-1} p_{ij} u_j$, $1 \leq i \leq N-1$

e) $\begin{cases} u_1^{(1)} = q \\ u_i^{(1)} = 0 & \text{si } i \geq 1 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} u_1 = q + p u_2 \\ u_i = q u_{i-1} + p u_{i+1}, & 2 \leq i \leq N-2 \\ u_{N-1} = q u_{N-2} \end{cases}$

$\Rightarrow \underline{u_i = A + B\left(\frac{q}{p}\right)^i}$ $\quad 1 \leq i \leq N-1 \quad$ si $p \neq q$

$u_1 = q + p u_2 \Rightarrow A + B\frac{q}{p} = q + Ap + B\frac{q^2}{p}$

$\Rightarrow (1-p)A + \frac{q(1-q)}{p} B = q$

$\Rightarrow A + B = 1$

$u_{N-1} = q u_{N-2} \Rightarrow A + B\left(\frac{q}{p}\right)^{N-1} = Aq + B\left(\frac{q}{p}\right)^{N-2} q$

$\Rightarrow \underbrace{(1-q)}_{p} A + \left(\frac{q}{p}\right)^{N-1} \underbrace{(1-p)}_{q} B = 0$

$\Rightarrow A = -\left(\frac{q}{p}\right)^N B$

$B = \frac{1}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N} \qquad A = -\frac{\left(\frac{q}{p}\right)^N}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N}$

$\underline{u_i = A + Bi}$ si $p = q = \frac{1}{2}$

$u_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} u_2$

$\Rightarrow A + B = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}A + B$

$\Rightarrow A = 1$

$u_{N-1} = \frac{1}{2} u_{N-2} \Rightarrow A + (N-1)B = \frac{1}{2} + \frac{N-2}{2} B$

$\Rightarrow A + NB = 0$

$\Rightarrow B = -\frac{1}{N} A = -\frac{1}{N}$

$\boxed{u_i = \frac{N-i}{N}} \qquad v_i = \frac{i}{N}.$

cf ex 1 (processus de naissance-mort général)

$u_i = \frac{\sum_{k=i}^{N-1} \gamma_k}{\sum_{k=0}^{N-1} \gamma_k}$ avec $\gamma_k = \left(\frac{q}{p}\right)^k \to \boxed{u_i = \frac{\rho^N - \rho^i}{\rho^N - 1}} \qquad \rho = \frac{q}{p}, \quad v_i = 1 - u_i = \frac{\rho^i - 1}{\rho^N - 1}$

si $j \neq 0, N$: $\tau_{0N} = \min\{m \geq 0 : X_{m+1} \in \{0,N\}\} + 1 = \tilde{\tau}_{0N} + 1$ avec $X_{m+1} = X_1 + \tilde{X}_m$

2 a) $w_i = E_i(\underbrace{\tau_0 \wedge \tau_N}_{\tau_{0N}})$ $\qquad w_i = \sum_{j=0}^{N} E_i(\tau_{0N} \mathbb{1}_{\{X_1 = j\}}) = \sum_{j=0}^{N} p_{ij} E(\tau_{0N} \mid X_1 = j) = p_{i0} + p_{iN} + \sum_{j=1}^{N-1} p_{ij}(w_j + 1)$

$E(\tau_{0N} \mid X_1 = j) = \begin{cases} 1 + \tau_{0N} \circ \theta_1 & \text{sur } \{\tau_{0N} \geq 1\} \\ 1 & \text{si } j = 0 \text{ ou } N \end{cases}$

$\begin{cases} \text{si } i = 1 : & w_1 = p_{10} + p_{12} E_2(\tau_{0N} + 1) = p w_2 + 1 \\ \text{si } 2 \leq i \leq N-2 : & w_i = p_{i\,i+1} E_{i+1}(\tau_{0N} + 1) + p_{i\,i-1} E_{i-1}(\tau_{0N} + 1) = p w_{i+1} + q w_{i-1} + 1 \\ \text{si } i = N-1 : & w_{N-1} = p_{N-1\,N-2} E_{N-2}(\tau_{0N} + 1) + p_{N-1\,N} = q w_{N-2} + 1 \end{cases}$

b) $\underline{p \neq q}$. On a pour $2 \leq i \leq N-1$, $p(w_{i+1} - w_i) = q(w_i - w_{i-1}) - 1 \Rightarrow w_{i+1} - w_i + \frac{1}{p-q} = \left(\frac{q}{p}\right)^{i-1}\left(w_2 - w_1 + \frac{1}{p-q}\right)$

$\Rightarrow w_i = \frac{i}{q-p} + A + B\left(\frac{q}{p}\right)^i$

$w_1 = p w_2 + 1 \Rightarrow \frac{1}{q-p} + A + B\frac{q}{p} = \frac{2p}{q-p} + Ap + B\frac{q^2}{p} + 1 \Rightarrow A + B = 0$

$w_{N-1} = q w_{N-2} + 1 \Rightarrow \frac{N-1}{q-p} + A + B\left(\frac{q}{p}\right)^{N-1} = \frac{(N-2)q}{q-p} + Aq + B\left(\frac{q}{p}\right)^{N-2} q + 1 \Rightarrow Ap + B\left(\frac{q}{p}\right)^{N-1} q = 1 + \frac{p-q-Np}{q-p} = -\frac{Np}{q-p}$

$\Rightarrow A + B\left(\frac{q}{p}\right)^N = -\frac{N}{q-p}$ $\quad$ d'où $B = -A = \frac{\frac{N}{q-p}}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N}$

$w_i = \frac{i}{q-p} + A + B + B\left[\left(\frac{q}{p}\right)^i - 1\right] = \boxed{\frac{i}{q-p} - \frac{N}{q-p} \frac{1-\rho^i}{1-\rho^N}}$

$\underline{p=q=\frac{1}{2}}$. $w_{i+1}-w_i = (w_i - w_{i-1}) - 2 \Rightarrow w_{i+1}-w_i = -2(i-1) + (w_2 - w_1)$

$\Rightarrow w_i = -i^2 + Ai + B$

$w_1 = \frac{1}{2}w_2 + 1 \Rightarrow A+B-1 = -2+A+\frac{1}{2}B+1 \Rightarrow B=0$

$w_{N-1} = \frac{1}{2}w_{N-2}+1 \Rightarrow -(N-1)^2 + A(N-1) + B = -\frac{1}{2}(N-2)^2 + \frac{1}{2}A(N-2) + \frac{B}{2}+1$

$\Rightarrow \frac{N}{2}A = -\frac{1}{2}N^2 + 2N - 2 + N^2 - 2N + 1 + 1 = \frac{N^2}{2}$

$\Rightarrow A = N$ $\boxed{w_i = i(N-i)}$

3. $N \to +\infty$: si $\rho < 1$, $\begin{cases} u_i = \mathbb{P}_i(\tau_0 < \infty) = \left(\frac{p}{q}\right)^i \\ v_i = \mathbb{P}_i(\tau_0 = \infty) = 1 - \left(\frac{p}{q}\right)^i \end{cases}$

si $\rho \geq 1$, $u_i = 1$, $v_i = 0$.

si $\rho \leq 1$, $w_i = E_i(\tau_0) = +\infty$

si $\rho > 1$, $w_i = \frac{i}{q-p}$.

Compléments sur les marches aléatoires

ex : (marche symétrique sur $\mathbb{Z}$)

1) a) $p_{00}^{(2n)} = \mathbb{P}(n \text{ pas à gauche et } n \text{ pas à droite}) = C_{2n}^n p^n (1-p)^n = \boxed{\frac{C_{2n}^n}{2^{2n}}}$ $(p=\frac{1}{2})$

b) avec Stirling, $C_{2n}^n \sim \frac{\sqrt{2\pi}\,(2n)^{2n+\frac{1}{2}} e^{-2n}}{(\sqrt{2\pi}\ n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n})^2} = \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$, $\boxed{p_{00}^{(2n)} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}}$

$\sum_{n=0}^{\infty} p_{00}^{(2n)} = \infty \Rightarrow 0$ récurrent or la chaîne est irréductible, donc récurrente.

2) a) si $i \leq j$, $p_{ij}^{(2n)} = \mathbb{P}(X_n = j \mid X_0 = i) = \sum_{(k,\ell) : \begin{cases} k+\ell = n \\ k-\ell = j-i \end{cases}} \mathbb{P}(k \text{ pas vers la droite et } \ell \text{ pas vers la gauche})$ $\Rightarrow k = \frac{n+j-i}{2}$

$= C_n^k p^k (1-p)^\ell$ avec $\begin{cases} k = \frac{n+j-i}{2} \\ \ell = n-k \end{cases}$

$= C_n^{\frac{n+j-i}{2}} p^{\frac{n+j-i}{2}} (1-p)^{\frac{n+i-j}{2}}$

$= \boxed{\frac{C_n^{\frac{n+j-i}{2}}}{2^n}}$ $(p = \frac{1}{2})$ pour $i+j$ de même parité que n et $|i-j| \leq n$

b) $\mathbb{P}_0(X_{2n} \geq 0) = \sum_{j=0}^{\infty} p_{0j}^{(2n)} = \sum_{k=0}^{n} p_{0\,2k}^{(2n)} = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{n} C_{2n}^{n+k}$ or $\sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k = 2^{2n}$

et $\sum_{k=0}^{n} C_{2n}^k = \sum_{k=n}^{2n} C_{2n}^k = \sum_{k=0}^{n} C_{2n}^{n+k}$ donc $\sum_{k=0}^{n} C_{2n}^{n+k} = \frac{1}{2}\times(2^{2n} + C_{2n}^n) = 2^{2n-1} + \frac{C_{2n}^n}{2}$

d'où $\boxed{\mathbb{P}_0(X_{2n} \geq 0) = \frac{1}{2} + \frac{C_{2n}^n}{2^{2n+1}}}$

3) Lemme : $\boxed{\mathbb{P}_0(X_1, \dots, X_{2n} > 0) = \frac{1}{2}\mathbb{P}_0(X_{2n} = 0)}$

En effet : $\mathbb{P}_0(X_1, \dots, X_{2n} > 0) = \sum_{j=1}^{\infty\,(\text{ou } n)} \mathbb{P}_0(\underbrace{X_1}_{X_1=1}, \dots, X_{2n-1} > 0, X_{2n} = 2j)$ (X_{2n} est pair sous $\mathbb{P}_0$)

$= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}_1(\underbrace{X_1, \dots, X_{2n-2} > 0}_{\iff \tau_0 > 2n-2}, X_{2n-1} = 2j)$

$= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty} [\mathbb{P}_1(X_{2n-1} = 2j) - \mathbb{P}_1(\tau_0 \leq 2n-2, X_{2n-1} = 2j)]$

$= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty} [\mathbb{P}_1(X_{2n-1} = 2j) - \sum_{k=1}^{2n-2} \underbrace{\mathbb{P}_1(\tau_0 = k)} \mathbb{P}_0(X_{2n-1-k} = 2j)]$

$\mathbb{P}_1(X_1, \dots, X_{k-1} > 0, X_k = 0)$

$= \mathbb{P}_{-1}(X_1, \dots, X_{k-1} < 0, X_k = 0)$ (réflexion)

$= \mathbb{P}_{-1}(\tau_0 = k)$

$$\mathbb{P}_0(X_1,\dots,X_{2n}>0)=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\Big[\mathbb{P}_1(X_{2n-1}=2j)-\sum_{k=1}^{2n-2}\mathbb{P}_{-1}(\tau_0=k)\,\mathbb{P}_0(X_{2n-1-k}=2j)\Big]$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\Big[\mathbb{P}_1(X_{2n-1}=2j)-\mathbb{P}_{-1}(\underbrace{\tau_0\le 2n-2}_{\text{redondant car } X_0=-1<0<X_{2n-1}=2j},\,X_{2n-1}=2j)\Big]$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\Big[\mathbb{P}_1(X_{2n-1}=2j)-\mathbb{P}_{-1}(X_{2n-1}=2j)\Big]$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\Big[\mathbb{P}_1(X_{2n-1}=2j)-\mathbb{P}_1(X_{2n-1}=2j+2)\Big]$$

$$=\frac{1}{2}\mathbb{P}_1(X_{2n-1}=2)=\frac{1}{2}\mathbb{P}_0(X_{2n-1}=1)=\frac{1}{2}\mathbb{P}_0(X_{2n}=0)$$

car $\mathbb{P}_0(X_{2n}=0)=\mathbb{P}_0(X_1=1)\,\mathbb{P}_1(X_{2n-1}=0)+\mathbb{P}_0(X_1=-1)\,\mathbb{P}_{-1}(X_{2n-1}=0)$

$$=\frac{1}{2}\underbrace{\mathbb{P}_0(X_{2n-1}=-1)}_{\mathbb{P}_0(X_{2n-1}=1)\ (\text{symétrie})}+\frac{1}{2}\mathbb{P}_0(X_{2n-1}=1)=\mathbb{P}_0(X_{2n-1}=1).\quad\square$$

Alors $\mathbb{P}_0(\tau_0>2n)=\mathbb{P}_0(X_1,\dots,X_{2n}\neq 0)=2\,\mathbb{P}_0(X_1,\dots,X_{2n}>0)=\mathbb{P}_0(X_{2n}=0)=p_{00}^{(2n)}$

d'où $E(\tau_0)=\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}_0(\tau_0>2n)=\sum_{n=0}^{\infty}p_{00}^{(2n)}=+\infty \implies 0$ état <u>récurrent nul</u>.

ex : (marches réfléchies sur $\{0,\dots,N\}$ et sur $\mathbb{N}$)

1) a) La chaîne est irréductible et finie donc récurrente-positive

π loi stationnaire $\iff \pi=\pi P \iff \begin{cases}\pi_0=q\pi_1\\ \pi_1=\pi_0+q\pi_2\\ \pi_j=p\pi_{j-1}+q\pi_{j+1}, & 2\le j\le N-2\\ \pi_{N-1}=p\pi_{N-2}+\pi_N\\ \pi_N=p\pi_{N-1}\end{cases}$

$\implies \pi_{j+1}-\pi_j=\frac{p}{q}(\pi_j-\pi_{j-1})=\dots=\left(\frac{p}{q}\right)^{j-1}(\pi_2-\pi_1)$, $\quad 2\le j\le N-2$

autre méthode :

$q\pi_{j+1}-p\pi_j=q\pi_j-p\pi_{j-1}, j\ge 2$

$=q\pi_2-p\pi_1$

$=(\pi_1-\pi_0)-p\pi_1$

$=\underbrace{(1-p)}_{q}\pi_1-\pi_0$

$=0$

$\Rightarrow \pi_j=\left(\frac{p}{q}\right)^{j-2}\pi_2$

$$\pi_j=\pi_2+(\pi_2-\pi_1)\sum_{i=2}^{j-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{i-1}=\begin{cases}\pi_2+(\pi_2-\pi_1)\,\dfrac{p}{q}\,\dfrac{1-\left(\frac{p}{q}\right)^{j-2}}{1-\frac{p}{q}} & \text{si } p\neq q\\[2mm] \pi_2+(j-2)(\pi_2-\pi_1) & \text{si } p=q=\frac{1}{2}\end{cases}\qquad 3\le j\le N-1$$

or $\pi_1=\frac{1}{q}\pi_0$ et $\pi_2=\frac{1}{q}(\pi_1-\underbrace{\pi_0}_{=q\pi_1})=\frac{p}{q}\pi_1=\frac{p\pi_0}{q^2}\Rightarrow \pi_2-\pi_1=\frac{p-q}{q^2}\pi_0$

d'où si $p\neq q$: $\pi_j=\pi_0\left[\frac{p}{q^2}-\frac{p}{q^2}\left(1-\left(\frac{p}{q}\right)^{j-2}\right)\right]=\boxed{\frac{\pi_0}{p}\left(\frac{p}{q}\right)^j}$ vrai aussi pour $j=1,2$.

donc $1\le j\le N-1$

$\pi_N=p\pi_{N-1}=\pi_0\left(\frac{p}{q}\right)^{N-1}$

Enfin $\sum_{j=0}^{N}\pi_j=1 \implies \pi_0\left[1+\frac{1}{p}\sum_{j=1}^{N-1}\left(\frac{p}{q}\right)^j+\left(\frac{p}{q}\right)^{N-1}\right]=1$

$$\implies \pi_0\left[1+\frac{1-\left(\frac{p}{q}\right)^{N-1}}{q-p}+\left(\frac{p}{q}\right)^{N-1}\right]=1$$

$$\implies \pi_0\,\frac{\overbrace{(q-p+1)}^{2q}+\overbrace{(q-p-1)}^{-2p}\left(\frac{p}{q}\right)^{N-1}}{q-p}=1$$

$$\implies 2\pi_0\,\frac{1-\left(\frac{p}{q}\right)^N}{1-\frac{p}{q}}=1 \implies \boxed{\pi_0=\frac{1-\frac{p}{q}}{2\left(1-\left(\frac{p}{q}\right)^N\right)}}.$$

Ainsi
$$\boxed{\begin{cases} \pi_0 = \frac{1}{2}\,\frac{1-\rho}{1-\rho^N} & \rho = \frac{p}{q} \\ \pi_j = \frac{1}{2p}\,\frac{1-\rho}{1-\rho^N}\,\rho^j & , 1 \le j \le N-1 \\ \pi_N = \frac{1}{2}\,\frac{1-\rho}{1-\rho^N}\,\rho^{N-1} & \end{cases}}$$

si $p = q = \frac{1}{2}$: $\begin{cases} \pi_2 - \pi_1 = 0 \text{ donc } \pi_j = \pi_2 \text{ pour } 3 \le j \le N-1 \text{ , vrai aussi pour 2 !} \\ \pi_2 = \pi_1 = 2\pi_0 \\ \pi_N = \frac{1}{2}\pi_{N-1} = \frac{1}{2}\pi_{N-2} \end{cases}$

d'où $\boxed{\begin{cases} \pi_0 = \pi_N = \frac{1}{2N} \\ \pi_j = \frac{1}{N} \; , 1 \le j \le N-1 \end{cases}}$

b) temps moyen entre 2 visites consécutives de l'état 0 : $\nu_{00} = \mathbb{E}_0(\tau_0) = \frac{1}{\pi_0} = \begin{cases} 2\,\frac{1-\rho^N}{1-\rho} & \text{si } \rho \ne 1 \\ 2N & \text{si } \rho = 1 \end{cases}$

2) On fait $N \to +\infty$. Si $\underline{\rho < 1}$ i.e. $p < q$: $\begin{cases} \pi_0 = \frac{q-p}{2q} = \frac{1}{2}(1-\rho) > 0 \\ \pi_j = \frac{1}{2p}(1-\rho)\rho^j > 0 \; , \; j \ge 1 \end{cases}$

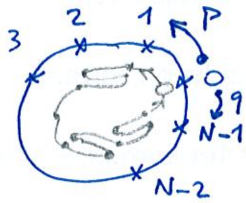
$\to$ la chaîne est récurrente-positive

$\nu_{jj} = \mathbb{E}_j(\tau_j) = \frac{1}{\pi_j}$, $\mathbb{E}_0(\tau_0) = \frac{2}{1-\rho}$

si $\underline{\rho = 1}$ i.e. $p = q = \frac{1}{2}$: $\pi_j = 0$, $j \ge 0 \to$ récurrente-nulle (LLI)

si $\underline{\rho > 1}$ i.e. $p > q$: $\pi_j = 0$, $j \ge 0$. En fait $X_n \xrightarrow[n \to \infty]{} +\infty$ p.s. (LGN)

Ex: (marche cyclique)



$E = \{0, 1, \dots, N-1\}$ chaîne irréductible finie

$\tau_0 = \min\{n \in \mathbb{N}^* : X_n = 0\}$

$u = \mathbb{P}_0(\text{tour complet}) = \mathbb{P}_0(X_1 \ne X_{\tau_0 - 1})$.

1) $u = \mathbb{P}_0(X_1 \ne X_{\tau_0-1}) = \underbrace{\mathbb{P}_0(X_1 = 1, X_{\tau_0-1} = N-1)}_{v} + \underbrace{\mathbb{P}_0(X_1 = N-1, X_{\tau_0-1} = 1)}_{w}$

$$v = p\,\mathbb{P}_1(X_{\tau_0-1} = N-1) = p \sum_{k=2}^{\infty} \mathbb{P}_1(X_1, \dots, X_{k-2} \ne 0, X_{k-1} = N-1, X_k = 0)$$

$$= p \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{i_1, \dots, i_{k-2} \ne 0} p_{1 i_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{k-2}\, N-1} \underbrace{p_{N-1,0}}_{p}$$

or $p_{ij} = \left(\frac{p}{q}\right)^{j-i} p_{ji}$ donc $v = p^2 \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{i_1, \dots, i_{k-2} \ne 0} \left(\frac{p}{q}\right)^{(i_1 - 1) + (i_2 - i_1) + \cdots + (N-1-i_{k-2})} p_{N-1\, i_{k-2}} p_{i_{k-2} i_{k-3}} \cdots p_{i_2 i_1} p_{i_1 1}$

$$= \frac{p^N}{q^{N-2}} \sum_{k=2}^{\infty} \mathbb{P}_{N-1}(X_1, \dots, X_{k-2} \ne 0, X_{k-1} = 1)$$

$$= \left(\frac{p}{q}\right)^N \sum_{k=2}^{\infty} \underbrace{q}_{\mathbb{P}_0(X_1 = N-1)} \mathbb{P}_{N-1}(X_1, \dots, X_{k-2} \ne 0, X_{k-1} = 1) \underbrace{q}_{\mathbb{P}(X_k = 0 \mid X_{k-1} = 1)}$$

$$= \left(\frac{p}{q}\right)^N \mathbb{P}_0(X_1 = N-1) \sum_{k=2}^{\infty} \mathbb{P}_{N-1}(X_{k-1} = 1, \tau_0 = k)$$

$$= \left(\frac{p}{q}\right)^N \mathbb{P}_0(X_1 = N-1)\,\mathbb{P}_{N-1}(X_{\tau_0-1} = 1) = \left(\frac{p}{q}\right)^N \mathbb{P}_0(X_1 = N-1, X_{\tau_0-1} = 1)$$

$\Rightarrow \boxed{v = \left(\frac{p}{q}\right)^N w}$

2) $p - v = \mathbb{P}_0(X_1 = 1) - \mathbb{P}_0(X_1 = 1, X_{\tau_0 - 1} = N-1) = \mathbb{P}_0(X_1 = 1, X_{\tau_0-1} \neq N-1) = \mathbb{P}_0(X_1 = 1, X_{\tau_0 - 1} = 1) = v'$

de même $q - w = w'$. Donc si on montre que $v' = w'$ alors $\boxed{v - w = p - q}$.

$$v' = p\,\mathbb{P}_1(X_{\tau_0-1} = 1) = p \sum_{k=2}^{\infty} \mathbb{P}_1(X_1, \dots, X_{k-2} \neq 0, X_{k-1} = 1, X_k = 0)$$

$$= p\left(\sum_{k=2}^{\infty} \sum_{i_1,\dots,i_{k-2} \in \{1,2,\dots,N-1\}} p_{1i_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{k-2}1}\right) q$$

$$= p\left[\sum_{k=2}^{\infty} \sum_{i_1 \cdots i_{k-2} \in \{1,2,\dots,N-1\}} p_{\underbrace{N-i_1}_{j_{k-2}}\, N-1}\; p_{\underbrace{N-i_2}_{j_{k-3}}\, \underbrace{N-i_1}_{j_{k-2}}} \cdots p_{N-1\, \underbrace{N-i_{k-2}}_{j_1}}\right] q$$

$$= p\left[\sum_{k=2}^{\infty} \sum_{j_1 \cdots j_{k-2} \in \{1,2,\dots,N-1\}} p_{N-1\, j_1} p_{j_1 j_2} \cdots p_{j_{k-2}\, N-1}\right] q$$

$\mathbb{P}_{N-1}(X_1 = 0) = \mathbb{P}(X_k = 0 \mid X_{k-1} = N-1)$ avec $j_\alpha = N - i_{k-\alpha-1} \in \{1, \dots, N-1\}$, $1 \leq \alpha \leq k-2$

$$= \underbrace{q}_{\mathbb{P}_0(X_1 = N-1)} \sum_{k=2}^{\infty} \mathbb{P}_{N-1}(X_1, \dots, X_{k-2} \neq 0, X_{k-1} = N-1, X_k = 0)$$

$= w'$.

3) D'où

$$\begin{cases} v = \left(\frac{p}{q}\right)^N w \\ v - w = p - q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = \dfrac{(p-q)\left(\frac{p}{q}\right)^N}{\left(\frac{p}{q}\right)^N - 1} = \dfrac{(p-q)\,p^N}{p^N - q^N} \\ w = \dfrac{p-q}{\left(\frac{p}{q}\right)^N - 1} = \dfrac{(p-q)\,q^N}{p^N - q^N} \end{cases} \quad \text{si } p \neq q$$

$$\Rightarrow \boxed{u = v + w = \frac{(p-q)(p^N + q^N)}{p^N - q^N}}$$

4) cas $p = q = \frac{1}{2}$.

a) $v_i = \mathbb{P}_i(X_{\tau_0 - 1} = N-1) = \mathbb{P}_i(X_1 = i-1, X_{\tau_0-1} = N-1) + \mathbb{P}_i(X_1 = i+1, X_{\tau_0-1} = N-1)$

$= \mathbb{P}_i(X_1 = i-1)\,\mathbb{P}_{i-1}(X_{\tau_0-1} = N-1) + \mathbb{P}_i(X_1 = i+1)\,\mathbb{P}_{i+1}(X_{\tau_0-1} = N-1)$

$= \frac{1}{2}(v_{i-1} + v_{i+1})$ pour $2 \leq i \leq N-2$

$i = 1$: $v_1 = \mathbb{P}_1(X_{\tau_0-1} = N-1) = \mathbb{P}_1(X_1 = 2, X_{\tau_0-1} = N-1) = \mathbb{P}_1(X_1 = 2)\,\mathbb{P}_2(X_{\tau_0-1} = N-1)$

$= \frac{1}{2} v_2$

$i = N-1$: $v_{N-1} = \mathbb{P}_{N-1}(X_{\tau_0-1} = N-1) = \mathbb{P}_{N-1}(X_1 = N-2, X_{\tau_0-1} = N-1) + \mathbb{P}_{N-1}(\underset{\Downarrow\; \tau_0 = 1}{X_1 = 0})$

$= \frac{1}{2} v_{N-2} + \frac{1}{2}$

D'où $v_{i+1} - v_i = v_i - v_{i-1} = \cdots = v_2 - v_1 = v_1$

$\Rightarrow v_i = i\, v_1$, $1 \leq i \leq N-1$.

donc $v_{N-1} = (N-1) v_1$, $v_{N-2} = (N-2) v_1$. Or $v_{N-1} = \frac{1}{2} v_{N-2} + \frac{1}{2}$ donc $(N-1) v_1 = \frac{1}{2}(N-2) v_1 + \frac{1}{2}$

d'où $\frac{N}{2} v_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{v_1 = \frac{1}{N}}$.

b) $v = \mathbb{P}_0(X_1 = 1, X_{\tau_0 - 1} = N-1) = \frac{1}{2}\mathbb{P}_1(X_{\tau_0-1} = N-1) = \frac{1}{2} v_1 = \frac{1}{2N} = w$ (d'après 1.)

et alors $\boxed{u = v + w = \frac{1}{N}}$.

complément : comportement asymptotique

$$P=\begin{pmatrix} 0 & p & 0 & 0 & \cdots & q \\ q & 0 & p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q & 0 & p & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ p & 0 & 0 & \cdots & q & 0 \end{pmatrix} = pJ+qK \quad \text{où} \quad J=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et } K={}^tJ=J^{N-1}=J^{-1}, \quad J^N=I$$

$$P^n=(pJ+qJ^{-1})^n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} J^{2k-n} \qquad \text{or } (J^k)_{ij}=(\delta_{i,j-k})_{0\le i,j\le N-1} \ (\text{mod. } N)$$

$$\Rightarrow p_{ij}^{(n)}=\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} \underbrace{\delta_{i,j+n-2k}}_{=\begin{cases}1 \text{ si } k=\frac{j-i+n}{2} \ (\text{mod } \frac{N}{2}) \\ 0 \text{ sinon}\end{cases}}$$

$$=\begin{cases} \displaystyle\sum_{\ell=[(i-j-n)/N]}^{[(i-j+n)/N]} C_n^{\frac{j-i+n}{2}+\frac{\ell N}{2}}\, p^{\frac{j-i+n}{2}+\frac{\ell N}{2}}\, q^{\frac{i-j+n}{2}-\frac{\ell N}{2}} & \text{pour } i+j \text{ de même parité que } n \text{ ou } n+N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$i,j\in\{0,1,\dots,N-1\}$ (convention $C_\alpha^\beta=0$ si $\alpha\notin\mathbb{N}$ ou $\alpha>\beta$)

→ difficile de calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_{ij}^{(n)}$!

$$P^n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} J^{2k-n}=\sum_{\ell=0}^{N-1}\Big(\sum_{\substack{0\le k\le n\\ 2k-n\in \ell+N\mathbb{Z}}} C_n^k p^k q^{n-k}\Big) J^\ell \qquad \text{puisque } J^N=I$$

$$=\sum_{\ell=0}^{N-1}\alpha_\ell^{(n)} J^\ell \quad \text{avec} \quad \alpha_\ell^{(n)}=\sum_{\substack{j:\ n+\ell+jN \text{ pair}\\ |\ell+jN|\le n}} C_n^{\frac{n+\ell+jN}{2}}\, p^{\frac{n+\ell+jN}{2}}\, q^{\frac{n-\ell-jN}{2}}$$

On a $$\sum_{\ell=0}^{N-1}\alpha_\ell^{(n)}=\sum_{\ell=0}^{N-1}\Big(\sum_{\substack{0\le k\le n\\ 2k-n\in\ell+N\mathbb{Z}}} C_n^k p^k q^{n-k}\Big)=\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k}=(p+q)^n=1$$

et en posant $\omega=e^{i\frac{2\pi}{N}}$:
$$\sum_{\ell=0}^{N-1}\alpha_\ell^{(n)}\omega^{j\ell}=\sum_{\ell=0}^{N-1}\Big(\sum_{\substack{0\le k\le n\\ 2k-n\in\ell+N\mathbb{Z}}} C_n^k p^k q^{n-k}\Big)\underbrace{\omega^{j\ell}}_{\omega^{j(2k-n+mN)}} \quad \forall m\in\mathbb{Z}\ (\omega^N=1)$$
$$=\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k}\omega^{j(2k-n)}$$
$$=\omega^{-jn}(p\,\omega^{2j}+q)^n \qquad 1\le j\le N-1$$

remarque : c'est une matrice circulaire

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & \cdots & & a_{n-1} & a_0 \end{vmatrix}=\prod_{k=0}^{n-1}\Big(\sum_{\ell=0}^{n-1}a_\ell\,\omega^{k\ell}\Big), \quad \omega=e^{i2\pi/n}$$

→ $\det(P-\lambda I)=\prod_{k=0}^{n-1}(p\omega^k+q\omega^{-k}-\lambda)$

v.p. : $p\omega^k+q\omega^{-k}=\cos\frac{2k\pi}{n}+(p-q)\,i\sin\frac{2k\pi}{n}$, $0\le k\le n-1$

vecteurs propres : $V_k=\begin{pmatrix}1\\ \omega^k\\ \omega^{2k}\\ \vdots\\ \omega^{(n-1)k}\end{pmatrix}$

or $|pe^{i\theta}+q|=\sqrt{(p\cos\theta+q)^2+(p\sin\theta)^2}=\sqrt{p^2+q^2+2pq\cos\theta}<\sqrt{(p+q)^2}=1$ si $\theta\in]0,2\pi[$

donc $(p\omega^{2j}+q)^n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ pour $1\le j\le N-1$ et N impair (donc $j\ne\frac{N}{2}$) → chaîne apériodique

Ainsi $(\alpha_0^{(\infty)},\dots,\alpha_{N-1}^{(\infty)})$ vérifie le système de Cramer
$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{\ell=0}^{N-1}\alpha_\ell^{(\infty)}=1\\ \displaystyle\sum_{\ell=0}^{N-1}\alpha_\ell^{(\infty)}\omega^{j\ell}=0, \quad 1\le j\le N-1\end{cases}$$

dont la solution est $(\frac{1}{N},\frac{1}{N},\dots,\frac{1}{N})$ (puisque $\sum_{\ell=0}^{N-1}\omega^{j\ell}=0 \ \forall j\in\mathbb{Z}\setminus N\mathbb{Z}$)

Finalement : $$\boxed{P^n\xrightarrow[n\to\infty]{}\sum_{\ell=0}^{N-1}\frac{1}{N}J^\ell=\frac{1}{N}\begin{pmatrix}1&\cdots&1\\ \vdots & & \vdots\\ 1&\cdots&1\end{pmatrix}}$$ pour N impair. $(\frac{1}{N},\dots,\frac{1}{N})$ loi stationnaire uniforme sur $\{0,1,\dots,N-1\}$.

Si N est pair la chaîne est 2-périodique, donc considérer P^{2n} et P^{2n+1}.

Exemple d'application (exo Degrave ex 8 p 56 et ex 221 p 61)

1) Trois enfants A, B, C jouent à la balle. A a la balle au début du jeu. Lorsque A a la balle, il l'envoie à B avec probabilité p et C avec probabilité q

lorsque B a la balle, il l'envoie à C avec probabilité p et A avec probabilité q

lorsque C a la balle, il l'envoie à A avec probabilité p et B avec probabilité q

avec $p+q=1$, $p\in]0,1[$.

Soient $p_n (q_n, r_n)$ la probabilité qu'à l'issue du n^e lancer, A (B, C) ait la balle.

Calculer p_n, q_n, r_n ainsi que leur limite lorsque $n\to+\infty$.

2) Reprendre le problème avec : • si A a la balle, il l'envoie à B avec probabilité $\frac{3}{4}$ et C " $\frac{1}{4}$

• si B " , " à A " $\frac{3}{4}$ et C " $\frac{1}{4}$

• si C " , " toujours à B.

Solution : 1) Soit $A_n = \{A \text{ a la balle après le } n^e \text{ lancer}\}$, B_n et C_n idem.

$$P(A_{n+1}) = \underbrace{P(A_{n+1}|A_n)}_{0} P(A_n) + \underbrace{P(A_{n+1}|B_n)}_{q} P(B_n) + \underbrace{P(A_{n+1}|C_n)}_{p} P(C_n)$$

$\Rightarrow p_{n+1} = q\,q_n + p\,r_n$

De même : $q_{n+1} = q\,r_n + p\,p_n$ soit $\begin{pmatrix} p_{n+1}\\ q_{n+1}\\ r_{n+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & q & p\\ p & 0 & q\\ q & p & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_n\\ q_n\\ r_n\end{pmatrix} = {}^tP\begin{pmatrix} p_n\\ q_n\\ r_n\end{pmatrix}$

$r_{n+1} = q\,p_n + p\,q_n$

polynôme caract. : $\Delta_P(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda pq + (p^3+q^3) = (1-\lambda)(\lambda^2+\lambda+\underbrace{p^3+q^3}_{1-3pq})$ v.p. 1, $\frac{-1\pm i\sqrt{3(1-4pq)}}{2} = \lambda^{\pm}$ ($pq\leq\frac{1}{4}$)

module : 1, $\sqrt{1-3pq}<1$ ($p,q\neq 0$)

diagonalisation : ${}^tP = QDQ^{-1}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & a^+ & a^-\\ 1 & \underset{a^-}{-1-a^+} & \underset{a^+}{-1-a^-}\end{pmatrix}$ avec $\begin{cases} a^+ = \frac{\lambda^+ + p}{q-p}, & a^- = \frac{\lambda^- + p}{q-p}\\ -1-a^+ = -\frac{\lambda^+ + q}{q-p}, & -1-a^- = -\frac{\lambda^- + q}{q-p}\end{cases}$

$Q^{-1} = \frac{1}{3(a^+-a^-)}\begin{pmatrix} a^+-a^- & a^+-a^- & a^+-a^-\\ -2a^--1 & a^-+2 & a^--1\\ \underset{q\pm a^-}{2a^++1} & -a^+-2 & 1-a^+\end{pmatrix}$ et $\begin{cases} a^+ + a^- = -1\\ a^+a^- = 1-4pq\end{cases}$

$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda^+ & 0\\ 0 & 0 & \lambda^-\end{pmatrix}$

e.g. vecteur propre associé à λ^+
$$\begin{cases} -\lambda^+ x + qy + pz = 0\\ px - \lambda^+ y + qz = 0\\ qx + py - \lambda^+ z = 0\end{cases}$$
$\Rightarrow \underbrace{(p+q-\lambda^+)}_{1-\lambda^+\neq 0}(x+y+z) = 0$

$\Rightarrow z = -x-y$ et $(p+\lambda^+)x - (q-p)y = 0$

$$\Rightarrow {}^tP^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+\lambda^{+n}+\lambda^{-n} & 1+\frac{a^-+2}{a^+-a^-}\lambda^{+n} - \frac{a^++2}{a^+-a^-}\lambda^{-n} & 1+\frac{a^--1}{a^+-a^-}\lambda^{+n} - \frac{a^+-1}{a^+-a^-}\lambda^{-n}\\ 1+a^+\lambda^{+n}+a^-\lambda^{-n} & 1+\frac{a^+(a^-+2)}{a^+-a^-}\lambda^{+n} - \frac{a^-(a^++2)}{a^+-a^-}\lambda^{-n} & 1+\frac{a^+(a^--1)}{a^+-a^-}\lambda^{+n} - \frac{a^-(a^+-1)}{a^+-a^-}\lambda^{-n}\\ 1+a^-\lambda^{+n}+a^+\lambda^{-n} & 1+\frac{a^-(a^-+2)}{a^+-a^-}\lambda^{+n} - \frac{a^+(a^++2)}{a^+-a^-}\lambda^{-n} & 1+\frac{a^-(a^--1)}{a^+-a^-}\lambda^{+n} - \frac{a^-(a^--1)}{a^+-a^-}\lambda^{-n}\end{pmatrix} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} p_n\\ q_n\\ r_n\end{pmatrix} = {}^tP^n\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix} = 1^{\text{ère}}$ colonne de $P^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{pmatrix} 1/3\\ 1/3\\ 1/3\end{pmatrix}$

sans diagonalisation : ${}^tP = pJ + qK$ avec $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix} = J^2 = J^{-1}$

${}^tP^n = (pI+qJ)^n J^n = (\alpha_n I + \beta_n J + \gamma_n J^2)J^n$ avec $\begin{cases} \alpha_n = \sum_k C_n^{3k} p^{n-3k} q^{3k}\\ \beta_n = \sum_k C_n^{3k+1} p^{n-3k-1} q^{3k+1}\\ \gamma_n = \sum_k C_n^{3k+2} p^{n-3k-2} q^{3k+2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_n+\beta_n+\gamma_n = 1\\ \alpha_n + j\beta_n + j^2\gamma_n = (p+qj)^n \to 0\\ \alpha_n + j^2\beta_n + j\gamma_n = (p+qj^2)^n \to 0\end{cases}$

$\Rightarrow \alpha_n, \beta_n, \gamma_n \to 1/3$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} p_n\\ q_n\\ r_n\end{pmatrix} = J^n\begin{pmatrix} \alpha_n\\ \beta_n\\ \gamma_n\end{pmatrix} \to \lim_{n\to\infty} J^n \begin{pmatrix} 1/3\\ 1/3\\ 1/3\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1/3\\ 1/3\\ 1/3\end{pmatrix}}.$

$\left(|p+qj| = \sqrt{(p-\frac{q}{2})^2 + \frac{3}{4}q^2} = \sqrt{1-3pq} < 1\right)$

2) Idem avec ${}^tP = \begin{pmatrix} 0 & 3/4 & 0\\ 3/4 & 0 & 1\\ 1/4 & 1/4 & 0\end{pmatrix} = QDQ^{-1}$, $Q = \begin{pmatrix} 12 & 3 & 1\\ 16 & -1 & -1\\ 7 & -2 & 0\end{pmatrix}$, $Q^{-1} = \frac{1}{70}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2\\ 7 & 7 & -28\\ 25 & -45 & 60\end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & -1/4 & 0\\ 0 & 0 & -3/4\end{pmatrix}$

${}^tP^n = QD^nQ^{-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} Q\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}Q^{-1} = \frac{1}{70}\begin{pmatrix} 12\\ 16\\ 7\end{pmatrix}(2\ 2\ 2) = \frac{1}{35}\begin{pmatrix} 12 & 12 & 12\\ 16 & 16 & 16\\ 7 & 7 & 7\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} p_n\\ q_n\\ r_n\end{pmatrix} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{35}\begin{pmatrix} 12\\ 16\\ 7\end{pmatrix}.$

Complément : 1^{er} temps d'atteinte de 0 : $\tau_0 = \min\{n\in\mathbb{N}^* : X_n = 0\}$.

Les voisins de 0 sont 1 et N-1.

Posons $r_{ij} = \mathbb{P}_i\{\tau_0 = j\}$.

- Pour $j\geq 2$, et $i\neq 1, i\neq N-1$ $\quad r_{i,j} = \mathbb{P}_i\{X_1 = i+1\}\,\mathbb{P}_{i+1}\{\tau_0 = j-1\} + \mathbb{P}_i\{X_1 = i-1\}\,\mathbb{P}_{i-1}\{\tau_0 = j-1\}$
$$= p\,r_{i+1,j-1} + q\,r_{i-1,j-1}$$
- Pour $j\geq 2$, et $i=1$ $\quad r_{1,j} = \mathbb{P}_1\{X_1 = 2\}\,\mathbb{P}_2\{\tau_0 = j-1\} = p\,r_{2,j-1}$ (si $X_1 = 0$, $\tau_0 = 1$ et on ne peut pas avoir $\tau_0 = j$)

ou $i = N-1$ $\quad r_{N-1,j} = \mathbb{P}_{N-1}\{X_1 = N-2\}\,\mathbb{P}_{N-2}\{\tau_0 = j-1\} = q\,r_{N-2,j-1}$
- Pour $j=1$, $\quad r_{i,1} = \mathbb{P}_i\{\tau_0 = 1\} = \begin{cases} 0 & \text{si } i\neq 1, N-1 \\ q & \text{si } i = 1 \\ p & \text{si } i = N-1 \end{cases}$

Fonction génératrice de τ_0 : pour $i\neq 1$ et $N-1$,
$$\mathbb{E}_i(\sigma^{\tau_0}) = \sum_{j=1}^{\infty} r_{ij}\sigma^j = \underbrace{r_{i,1}}_{0}\sigma + \sum_{j=2}^{\infty}(p\,r_{i+1,j-1} + q\,r_{i-1,j-1})\sigma^j$$
$$= p\sigma\sum_{j=1}^{\infty} r_{i+1,j}\sigma^j + q\sigma\sum_{j=1}^{\infty} r_{i-1,j}\sigma^j$$
$$= p\sigma\,\mathbb{E}_{i+1}(\sigma^{\tau_0}) + q\sigma\,\mathbb{E}_{i-1}(\sigma^{\tau_0})$$

pour $i=1$: $\quad \mathbb{E}_1(\sigma^{\tau_0}) = \underbrace{r_{1,1}}_{q}\sigma + \sum_{j=2}^{\infty} p\,r_{2,j-1}\sigma^j$
$$= p\sigma\,\mathbb{E}_2(\sigma^{\tau_0}) + q\sigma$$

pour $i = N-1$: $\quad \mathbb{E}_{N-1}(\sigma^{\tau_0}) = \underbrace{r_{N-1,1}}_{p}\sigma + \sum_{j=2}^{\infty} q\,r_{N-2,j-1}\sigma^j$
$$= p\sigma + q\sigma\,\mathbb{E}_{N-1}(\sigma^{\tau_0}).$$

On écrit tout ceci matriciellement : posons $G_{\tau_0}(\sigma) = \begin{pmatrix}\mathbb{E}_0(\sigma^{\tau_0}) \\ \mathbb{E}_1(\sigma^{\tau_0}) \\ \vdots \\ \mathbb{E}_{N-1}(\sigma^{\tau_0})\end{pmatrix}$, $C = \left.\begin{pmatrix} 0 \\ q \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ p\end{pmatrix}\right\}N$

et $$\tilde{P} = P - \left.\begin{pmatrix} 0 & \\ q & \\ 0 & \\ \vdots & \underbrace{\quad 0 \quad}_{N-1} \\ 0 & \\ p & \end{pmatrix}\right\}N = \begin{pmatrix} 0 & p & 0 & 0 & 0 & \cdots & q \\ 0 & 0 & p & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & p & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \ddots & p \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & & q & 0 \end{pmatrix}.$$

On a $G_{\tau_0}(\sigma) = \sigma\tilde{P}G_{\tau_0}(\sigma) + \sigma C \implies \boxed{G_{\tau_0}(\sigma) = \sigma\,(I_N - \sigma\tilde{P})^{-1}C}$

Pour avoir seulement la fonction génératrice du premier instant de retour en 0 i.e. $\mathbb{E}_0(\sigma^{\tau_0})$, on a seulement besoin du 1^{er} terme de la matrice-colonne $G_{\tau_0}(\sigma)$:
$$\mathbb{E}_0(\sigma^{\tau_0}) = \sigma\,\underbrace{(1\,0\cdots 0)}_{N}(I_N - \sigma\tilde{P})^{-1}C.$$

$(1\,0\cdots 0)(I_N - \sigma\tilde{P})^{-1} = (g_{00}\,g_1\cdots g_{N-1})$ est la première ligne (ligne n°0) de $(I_N - \sigma\tilde{P})^{-1}$

et $(1\,0\cdots 0)(I_N - \sigma\tilde{P})^{-1}C = q\,g_1 + p\,g_{N-1}$. On a donc besoin de g_1 et g_{N-1}.

$$I_N - v\tilde{P} = \begin{pmatrix} 1 & -pv & 0 & 0 & \cdots & -qv \\ 0 & 1 & -pv & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -qv & 1 & -pv & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 & -pv \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -qv & 1 \end{pmatrix}$$ → matrice $N \times N$

$a_{0,1}$ et $a_{0,N-1}$ sont les termes n°1 et n°N-1 colonne n°0 de la matrice des cofacteurs de $I_N - v\tilde{P}$ divisés par le déterminant.

$$\Delta = \det(I_N - v\tilde{P}) = \begin{vmatrix} 1 & -pv & 0 & \cdots & 0 \\ -qv & 1 & -pv & \ddots & 0 \\ 0 & -qv & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & -pv \\ 0 & 0 & \cdots & -qv & 1 \end{vmatrix}$$ → $(N-1)\times(N-1)$ dét. tridiagonal

Lemme : Soit $D_n = \begin{vmatrix} a & c & 0 & \cdots & 0 \\ b & a & c & \ddots & 0 \\ 0 & b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a & c \\ 0 & 0 & \cdots & b & a \end{vmatrix}$ et $r_\pm = \dfrac{a \pm \sqrt{a^2 - 4bc}}{2}$.

dét $n \times n$

On a $\boxed{D_n = \dfrac{r_+^{n+1} - r_-^{n+1}}{\sqrt{a^2-4bc}}}$ (on suppose $a^2 \neq 4bc$)

dém : on écrit une récurrence $D_n = a \underbrace{\begin{vmatrix} a & c & \cdots & 0 \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & a & c \\ 0 & \cdots & b & a \end{vmatrix}}_{(n-1)\times(n-1)} - b \underbrace{\begin{vmatrix} c & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b & a & c & \cdots & 0 \\ 0 & b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a & c \\ 0 & \cdots & & b & a \end{vmatrix}}_{(n-1)\times(n-1)}$

(développement p/r 1ère col)

$$= a D_{n-1} - bc D_{n-2}$$

avec $D_1 = a$, $D_2 = a^2 - bc$. Soient $r_\pm$ les solutions de $r^2 - ar + bc = 0$.

$\Rightarrow D_n = \lambda r_+^n + \mu r_-^n$ avec $\begin{cases} \lambda r_+ + \mu r_- = a \\ \lambda \underbrace{r_+^2}_{ar_+ - bc} + \mu \underbrace{r_-^2}_{ar_- - bc} = a^2 - bc \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ \lambda r_+ + \mu r_- = a \end{cases}$

$\Rightarrow \lambda = \dfrac{a - r_-}{r_+ - r_-} = \dfrac{r_+}{\sqrt{a^2-4bc}}$, $\mu = \dfrac{r_+ - a}{r_+ - r_-} = -\dfrac{r_-}{\sqrt{a^2-4bc}}$

d'où $D_n = \dfrac{r_+^{n+1} - r_-^{n+1}}{r_+ - r_-}$. $\square$

Donc $\Delta = \dfrac{r_+(v)^N - r_-(v)^N}{r_+(v) - r_-(v)}$ avec $r_\pm(v) = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4pqv^2}}{2}$, $r_+(u) - r_-(u) = \sqrt{1-4pqv^2}$

$$* \quad a_{0,1} = -\frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} -pv & 0 & 0 & \cdots & -qv \\ -qv & 1 & -pv & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & -pv \\ 0 & \cdots & & -qv & 1 \end{vmatrix}_{(N-1)\times(N-1)}$$

$$= \frac{1}{\Delta}\left[pv \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -pv & & 0 \\ -qv & 1 & \ddots & \\ & \ddots & 1 & -pv \\ 0 & & -qv & 1 \end{vmatrix}}_{\to (N-2)\times(N-2)} + (-1)^N qv \underbrace{\begin{vmatrix} -qv & 1 & -pv & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & -pv \\ 0 & & \ddots & 1 \\ & & & -qv \end{vmatrix}}_{\to (N-2)\times(N-2)} \right]$$

$$= \frac{1}{\Delta}\left[pv \, \frac{r_+(v)^{N-1} - r_-(v)^{N-1}}{r_+(v) - r_-(v)} + (qv)^{N-1} \right]$$

$$* \quad a_{0,N-1} = \frac{(-1)^{N-1}}{\Delta} \begin{vmatrix} -pv & 0 & \cdots & -qv \\ 1 & -pv & & 0 \\ -qv & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & -qv \;\; 1 & -pv \end{vmatrix}_{(N-1)\times(N-1)}$$

$$= \frac{(-1)^{N-1}}{\Delta}\left[(-pv) \underbrace{\begin{vmatrix} -pv & & 0 \\ 1 & \ddots & \\ -qv & \ddots & \\ 0 & -qv \;\; 1 & -pv \end{vmatrix}}_{\to (N-2)\times(N-2)} + (-1)^{N-1} qv \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -pv & & 0 \\ -qv & 1 & \ddots & \\ & \ddots & 1 & -pv \\ 0 & & -qv & 1 \end{vmatrix}}_{\to (N-2)\times(N-2)} \right]$$

$$= \frac{1}{\Delta}\left[qv \, \frac{r_+(v)^{N-1} - r_-(v)^{N-1}}{r_+(v) - r_-(v)} + (pv)^{N-1} \right]$$

$$* \quad q a_{0,1} + p a_{0,N-1} = \frac{1}{\Delta}\left[2pq v \, \frac{r_+(v)^{N-1} - r_-(v)^{N-1}}{r_+(v) - r_-(v)} + (p^N + q^N) v^{N-1} \right]$$

d'où
$$\boxed{E_0(v^{\tau_0}) = 2pq v^2 \, \frac{r_+(v)^{N-1} - r_-(v)^{N-1}}{r_+(v)^N - r_-(v)^N} + (p^N + q^N) v^N \, \frac{r_+(v) - r_-(v)}{r_+(v)^N - r_-(v)^N}}$$

En fait on aurait pu utiliser le résultat plus général suivant : $a_{0,i}$ est le terme n° i de la colonne n° 0 de la matrice des cofacteurs de $I_N - v\tilde{P}$ divisé par Δ.

$$a_i = \frac{1}{\Delta} \begin{array}{|cccccccc|l} -pv & 0 & 0 & & & & & -qv & \\ 1 & -pv & 0 & & & 0 & & & \\ -qv & 1 & -pv & & & & & & \Big\} \; i \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & \\ 0 & & -qv & 1 & -pv & & & & \\ \hline & & & -qv & 1 & -pv & & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots & -pv & \Big\} \; N-i-1 \\ & 0 & & & & \ddots & -qv & 1 & \end{array}$$

$$
= \frac{1}{\Delta}\Bigg[-p\sigma \left| \begin{array}{cccccc|cccc}
-p\sigma & & & & & & & & & \\
1 & -p\sigma & & & 0 & & & & 0 & \\
-q\sigma & 1 & -p\sigma & & & & & & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & & \\
0 & & & -q\sigma & 1 & -p\sigma & & & & \\
\hline
 & & & & & -q\sigma & 1 & -p\sigma & & 0 \\
 & & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & 0 & & & & & & & -p\sigma \\
 & & & & & & 0 & & -q\sigma & 1
\end{array} \right| \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\\1\end{array}}\right\} i-1 \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\end{array}}\right\} N-i-1 \end{array}
$$

$$
+ (-1)^{N-1} q\sigma \left| \begin{array}{ccccc|ccccc}
1 & -p\sigma & & & 0 & & & & & \\
-q\sigma & 1 & -p\sigma & & & & & 0 & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & & \\
0 & & & -q\sigma & 1 & -p\sigma & & & & \\
\hline
 & & & & & -q\sigma & 1 & -p\sigma & & 0 \\
 & & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & 0 & & & & & -q\sigma & 1 & \\
 & & & & & 0 & & & & -q\sigma
\end{array} \right| \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\end{array}}\right\} i-1 \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\end{array}}\right\} N-i-1 \end{array} \Bigg]
$$

$$
= \frac{1}{\Delta}\Bigg[-p\sigma \underbrace{\begin{vmatrix} -p\sigma & & & 0 \\ 1 & -p\sigma & & \\ & \ddots & \ddots & \\ * & & 1 & -p\sigma \end{vmatrix}}_{i-1} \times \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -p\sigma & & 0 \\ -q\sigma & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -p\sigma \\ 0 & & -q\sigma & 1 \end{vmatrix}}_{N-i-1}
$$

$$
+ (-1)^{N-1} q\sigma \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -p\sigma & & 0 \\ -q\sigma & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -p\sigma \\ 0 & & -q\sigma & 1 \end{vmatrix}}_{i-1} \times \underbrace{\begin{vmatrix} -q\sigma & 1 & & * \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & -q\sigma \end{vmatrix}}_{N-i-1} \Bigg]
$$

$$
= \frac{1}{\Delta}\left[(-1)^i (p\sigma)^i \, \frac{r_+(\sigma)^{N-i} - r_-(\sigma)^{N-i}}{r_+(\sigma) - r_-(\sigma)} + (-1)^i (q\sigma)^{N-i} \, \frac{r_+(\sigma)^i - r_-(\sigma)^i}{r_+(\sigma) - r_-(\sigma)} \right]
$$

d'où
$$
q_i = (-1)^i \left[(p\sigma)^i \, \frac{r_+(\sigma)^{N-i} - r_-(\sigma)^{N-i}}{r_+(\sigma)^N - r_-(\sigma)^N} + (q\sigma)^{N-i} \, \frac{r_+(\sigma)^i - r_-(\sigma)^i}{r_+(\sigma)^N - r_-(\sigma)^N} \right].
$$

Maintenant si on veut la fonction génératrice $\mathbb{E}_j(\sigma^{\tau_0})$ pour $j \neq 0$ $(1 \leq j \leq N-1)$:

$$
\mathbb{E}_j(\sigma^{\tau_0}) = \sigma\,(\underset{\substack{\uparrow \\ 0}}{0} \cdots 0\,\underset{\substack{\uparrow \\ j}}{1}\,0 \cdots \underset{\substack{\uparrow \\ N-1}}{0})\,(I_N - \sigma\tilde{P})^{-1} C = \sigma\,(a_{j,0} \cdots a_{j,N-1})\, C
$$

où $(a_{j,0} \cdots a_{j,N-1})$ est la ligne n° j de $(I_N - \sigma\tilde{P})^{-1}$.

Puis $\mathbb{E}_j(\sigma^{\tau_0}) = q\sigma\, a_{j,1} + p\sigma\, a_{j,N-1}$.

$$* \quad a_{j,1} = \frac{(-1)^{j+1}}{\Delta}\; \begin{array}{c} \overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}^{j} \; \overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}^{N-j-1} \\ \left|\begin{array}{cccccc|cccc} 1 & -p\sigma & 0 & & & & & & & -q\sigma \\ 0 & -q\sigma & 1 & -p\sigma & & & & & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & -p\sigma & & & 0 & \\ & & 0 & & & 1 & & & & \\ & & & & & -q\sigma & -p\sigma & & & \\ \hline & & & & & & 1 & -p\sigma & & 0 \\ & & & & & & -q\sigma & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & & & & & \ddots & \ddots & -p\sigma \\ & & & & & & 0 & & -q\sigma & 1 \end{array}\right| \end{array}$$

$$= \frac{(-1)^{j+1}}{\Delta} \left|\begin{array}{c|cccc} 1 & -p\sigma & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -q\sigma & 1 & -p\sigma & \\ 0 & & \ddots & \ddots & -p\sigma \\ & & & \ddots & 1 \\ & 0 & & & -q\sigma \end{array}\right|_{\underbrace{\qquad\quad}_{j-1}} \times \left|\begin{array}{cccc} 1 & -p\sigma & & 0 \\ -q\sigma & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -p\sigma \\ 0 & & -q\sigma & 1 \end{array}\right|_{\underbrace{\qquad\quad}_{N-j-1}}$$

$$= \frac{(q\sigma)^{j-1}}{\Delta} \times \frac{r_+(\sigma)^{N-j} - r_-(\sigma)^{N-j}}{r_+(\sigma) - r_-(\sigma)}$$

$$= (q\sigma)^{j-1}\, \frac{r_+(\sigma)^{N-j} - r_-(\sigma)^{N-j}}{r_+(\sigma)^N - r_-(\sigma)^N}.$$

$$* \quad a_{j,N-1} = \frac{(-1)^{N+j-1}}{\Delta}\; \begin{array}{c} \overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}^{j} \; \overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}^{N-j-1} \\ \left|\begin{array}{ccccc|cccc} 1 & -p\sigma & & 0 & & & & & -q\sigma \\ 0 & 1 & \ddots & & & & & & \\ & -q\sigma & \ddots & \ddots & -p\sigma & & & 0 & \\ & & & \ddots & 1 & & & & \\ & & & & -q\sigma & -p\sigma & & & \\ \hline & & & & & 1 & \ddots & & 0 \\ & & 0 & & & -q\sigma & \ddots & \ddots & \\ & & & & & 0 & & -q\sigma & 1 \quad -p\sigma \end{array}\right| \end{array}$$

dévelop^t p/r à la 1ère col.

$$= \frac{(-1)^{N+j-1}}{\Delta} \left|\begin{array}{ccccc} 1 & -p\sigma & & & 0 \\ -q\sigma & 1 & -p\sigma & & \\ 0 & -q\sigma & \ddots & \ddots & -p\sigma \\ & 0 & & -q\sigma & 1 \end{array}\right|_{\underbrace{\qquad\quad}_{j-1}} \times \left|\begin{array}{cccc} -p\sigma & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ -q\sigma & \ddots & \ddots & -p\sigma \\ 0 & & -q\sigma \;\; 1 & -p\sigma \end{array}\right|_{\underbrace{\qquad\quad}_{N-j-1}}$$

$$= \frac{(p\sigma)^{N-j-1}}{\Delta}\, \frac{r_+(\sigma)^j - r_-(\sigma)^j}{r_+(\sigma) - r_-(\sigma)}$$

$$= (p\sigma)^{N-j-1}\, \frac{r_+(\sigma)^j - r_-(\sigma)^j}{r_+(\sigma)^N - r_-(\sigma)^N}.$$

* d'où

$$\boxed{\mathbb{E}_j(\sigma^{\tau_0}) = (p\sigma)^{N-j}\, \frac{r_+(\sigma)^j - r_-(\sigma)^j}{r_+(\sigma)^N - r_-(\sigma)^N} + (q\sigma)^j\, \frac{r_+(\sigma)^{N-j} - r_-(\sigma)^{N-j}}{r_+(\sigma)^N - r_-(\sigma)^N}}$$

Marche absorbante sur $\{0,1,\dots,N\}$ (suite ex 4 : approche matricielle)

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & & \\ p & 0 & q & 0 & & & \\ 0 & p & 0 & q & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & & & p & 0 & q & 0 \\ \vdots & & & & 0 & p & 0 & q \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ matrice $(N+1)\times(N+1)$

polynôme caractéristique : $$\Delta_P(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & - & - & \\ p & -\lambda & q & 0 & & & \\ 0 & p & -\lambda & q & & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & & & p & -\lambda & q & \\ \vdots & & & & p & -\lambda & q \\ & & & & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2\,\Delta_{P'}(\lambda)$$

où P' est la matrice tridiagonale $$\begin{pmatrix} 0 & q & 0 & 0 & & & \\ p & 0 & q & 0 & & & \\ 0 & p & 0 & q & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & p & 0 & q & 0 \\ & & & 0 & p & 0 & q \\ & & & 0 & 0 & p & 0 \end{pmatrix}$$ matrice $(N-1)\times(N-1)$

ex : $p=q=\frac{1}{2}$ $$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & & & \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & 1/2 & 0 & 1/2 \\ & & & & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & \\ 1 & 0 & 1 & & \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 & 1 \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ (→ matrice du laplacien discret, comme !)

valeurs propres de P' : $\cos\frac{k\pi}{N}$, $1 \leq k \leq N-1$

vecteurs propres associés de P' : $$\vec{V}_k = \alpha_k \begin{pmatrix} \sin\frac{k\pi}{N} \\ \sin 2\frac{k\pi}{N} \\ \vdots \\ \sin\frac{(N-1)}{N}k\pi \end{pmatrix}$$ avec $\alpha_k = \dfrac{1}{\sqrt{\sum_{j=1}^{N-1}\sin^2 j\frac{k\pi}{N}}}$ (vecteurs normés)

(note : $$\sum_{j=1}^{N-1}\sin j\alpha\,\sin j\beta = \frac{1}{2}\Big[\sum_{j=0}^{N-1}\cos j(\alpha-\beta) - \sum_{j=0}^{N-1}\cos j(\alpha+\beta)\Big] = \frac{1}{2}\Big[\cos(N-1)\frac{\alpha-\beta}{2}\,\frac{\sin N\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}} - \cos(N-1)\frac{\alpha+\beta}{2}\,\frac{\sin N\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}\Big]$$

pour $\alpha \not\equiv \beta$ [mod 2π]

$$= \frac{1}{4}\Big[\frac{\sin(N-\frac{1}{2})(\alpha-\beta) + \sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}} - \frac{\sin(N-\frac{1}{2})(\alpha+\beta) + \sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}\Big]$$

$$= \frac{1}{4}\Big[\sin(N-\tfrac{1}{2})(\alpha-\beta)\sin\frac{\alpha+\beta}{2} - \sin(N-\tfrac{1}{2})(\alpha+\beta)\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\Big] \Big/ \sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$= \frac{1}{8}\Big[\cos((N-1)\alpha-N\beta) - \cos(N\alpha-(N-1)\beta) - \cos((N-1)\alpha+N\beta) + \cos(N\alpha+(N-1)\beta)\Big] \Big/ \sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$= \frac{1}{4}\Big[\sin(N-1)\alpha\,\sin N\beta - \sin N\alpha\,\sin(N-1)\beta\Big] \Big/ \frac{1}{2}(\cos\beta-\cos\alpha)$$

$$= \frac{\sin(N-1)\alpha\,\sin N\beta - \sin N\alpha\,\sin(N-1)\beta}{2(\cos\beta-\cos\alpha)}$$

si $\alpha = \frac{k\pi}{N}$, $\beta = \frac{\ell\pi}{N}$, $k \neq \ell \in \{1,\dots,N-1\}$ $\sin N\alpha = \sin N\beta = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{N-1}\sin j\alpha\,\sin j\beta = 0 \Rightarrow$ vecteurs propres ⊥ → normal, P' symétrique !)

vecteurs propres associés à la v.p. 1 (double) de P : $$\begin{cases} \frac{1}{2}x_0 - x_1 + \frac{1}{2}x_2 = 0 \\ \frac{1}{2}x_1 - x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 0 \\ \vdots \\ \frac{1}{2}x_{N-2} - x_{N-1} + \frac{1}{2}x_N = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \dots = x_N - x_{N-1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = x_1 + (x_1 - x_0) \\ x_3 = x_1 + 2(x_1 - x_0) \\ x_4 = x_1 + 3(x_1 - x_0) \\ \vdots \\ x_N = x_1 + (N-1)(x_1 - x_0) \end{cases}$$

$$\rightarrow \vec{V}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ N \end{pmatrix} \text{ et } \vec{V}_N = \begin{pmatrix} N \\ N-1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

D'où la matrice de passage pour P :

$$Q = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \vec{V}_0 & \vec{V}_1 & & \vec{V}_{N-1} & \vec{V}_N & \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|ccc|c} 0 & 0 & \cdots & 0 & N \\ \hline 1 & \alpha_1 \sin \pi/N & \cdots & \alpha_{N-1} \sin (N-1)\pi/N & N-1 \\ 2 & \alpha_1 \sin 2\pi/N & \cdots & \alpha_{N-1} \sin 2(N-1)\pi/N & N-2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ N-1 & \alpha_1 \sin (N-1)\pi/N & \cdots & \alpha_{N-1} \sin (N-1)(N-1)\pi/N & 1 \\ \hline N & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} \vec{e}_0 \\ \vec{e}_1 \\ \vdots \\ \vec{e}_{N-1} \\ \vec{e}_N \end{array}$$

et $P = Q D Q^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \cos\frac{\pi}{N} & & \\ & & \ddots & \\ & & \cos \frac{N-1}{N}\pi & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$

On a $P^n = Q D^n Q^{-1}$, $D^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Delta = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ et en posant $Q = (q_{ij})_{0\le i,j\le N}$:

$$P^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} Q \Delta Q^{-1} = \left(\begin{array}{c|c|c} q_{00} & & q_{0N} \\ \vdots & 0 & \vdots \\ q_{N0} & & q_{NN} \end{array}\right) \begin{pmatrix} q^{-1}_{00} & \cdots & q^{-1}_{0N} \\ \vdots & & \vdots \\ q^{-1}_{N0} & \cdots & q^{-1}_{NN} \end{pmatrix} = \left(q_{i0}\, q^{-1}_{0j} + q_{iN}\, q^{-1}_{Nj}\right)_{0\le i,j\le N} .$$

Comme on a une isométrie entre $(\vec{V}_1, \dots, \vec{V}_{N-1})$ et $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{N-1})$, $q^{-1}_{0j} = q^{-1}_{Nj} = 0$ pour $1 \le j \le N-1$

D'autre part, en utilisant les cofacteurs (faciles) de Q : $q^{-1}_{00} = q^{-1}_{NN} = 0$

et $q^{-1}_{0N} = q^{-1}_{N0} = \left|\dfrac{N \det(\vec{V}_1, \dots, \vec{V}_{N-1})}{\det P}\right| = \dfrac{1}{N}$

$|\det P| = N^2 |\det(\vec{V}_1, \dots, \vec{V}_{N-1})|$

(pas de pb de signe !)

Avec $q_{i0} = i$, $q_{iN} = N-i$ on trouve

$$\boxed{P^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & & 0 \\ \frac{N-1}{N} & & \frac{1}{N} \\ \frac{N-2}{N} & & \frac{2}{N} \\ \vdots & 0 & \vdots \\ \frac{2}{N} & & \frac{N-2}{N} \\ \frac{1}{N} & & \frac{N-1}{N} \\ 0 & & 1 \end{array}\right)}$$

Interprétation : la 0^e colonne est la colonne des probabilités d'absorption en 0 : $\mathbb{P}_i(\tau_0 < \tau_N)$ et la N^e est celle des probabilités d'absorption en N : $\mathbb{P}_i(\tau_N < \tau_0)$.

Plus on est près d'une extrémité, plus on a de chance d'être absorbé par celle-ci.

Remarque : la réduction de P est inutile, et ce qui a été fait dans le cas $p=q=\frac{1}{2}$ peut se généraliser facilement : vect. propres associés à 1 : $p x_i - x_{i+1} + q x_{i+2} = 0$, $0 \le i \le N-1$ $\iff q(x_{i+2} - x_{i+1}) = p(x_{i+1} - x_i)$

$\iff x_{i+2} - x_{i+1} = r(x_{i+1} - x_i)$

$x_i - x_{i-1} = r^{i-1}(x_1 - x_0)$

$\Rightarrow x_i = x_1 + (r + \dots + r^{i-1})(x_1 - x_0) = \underbrace{(1 + r + \dots + r^{i-1})}_{\frac{1-r^i}{1-r}} x_1 - (r + \dots + r^{i-1}) x_0$

On pose $r = \frac{p}{q}$, $\rho = \frac{1}{r} = \frac{q}{p}$

d'où $\vec{V}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1-r \\ 1-r^2 \\ \vdots \\ 1-r^N \end{pmatrix}$ ($r = \frac{p}{q}$) et $\vec{V}_N = \begin{pmatrix} 1-\rho^N \\ 1-\rho^{N-1} \\ \vdots \\ 1-\rho \\ 0 \end{pmatrix}$ ($\rho = \frac{q}{p}$)

$\Rightarrow \begin{cases} q_{i0} = 1 - r^i = \dfrac{1-\rho^i}{-\rho^i} \\ q_{iN} = 1 - \rho^{N-i} \\ q^{-1}_{0N} = \dfrac{1}{1-r^N} = \dfrac{-\rho^N}{1-\rho^N} \\ q^{-1}_{N0} = \dfrac{1}{1-\rho^N} \end{cases}$ $\Rightarrow P^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{1-\rho^N} \left(\begin{array}{c|c|c} 1-\rho^N & & 0 \\ 1-\rho^{N-1} & & \rho^{N-1} - \rho^N \\ \vdots & 0 & \vdots \\ 1-\rho & & \rho - \rho^N \\ 0 & & 1-\rho^N \end{array}\right)$.

P_19quater

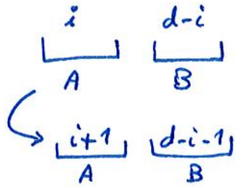
Ex (chaîne d'Ehrenfest)

1) $E = \{0, 1, \dots, d\}$ $\qquad X_n =$ nombre de balles dans A après n tirages

$p_{ij} = 0$ si $i = j$ ou $|i-j| \geq 2$

$p_{i\,i+1} = \mathbb{P}(\text{tirer une balle de B}) = \dfrac{d-i}{d}$

$p_{i\,i-1} = \mathbb{P}(\text{tirer une balle de A}) = \dfrac{i}{d}$



$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & & & \\ \frac{1}{d} & 0 & 1-\frac{1}{d} & 0 & & & \\ 0 & \frac{2}{d} & 0 & 1-\frac{2}{d} & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & 1-\frac{1}{d} & 0 & \frac{1}{d} \\ & & & & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

si $i<j$: $i \leftrightarrow i+1 \leftrightarrow i+2 \leftrightarrow \dots \leftrightarrow j$

$\Rightarrow$ chaîne irréductible finie

donc récurrente positive.

chaîne 2-périodique.

2) On suppose $X_0 : \mathcal{B}(d, \frac{1}{2})$ i.e. $\mathbb{P}(X_0 = i) = \dfrac{C_d^i}{2^d}$.

Donc $\mathbb{P}(X_1 = j) = \displaystyle\sum_{j=0}^{d} \frac{C_d^i}{2^d} p_{ij} = \frac{1}{2^d}\left[C_d^{j-1} p_{j-1\,j} + C_d^{j+1} p_{j+1\,j}\right] = \frac{1}{2^d}\left[\frac{d-(j-1)}{d} C_d^{j-1} + \frac{j+1}{d} C_d^{j+1}\right]$

$= \dfrac{1}{2^d}\left[C_{d-1}^{j-1} + C_{d-1}^{j}\right] = \dfrac{C_d^j}{2^d}$ (valable aussi pour $j=0$ ou d) $\left\{\begin{array}{l} \frac{k}{n} C_n^k = C_{n-1}^{k-1} \\ \frac{n-k}{n} C_n^k = C_{n-1}^{k} \end{array}\right.$

$\Rightarrow \pi_j = \dfrac{C_d^j}{2^d}$, $0 \leq j \leq d$, loi stationnaire (unique)

3) $d=3$ a) $\mathbb{P}_i(\tau_0 = n) = \mathbb{P}_i(X_1, \dots, X_{n-1} \neq 0, X_n = 0) = f_{i0}^{(n)}$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$f_{i0}^{(1)} = p_{i0} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq 1 \\ 1/3 & \text{si } i = 1 \end{cases}$

$f_{i0}^{(2)} = \displaystyle\sum_{j=1}^{3} p_{ij} \underbrace{p_{j0}}_{\frac{1}{3}\delta_{j1}} = \frac{1}{3} p_{i1} = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{si } i=0 \\ \frac{2}{9} & \text{si } i=2 \\ 0 & \text{si } i=1 \text{ ou } 3 \end{cases}$

$f_{i0}^{(3)} = \displaystyle\sum_{j=1}^{3} p_{ij} f_{j0}^{(2)} = p_{i2} f_{20}^{(2)} = \frac{2}{9} p_{i2} = \begin{cases} \frac{4}{27} & \text{si } i=1 \\ \frac{2}{9} & \text{si } i=3 \\ 0 & \text{si } i=0 \text{ ou } 2 \end{cases}$

En résumé : $f_{i0}^{(n)}$

$i \backslash n$	1	2	3
0	0	1/3	0
1	1/3	0	4/27
2	0	2/9	0
3	0	0	2/9

b) $P^2 = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 7/9 & 0 & 2/9 \\ 2/9 & 0 & 7/9 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$ $\qquad P^3 = \dfrac{1}{27}\begin{pmatrix} 0 & 21 & 0 & 6 \\ 7 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 20 & 0 & 7 \\ 6 & 0 & 21 & 0 \end{pmatrix}$

$p_0 = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) \Rightarrow \begin{cases} p_1 = p_0 P = \frac{1}{12}(1, 5, 5, 1) \\ p_2 = p_0 P^2 = \frac{1}{36}(5, 13, 13, 5) \\ p_3 = p_0 P^3 = \frac{1}{108}(13, 41, 41, 13) \end{cases}$

4) a) $\displaystyle\sum_{j=0}^{d} j\,p_{ij} = (i-1)p_{i\,i-1} + (i+1)p_{i\,i+1} = (i-1)\frac{i}{d} + (i+1)\frac{d-i}{d} = \boxed{\underbrace{\left(1-\frac{2}{d}\right)}_{a} i + \underbrace{1}_{b} = \mathbb{E}_i(X_1)}$.

b) $u_n = \mathbb{E}_i(X_n)$.

$$u_{n+1} = \mathbb{E}_i(X_{n+1}) = \sum_{j=0}^{d} p_{ij}^{(n)} \underbrace{\mathbb{E}(X_{n+1} \mid X_n = j)}_{\mathbb{E}_j(X_1)} = \sum_{j=0}^{d} (aj+b)p_{ij}^{(n)} = a \underbrace{\sum_{j=0}^{d} j\,p_{ij}^{(n)}}_{\mathbb{E}_i(X_n)} + b \underbrace{\sum_{j=0}^{d} p_{ij}^{(n)}}_{1}$$

$$= a\,u_n + b$$

$$\Longrightarrow \quad u_n - \frac{b}{1-a} = a^n\left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right) \text{ avec } u_0 = i$$

d'où $\mathbb{E}_i(X_n) = \frac{b}{1-a} + \left(i - \frac{b}{1-a}\right)a^n$ où $a = 1-\frac{2}{d} \in [0,1[$, $b = 1$

$$\boxed{\mathbb{E}_i(X_n) = \frac{d}{2} + \left(i - \frac{d}{2}\right)\left(1-\frac{2}{d}\right)^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \boxed{\frac{d}{2}}$$, i.e. à l'état d'équilibre le nombre de moyen de boules dans A est égal à celui dans B.

5) a) $\pi = \pi P \iff \begin{cases} \pi_0 = \frac{\pi_1}{d} \\ \pi_j = \pi_{j-1}\left(1-\frac{j-1}{d}\right) + \pi_{j+1}\left(\frac{j+1}{d}\right), & 1 \leq j \leq d-1 \\ \pi_d = \frac{\pi_{d-1}}{d} \end{cases}$

$1 = \left(1-\frac{j}{d}\right) + \frac{j}{d}$

On a $\quad \frac{j+1}{d}\pi_{j+1} - \left(1-\frac{j}{d}\right)\pi_j = \frac{j}{d}\pi_j - \left(1-\frac{j-1}{d}\right)\pi_{j-1} = \cdots = \frac{\pi_1}{d} - \pi_0 = 0$

d'où $\quad \pi_{j+1} = \frac{d-j}{j+1}\pi_j \;,\; 0 \leq j \leq d-1 \quad \Longrightarrow \quad \pi_j = \pi_0\, C_d^j \;,\; \pi_0 = \left(\sum_{j=0}^{d} C_d^j\right)^{-1} = \frac{1}{2^d}$

soit $\boxed{\pi_j = \frac{C_d^j}{2^d}}$

remarque : si π est réversible, i.e. $\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji}$ alors π est une loi stationnaire.

En effet : $\displaystyle\sum_{a_i \in E} \pi_i p_{ij} = \pi_j \sum_{a_i \in E} p_{ji} = \pi_j \quad \Longrightarrow \pi P = \pi$.

Ici : résolvons d'abord $\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji}$: $\begin{cases} \pi_0 p_{01} = \pi_1 p_{10} \iff \pi_1 = d\,\pi_0 \\ \pi_i p_{i\,i+1} = \pi_{i+1} p_{i+1\,i} \iff (d-i)\pi_i = (i+1)\pi_{i+1} \end{cases}$ $1 \leq i \leq d-1$

d'où $\pi_{i+1} = \frac{d-i}{i+1}\pi_i$. Ce système permet de trouver une loi réversible donc stationnaire.

b) d pair

- $X_0 = \frac{d}{2}$: $\mathbb{E}_{\frac{d}{2}}(\tau_{\frac{d}{2}}) = \frac{1}{\pi_{\frac{d}{2}}} = \boxed{\frac{2^d}{C_d^{d/2}}} \underset{d\to\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi d}{2}}$

- $X_0 = d$: $\mathbb{E}_d(\tau_d) = \frac{1}{\pi_d} = \boxed{2^d}$

$d = 10$: $\underline{\mathbb{E}_5(\tau_5) \simeq 4}$

$\underline{\mathbb{E}_{10}(\tau_{10}) = 1024}$.

c) période 2 $\Longrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(2n)} = \begin{cases} 2\pi_j & \text{si } j-i \text{ pair} \\ 0 & \text{si } j-i \text{ impair} \end{cases} \\ \lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(2n+1)} = \begin{cases} 0 & \text{si } j-i \text{ pair} \\ 2\pi_j & \text{si } j-i \text{ impair} \end{cases} \end{cases}$

$d = 4$, $X_0 = 0$: $\pi = \left(\frac{1}{16}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}\right)$

En un nombre pair de tirages on n'a accès qu'aux états 0, 2, 4,

et en un nombre impair aux états 1, 3.

$p_{0j}^{(2n)} \begin{cases} = 0 & \text{si } j = 1,3 \\ \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{8} \left(\text{resp. } \frac{3}{4}, \frac{1}{8}\right) & \text{si } j = 0 \text{ (resp. } 2, 4) \end{cases}$

$p_{0j}^{(2n+1)} \begin{cases} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2} & \text{si } j = 1,3 \\ = 0 & \text{si } j = 0,2,4. \end{cases}$

6) a)

$$\begin{cases} p_{i\,i+1} = \mathbb{P}(\text{tirer une balle de } B \text{ et la placer dans } A) = \frac{d-i}{d} \times \frac{1}{2} = \frac{d-i}{2d} \\ p_{i\,i-1} = \mathbb{P}(\text{tirer une balle de } A \text{ et la placer dans } B) = \frac{i}{2d} \\ p_{ii} = \mathbb{P}(\text{tirer une balle de } A \text{ et la placer dans } A \text{, ou de } B \text{ et dans } B) = \frac{1}{2}\left(\frac{i}{d} + \frac{d-i}{d}\right) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & & \\ \frac{1}{2d} & \frac{1}{2} & \frac{d-1}{2d} & 0 & & \\ 0 & \frac{2}{2d} & \frac{1}{2} & \frac{d-2}{2d} & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & & 0 \\ & & & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

modification essentielle : apériodique

loi stationnaire : $\pi = \pi P \iff \pi_j = \frac{d-j}{2d}\pi_{j-1} + \frac{1}{2}\pi_j + \frac{j}{2d}\pi_{j+1} \iff \pi_j = \frac{d-j}{d}\pi_{j-1} + \frac{j}{d}\pi_{j+1}$

$\rightarrow$ même système que précédemment donc $\boxed{\pi_j = \frac{C_d^j}{2^d}}$.

b) $q_{ij}^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \pi_j$.

$d=4,\ X_0=0$: $q_{0j}^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \pi_j$ avec $\pi = \left(\frac{1}{16}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}\right)$.

Ex : (réversibilité)

On pose $Y_n = X_{-n}$, $n \geq 0$

Préliminaire : $\mathbb{P}_\pi(Y_0 = a_{i_0}, Y_1 = a_{i_1}, \dots, Y_n = a_{i_n}) = \mathbb{P}_\pi(X_{-n} = a_{i_n}, X_{-(n-1)} = a_{i_{n-1}}, \dots, X_{-1} = a_{i_1}, X_0 = a_{i_0})$

$= \mathbb{P}_\pi(X_0 = a_{i_n}, X_1 = a_{i_{n-1}}, \dots, X_n = a_{i_0}) = \pi_{i_n} p_{i_n i_{n-1}} \cdots p_{i_1 i_0}$

$= \pi_{i_0} \times \frac{\pi_{i_1}}{\pi_{i_0}} p_{i_1 i_0} \times \frac{\pi_{i_2}}{\pi_{i_1}} p_{i_2 i_1} \times \dots \times \frac{\pi_{i_n}}{\pi_{i_{n-1}}} p_{i_n i_{n-1}}$

$= \pi_{i_0} \times q_{i_0 i_1} q_{i_1 i_2} \cdots q_{i_{n-1} i_n}$

$\Rightarrow (Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ chaîne de Markov de probabilités de transition $\boxed{q_{ij} = \frac{\pi_j\, p_{ji}}{\pi_i}}$.

Application : $p_i = p$, $q_i = 1-p$, $r_i = 0$.

1) Montrons que N_n et X_0 sont indépendantes par récurrence :

- $\mathbb{P}(N_1 = j \mid X_0 = i) = \begin{cases} 1-p & \text{si } j=0 \\ p & \text{si } j=1 \\ 0 & \text{si } j\geq 2 \end{cases} = \mathbb{P}(N_1 = j)$ donc N_1, X_0 indépendantes

- $\mathbb{P}(N_{n+1} = j \mid X_0 = i) = \sum_{k=0}^{j} \mathbb{P}(N_{n+1} = j, N_n = k \mid X_0 = i)$

$$= \sum_{k=0}^{j} \underbrace{\mathbb{P}(N_{n+1} = j \mid N_n = k, X_0 = i)}_{\begin{cases} 1-p & \text{si } k=j \\ p & \text{si } k=j-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \text{ (indép. de l'état initial)}} \underbrace{\mathbb{P}(N_n = k \mid X_0 = i)}_{\mathbb{P}(N_n = k) \text{ (hypothèse de récurrence } N_n \text{ et } X_0 \text{ indépendantes)}}$$

$= (1-p)\,\mathbb{P}(N_n = j) + p\,\mathbb{P}(N_n = j-1)$ $\rightarrow$ indépendant de i donc X_0 et N_{n+1} indépendantes

2) Soit $Y_n = X_{n-k}$, $k \in \{0, \dots, n\}$. Loi initiale = loi stationnaire $\Rightarrow$ loi de X_n = loi de X_0.

La loi stationnaire est réversible (cf. ex 1) : $\pi_j = \frac{p_0}{p_j q_j}\pi_0$ donc $\pi_{j+1} q_{j+1} = \pi_j p_j$ i.e. $\pi_{j+1} p_{j+1\,j} = \pi p_{j\,j+1}$.

Donc $(X_k)_{k\in\{0,1,\dots,n\}}$ et $(Y_k)_{k\in\{0,1,\dots,n\}}$ ont les mêmes probabilités de transition et alors $N_k^X \overset{loi}{=} N_k^Y$. Or X_0 et N_n^X sont indépendantes donc aussi Y_0 et N_n^Y ou encore X_n et D_n^X aussi.

Compléments à la chaîne d'Ehrenfest

C'est en fait un cas particulier d'une chaîne de naissance mort sur $E=\{0,1,2,\dots,d\}$.

$$P=\begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & 0 & 0 & & & \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & 0 & & & \\ 0 & p_{21} & p_{22} & p_{23} & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & p_{d-1,d-2} & p_{d-1,d-1} & p_{d-1,d} \\ & & & & 0 & p_{d,d-1} & p_{dd} \end{pmatrix}$$

avec $\begin{cases} p_{00}+p_{01}=1 \\ p_{i-1,i}+p_{ii}+p_{i+1,i}=1, \quad 1\le i\le d-1 \\ p_{d,d-1}+p_{dd}=1 \end{cases}$

et $p_{i,i-1}>0,\ p_{i,i+1}>0$.

Loi stationnaire :

$$\pi=\pi P \iff \begin{cases} \pi_0=p_{00}\pi_0+p_{10}\pi_1 \\ \pi_i=p_{i-1,i}\pi_{i-1}+p_{ii}\pi_i+p_{i+1,i}\pi_{i+1}, \quad 1\le i\le d-1 \\ \pi_d=p_{d,d-1}\pi_{d-1}+p_{dd}\pi_d \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \pi_1=\dfrac{1-p_{00}}{p_{10}}\pi_0=\dfrac{p_{01}}{p_{10}}\pi_0 \\ \pi_2=\dfrac{(1-p_{11})\pi_1-p_{01}\pi_0}{p_{21}}=\dfrac{(1-p_{11}-p_{10})\pi_1}{p_{21}}=\dfrac{p_{12}}{p_{21}}\pi_1 \end{cases}$$

supposons $\pi_j=\dfrac{p_{j-1,j}}{p_{j,j-1}}\pi_{j-1}$.

on a $\pi_{j+1}=\dfrac{(1-p_{jj})\pi_j-p_{j-1,j}\pi_{j-1}}{p_{j+1,j}}=\dfrac{(1-p_{jj}-p_{j,j-1})\pi_j}{p_{j+1,j}}=\dfrac{p_{j,j+1}}{p_{j+1,j}}\pi_j,\ j\le d-2$

et $\pi_d=\dfrac{p_{d-1,d}}{1-p_{dd}}\pi_{d-1}=\dfrac{p_{d-1,d}}{p_{d,d-1}}\pi_{d-1}$

D'où π est réversible et $\boxed{\pi_j=\dfrac{p_{01}p_{12}p_{23}\cdots p_{j-1,j}}{p_{10}p_{21}p_{32}\cdots p_{j,j-1}}\pi_0,\ 1\le j\le d}$

ex : 1) modèle d'Ehrenfest :

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ \frac{1}{d} & 0 & 1-\frac{1}{d} & & & \\ & \frac{2}{d} & 0 & 1-\frac{2}{d} & & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & 1-\frac{1}{d} & 0 & \frac{1}{d} \\ & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\pi_j=\frac{(1-\frac{1}{d})(1-\frac{2}{d})\cdots(1-\frac{j-1}{d})}{\frac{1}{d}\times\frac{2}{d}\times\cdots\times\frac{j}{d}}\pi_0=\frac{d(d-1)(d-2)\cdots(d-j+1)}{j!}\pi_0=C_d^j\pi_0$$

or $\sum_{j=0}^{d}C_d^j=2^d$ d'où $\boxed{\pi_j=\dfrac{C_d^j}{2^d}}$, $0\le j\le d$ $\Rightarrow \pi:\mathcal{B}(d,\frac{1}{2})$

2) modèle de Laplace-Bernoulli :

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & & \\ (\frac{1}{d})^2 & 2\frac{1}{d}(1-\frac{1}{d}) & (1-\frac{1}{d})^2 & 0 & & \\ 0 & (\frac{2}{d})^2 & 2\frac{2}{d}(1-\frac{2}{d}) & (1-\frac{2}{d})^2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Comme ci-dessus $\pi_j=(C_d^j)^2\pi_0$. Or $\sum_{j=0}^{d}(C_d^j)^2=C_{2d}^d$,

$\boxed{\pi_j=\dfrac{(C_d^j)^2}{C_{2d}^d}}$ $0\le j\le d$ $\Rightarrow \pi:\mathcal{H}(2d,d,\frac{1}{2})$.

Dans l'ex. 1 on a déterminé $\mu_i = \mathbb{P}_i(\tau_a < \tau_b)$. Ici on étudie $v_i = \mathbb{E}_i(\tau_a \mathbb{1}_{\{\tau_a < \tau_b\}})$.
$= \sum_{k=i}^{b-1} \gamma_k / \sum_{k=a}^{b-1} \gamma_k$

- $v_a = v_b = 0$
- si $i \in]a,b[$, $v_i = \mathbb{E}_i[(\tau_a \circ \theta_1 + 1)\mathbb{1}_{\{\tau_a < \tau_b\}}]$

$$= \mathbb{E}_i[(\tau_a \circ \theta_1)\mathbb{1}_{\{\tau_a\circ\theta_1 < \tau_b \circ \theta_1\}}] + \mathbb{P}\{\tau_a < \tau_b\}$$
$$= \sum_{j=a}^{b} p_{ij}\, \mathbb{E}_j[\tau_a \mathbb{1}_{\{\tau_a < \tau_b\}}] + \mu_i$$
$$= \sum_{j=a}^{b} p_{ij} v_j + \mu_i$$
$$= q_i v_{i-1} + (1-p_i-q_i) v_i + p_i v_{i+1} + \mu_i$$

$$\Rightarrow \quad v_{i+1} - v_i = \frac{q_i}{p_i}(v_i - v_{i-1}) - \frac{\mu_i}{p_i}.$$

Posons $w_i = v_i - v_{i-1}$ pour $i \in \{a+1, a+2, \dots, b\}$.

On a $w_{a+1} = v_a$

$$w_i = \frac{q_{i-1}}{p_{i-1}} w_{i-1} - \frac{\mu_{i-1}}{p_{i-1}} = \frac{q_{i-1}q_{i-2}}{p_{i-1}p_{i-2}} w_{i-2} - \frac{\mu_{i-1}}{p_{i-1}} - \frac{q_{i-1}\mu_{i-2}}{p_{i-1}p_{i-2}}$$

$$= \dots = \frac{q_{i-1}q_{i-2}\cdots q_{a+1}}{p_{i-1}p_{i-2}\cdots p_{a+1}} w_{a+1} - \frac{\mu_{i-1}}{p_{i-1}} - \frac{q_{i-1}\mu_{i-2}}{p_{i-1}p_{i-2}} - \dots - \frac{q_{i-1}q_{i-2}\cdots q_{a+2}\mu_{a+1}}{p_{i-1}p_{i-2}\cdots p_{a+2}p_{a+1}}$$

$$= \frac{\gamma_{i-1}}{\gamma_a} v_{a+1} - \frac{\gamma_{i-1}}{\gamma_{i-1}}\frac{\mu_{i-1}}{p_{i-1}} - \frac{\gamma_{i-1}}{\gamma_{i-2}}\frac{\mu_{i-2}}{p_{i-2}} - \dots - \frac{\gamma_{i-1}}{\gamma_{a+1}}\frac{\mu_{a+1}}{p_{a+1}}$$

i.e. $$v_i - v_{i-1} = \frac{\gamma_{i-1}}{\gamma_a} v_{a+1} - \gamma_{i-1}\sum_{j=a+1}^{i-1} \frac{\mu_j}{p_j \gamma_j}$$

d'où $$v_i = v_{a+1} + \sum_{k=a+2}^{i}(v_k - v_{k-1}) = v_{a+1} + \left(\sum_{k=a+2}^{i} \gamma_{k-1}\right)\frac{v_{a+1}}{\gamma_a} - \sum_{k=a+2}^{i} \gamma_{k-1} \sum_{j=a+1}^{k-1} \frac{\mu_j}{p_j\gamma_j}$$

$$= \frac{\sum_{k=a}^{i-1}\gamma_k}{\gamma_a} v_{a+1} - \sum_{k=a+1}^{i-1} \gamma_k \sum_{j=a+1}^{k} \frac{\mu_j}{p_j \gamma_j}$$

or $v_b = 0$ donc $$v_{a+1} = \gamma_a \frac{\sum_{k=a+1}^{b-1} \gamma_k \sum_{j=a+1}^{k} \frac{\mu_j}{p_j\gamma_j}}{\sum_{k=a}^{b-1}\gamma_k}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_i = \left(\sum_{k=a+1}^{b-1} \gamma_k \sum_{j=a+1}^{k} \frac{\mu_j}{p_j \gamma_j}\right) \frac{\sum_{k=a}^{i-1}\gamma_k}{\sum_{k=a}^{b-1}\gamma_k} - \sum_{k=a+1}^{i-1}\gamma_k \sum_{j=a+1}^{k}\frac{\mu_j}{p_j\gamma_j}}$$

Posons $s_{a,i} = \sum_{k=a+1}^{i-1} \gamma_k \sum_{j=a+1}^{k} \frac{\mu_j}{p_j\gamma_j}$ et $\tilde{s}_i = \sum_{k=i}^{b-1}\gamma_k \sum_{j=a+1}^{k} \frac{\mu_j}{p_j\gamma_j}$

On a $s_{a,i}+\tilde s_i = \sum_{k=a+1}^{b-1}\gamma_k\sum_{j=a+1}^{k} \frac{\mu_j}{p_j\gamma_j} = s_{a,b} = \tilde s_{a+1} = \tilde s_a \quad \left(\sum_{j=a+1}^{a} = 0\right)$

et $\boxed{v_i = s_{a,b}(1-\mu_i) - s_{a,i} = \tilde s_i - s_{a,b}\mu_i}$

$$\begin{cases} v_a = \underbrace{\tilde s_a}_{s_b} - s_{a,b}\underbrace{\mu_a}_{1} = 0 \\ v_b = s_{a,b}(1-\underbrace{\mu_b}_{0}) - s_{a,b} = 0\end{cases}$$

En posant $\bar s_{i,b} = \sum_{k=i}^{b-1}\gamma_k \sum_{j=k+1}^{b-1}\frac{\mu_j}{p_j\gamma_j}$ on obtient $\tilde s_i = \sum_{k=i}^{b-1}\gamma_k\sum_{j=a+1}^{b-1}\frac{\mu_j}{p_j\gamma_j} - \sum_{k=i}^{b-1}\gamma_k\sum_{j=k+1}^{b-1}\frac{\mu_j}{p_j\gamma_j}$

$$= \underbrace{\left(\sum_{k=i}^{b-1}\gamma_k\right)}_{\mu_i\sum_{k=a}^{b-1}\gamma_k}\left(\sum_{j=a+1}^{b-1}\frac{\mu_j}{p_j\gamma_j}\right) - \bar s_i$$

puis $v_i = \mu_i\sum_{k=a}^{b-1}\gamma_k \times \sum_{j=a+1}^{b-1}\frac{\mu_j}{p_j\gamma_j} - \bar s_{i,b} - s_{a,b}\mu_i$

$$= \mu_i\left[\sum_{k=a}^{b-1}\gamma_k\sum_{j=a+1}^{b-1}\frac{\mu_j}{p_j\gamma_j} - \sum_{k=a+1}^{b-1}\gamma_k\sum_{j=a+1}^{k}\frac{\mu_j}{p_j\gamma_j}\right] - \bar s_{i,b}$$

$$= \mu_i\left[\gamma_a\sum_{j=a+1}^{b-1}\frac{\mu_j}{p_j\gamma_j} + \sum_{k=a+1}^{b-1}\gamma_k\sum_{j=k+1}^{b-1}\frac{\mu_j}{p_j\gamma_j}\right] - \bar s_{i,b}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_i = \bar s_{a,b}\mu_i - \bar s_{i,b}}$$

---

ex: $\begin{cases}p_i=p\\ q_i=q\end{cases}$ $\quad r = \frac{q}{p}, \quad \gamma_i = r^i.$ $\quad \mu_i = \frac{\sum_{k=i}^{b-1} r^k}{\sum_{k=a}^{b-1} r^k} = \begin{cases}\frac{r^i-r^b}{r^a-r^b} & \text{si } p\neq q\\ \frac{b-i}{b-a} & \text{si } p=q\end{cases}$

pour $r\neq 1$: $s_{a,i} = \sum_{k=a+1}^{i-1} r^k\sum_{j=a+1}^{k}\frac{1}{p}\frac{1-r^{b-j}}{r^a-r^b}$

$$= \frac{1}{p(r^a-r^b)}\sum_{k=a+1}^{i-1} r^k\left[(k-a) - r^{b-a-1}\frac{1-(1/r)^{k-a}}{1-1/r}\right]$$

$$= \frac{1}{p(r^a-r^b)}\left[\sum_{k=a+1}^{i-1}(k-a)r^k - \frac{r^{b-a}}{r-1}\sum_{k=a+1}^{i-1}(r^k-r^a)\right]$$

$$= \frac{1}{p(r^a-r^b)}\left[\sum_{k=1}^{i-a-1} k\, r^{k+a} - \frac{r^{b-a}}{r-1}\left(\sum_{k=0}^{i-a-2} r^{k+a+1} - (i-a-1)r^a\right)\right]$$

$$= \frac{1}{p(r^a-r^b)}\left[r^{a+1}\times\frac{(i-a-1)r^{i-a}-(i-a)r^{i-a-1}+1}{(r-1)^2} - \frac{r^{b-a}}{(r-1)^2}\left(r^i - r^{a+1} - (i-a-1)(r^{a+1}-r^a)\right)\right]$$

$$= \frac{(i-a-1)r^{i+1} - (i-a)r^i + r^{a+1} - r^{i+b-a} - (i-a)r^{b+1} - (i-a-1)r^b}{p(r^a-r^b)(r-1)^2}$$

$$= \frac{(i-a-1)(r^{i+1}-r^b) - (i-a)(r^i - r^{b+1}) + (r^{a+1}-r^{i+b-a})}{p(r^a-r^b)(r-1)^2}$$

pour $i=b$: $s_{ab} = \dfrac{(b-a-1)(r^{b+1}-r^{b}) - (b-a)(r^{b}-r^{b+1}) + r^{a+1} - r^{2b-a}}{p(r^a-r^b)(r-1)^2}$

$$= \frac{(2b-2a-1)r^b(r-1) + r^{a+1}(1-r^{2b-2a-1})}{p(r^a-r^b)(r-1)^2}$$

d'où $v_i = (1-\mu_i)s_{ab} - s_{ai} = \dfrac{[(2b-2a-1)r^b(r-1)+r^{a+1}(1-r^{2b-2a-1})](r^a-r^i)}{p(r^a-r^b)^2(r-1)^2}$

$$- \frac{[(i-a-1)(r^{i+1}-r^b) - (i-a)(r^i-r^{b+1}) + r^{a+1} - r^{b-a+i}]}{p(r^a-r^b)(r-1)^2}$$

$$= \frac{\left\{\begin{array}{l} (2b-2a-1)(r^{a+b+1}-r^{a+b}) + r^{2a+1} - r^{2b} - (2b-2a-1)(r^{b+i+1}-r^{b+i}) - r^{a+i+1} + r^{2b-a+i} \\ -(i-a-1)(r^{a+i+1}-r^{a+b}) + (i-a)(r^{a+i}-r^{a+b+1}) - r^{2a+1} + r^{b+i} \\ +(i-a-1)(r^{b+i+1}-r^{2b}) - (i-a)(r^{b+i}-r^{2b+1}) + r^{a+b+1} - r^{2b-a+i} \end{array}\right\}}{p(r^a-r^b)^2(r-1)^2}$$

$$= \frac{\left\{\begin{array}{l} (2b-a-i)r^{a+b+1} - (2b-a-i)r^{a+b} - (i-a)r^{2b} + (i-a)r^{2b+1} \\ -(2b-a-i)r^{b+i+1} + (2b-a-i)r^{b+i} - (i-a)r^{a+i+1} + (i-a)r^{a+i} \end{array}\right\}}{p(r^a-r^b)^2(r-1)^2}$$

$$= \frac{(2b-a-i)(r^a-r^i)(r-1)r^b + (i-a)(r^{2b}-r^{a+i})(r-1)}{p(r^a-r^b)^2(r-1)^2}$$

$$= \frac{(2b-a-i)(r^a-r^i)r^b + (i-a)(r^{2b}-r^{a+i})}{p(r^a-r^b)^2(r-1)}$$

$$\Rightarrow \boxed{E_i[\tau_a, \tau_a<\tau_b] = \frac{(i-a)(r^b+r^i)(r^b-r^a) - 2(b-a)(r^i-r^a)r^b}{(q-p)(r^a-r^b)^2}}$$

de même $\boxed{E_i[\tau_b, \tau_b<\tau_a] = \dfrac{(b-i)(r^a+r^i)(r^b-r^a) - 2(b-a)(r^b-r^i)r^a}{(q-p)(r^a-r^b)^2}}$

vient de $[(b-a)(r^a-r^i)r^b + (b-i)(r^a-r^i)r^b$
$+(i-a)(r^{2b}-r^{a+i})]$
$+[(a-i)r^b+(b-a)r^i+(i-b)r^a](r^a-r^b)$
etc.

D'où $E_i(\tau_{ab}) = \dfrac{(i-a)(r^b+r^i) + (b-i)(r^a+r^i) - 2(b-a)(r^b-r^a)}{(q-p)(r^a-r^b)}$

$$\Rightarrow \boxed{E_i(\tau_{ab}) = \frac{1}{q-p}\left[(i-a)\frac{r^b-r^i}{r^b-r^a} - (b-i)\frac{r^i-r^a}{r^b-r^a}\right]}$$

pour $r=1$: $$s_{a,i} = \sum_{k=a+1}^{i-1} \sum_{j=a+1}^{k} \frac{1}{p} \underbrace{\frac{b-j}{b-a}}_{1-\frac{j-a}{b-a}} = \frac{1}{p}\sum_{k=a+1}^{i-1}\left[(k-a) - \frac{\sum_{j=1}^{k-a} j}{b-a}\right]$$

$$= \frac{1}{p}\left[\sum_{k=1}^{i-a-1} k - \frac{\sum_{j=1}^{k} j}{b-a}\right] = \frac{1}{p}\left[\sum_{k=1}^{i-a-1}\left[k - \frac{k(k+1)}{2(b-a)}\right]\right]$$

$$= \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{i-a-1}\left[\frac{2b-2a-1}{2(b-a)}k - \frac{k^2}{2(b-a)}\right]$$

$$= \frac{(2b-2a-1)(i-a-1)(i-a)}{4p(b-a)} - \frac{(i-a-1)(i-a)(2i-2a-1)}{12p(b-a)}$$

$$= \frac{(i-a-1)(i-a)}{12p(b-a)}\left[3(2b-2a-1) - (2i-2a-1)\right]$$

$$= \frac{(i-a-1)(i-a)(3b-2a-i-1)}{6p(b-a)}$$

d'où $$v_i = (1-u_i)s_{a,b} - s_{a,i} = \frac{i-a}{b-a}\,\frac{(b-a-1)(2b-2a-1)}{6p} - \frac{(i-a-1)(i-a)(\overbrace{3b-2a-i-1}^{3(b-a)-1-(i-a)})}{6p(b-a)}$$

$$= \frac{i-a}{6p(b-a)}\left[2(b-a)^2 - 3(b-a) + 1 - 3(b-a)(i-a) + (i-a)^2 + 3(b-a) - 1\right]$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{E_i[\tau_a, \tau_a < \tau_b] = \frac{(i-a)(b-i)(2b-a-i)}{6p(b-a)}}$$

de même $$\boxed{E_i[\tau_b, \tau_b < \tau_a] = \frac{(i-a)(b-i)(i+b-2a)}{6p(b-a)}}$$

D'où $$\boxed{E_i(\tau_{ab}) = \frac{(i-a)(b-i)}{2p}}$$

On aurait pu calculer directement $v'_i = E_i(\tau_{ab})$ par une équation similaire :

$$v'_i = 1 + q_i v'_{i-1} + (1-p_i-q_i)v'_i + p_i v'_{i+1}$$

(on remplace u_i par 1 dans l'équation) avec $s'_{a,i} = \sum_{k=a+1}^{i-1}\gamma_k \sum_{j=a+1}^{k}\frac{1}{p_j\gamma_j}$.

→ même forme de solution : $v'_i = s'_{a,b}(1-u_i) - s'_{a,i}$

$= \bar{s}'_{a,b}\,u_i - \bar{s}'_{i,b}$ avec $\bar{s}'_{i,b} = \sum_{k=i}^{b-1}\gamma_k \sum_{j=k+1}^{b-1}\frac{1}{p_j\gamma_j}$

$$v'_i = \left(\underbrace{\sum_{k=a}^{b-1}}_{\sum_{k=a}^{i-1} + \sum_{k=i}^{b-1}} \gamma_k \sum_{j=k+1}^{b-1}\frac{1}{p_j\gamma_j}\right)\frac{\sum_{k=i}^{b-1}\gamma_k}{\sum_{k=a}^{b-1}\gamma_k} - \sum_{k=i}^{b-1}\gamma_k \sum_{j=k+1}^{b-1}\frac{1}{p_j\gamma_j}$$

$$\boxed{E_i(\tau_{ab}) = \left(\sum_{k=a}^{i-1}\gamma_k \sum_{j=k+1}^{b-1}\frac{1}{p_j\gamma_j}\right)\frac{\sum_{k=i}^{b-1}\gamma_k}{\sum_{k=a}^{b-1}\gamma_k} - \left(\sum_{k=i}^{b-1}\gamma_k\sum_{j=k+1}^{b-1}\frac{1}{p_j\gamma_j}\right)\frac{\sum_{k=a}^{i-1}\gamma_k}{\sum_{k=a}^{b-1}\gamma_k}}$$

Faisons $b \to +\infty$. On suppose $\sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k = +\infty$ et $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{p_j \gamma_j} < +\infty$ (chaîne récurrente positive)

pour $i > a$: $$\boxed{\mathbb{E}_i(\tau_a) = \sum_{k=a}^{i-1} \gamma_k \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{p_j \gamma_j}}$$

Exemple : $\begin{cases} p_i = p \\ q_i = q \end{cases}$ $r = \frac{q}{p}$, $\gamma_i = r^i$. $\begin{cases} \sum \gamma_k = +\infty \iff r \geq 1 \iff p \leq q \\ \sum \frac{1}{p_j \gamma_j} < +\infty \iff \frac{1}{r} < 1 \iff p < q \end{cases}$

si $p < q$: $$\mathbb{E}_i(\tau_a) = \sum_{k=a}^{i-1} r^k \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{p r^j}$$
$$= \frac{1}{p} \sum_{k=a}^{i-1} r^k \times \frac{1}{r^k(r-1)}$$
$$= \frac{1}{p(r-1)} (i-a)$$
$$\boxed{\mathbb{E}_i(\tau_a) = \frac{i-a}{q-p}} \text{ si } i > a.$$

si $p \geq q$: $\mathbb{E}_i(\tau_a) = +\infty$.

On peut calculer $\mathbb{E}_i(\tau_a)$ pour $0 \leq i \leq a$ par la même méthode.

Posons $v''_i = \mathbb{E}_i(\tau_a)$.

pour $1 \leq i \leq a-1$: $$v''_i = \mathbb{E}_i(\tau_a \circ \theta_1 + 1) = \sum_j p_{ij} \mathbb{E}_j(\tau_a) + 1$$
$$= p_i v''_{i+1} + (1 - p_i - q_i) v''_i + q_i v''_{i-1} + 1$$
$$\Rightarrow \quad v''_{i+1} - v''_i = \frac{q_i}{p_i} (v''_i - v''_{i-1}) - \frac{1}{p_i}$$

pour $i = 0$: $$v''_0 = \sum_j p_{0j} v''_j + 1 = p_0 v''_1 + (1 - p_0) v''_0 + 1$$
$$\Rightarrow \quad v''_1 - v''_0 = \frac{1}{p_0}$$

Donc $$v''_i - v''_{i-1} = \gamma_{i-1} \underbrace{(v''_1 - v''_0)}_{-\frac{1}{p_0 \gamma_0}} - \gamma_{i-1} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{p_j \gamma_j} = -\gamma_{i-1} \sum_{j=0}^{i-1} \frac{1}{p_j \gamma_j}$$

$$\Rightarrow \quad v''_i - v''_0 = -\sum_{k=0}^{i-1} \gamma_k \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{p_j \gamma_j}$$

Or $v''_a = 0$ donc $v''_0 = \sum_{k=0}^{a-1} \gamma_k \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{p_j \gamma_j}$ et $$\boxed{\mathbb{E}_i(\tau_a) = \sum_{k=i}^{a-1} \gamma_k \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{p_j \gamma_j} \quad 0 \leq i \leq a-1}$$

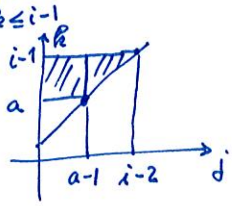
Exemple : $\begin{cases} p_i = ip \\ q_i = iq \end{cases}$ $\quad r = \frac{q}{p}, \quad \gamma_i = r^i \quad$ $\begin{cases} \sum \gamma_k = +\infty \Longleftrightarrow r \geq 1 \\ \sum \frac{1}{p_j \gamma_j} < +\infty \Longleftrightarrow r > 1 \end{cases}$

si $p < q$: pour $i > a$ $\quad \mathbb{E}_i(\tau_a) = \sum_{k=a}^{i-1} r^k \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{p\, j\, r^j}$

$$= \frac{1}{p} \sum_{k=a}^{i-1} r^k \underbrace{\sum_{j=k}^{\infty} \frac{1}{j+1}\left(\frac{p}{q}\right)^{j+1}}_{\begin{cases} \sum_{j=0}^{\infty} - \sum_{j=0}^{k-1} & \text{si } k \geq 1 \ \text{(valable pour } a \geq 1) \\ \sum_{j=0}^{\infty} & \text{si } k = 0 \end{cases}}$$

$$= \frac{1}{p} \sum_{k=a}^{i-1} r^k \left[-\ln\left(1-\frac{p}{q}\right) - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{j+1}\left(\frac{p}{q}\right)^{j+1} \right]$$

$$= -\frac{r^i - r^a}{q-p} \ln\left(1-\frac{p}{q}\right) - \frac{1}{p} \sum_{\substack{0 \leq j \leq k-1 \\ a \leq k \leq i-1}} \sum \frac{1}{j+1}\left(\frac{p}{q}\right)^{j+1}\left(\frac{q}{p}\right)^k$$



or $\displaystyle \sum_{\substack{0 \leq j \leq k-1 \\ a \leq k \leq i-1}} \sum = \sum_{\substack{0 \leq j \leq a-1 \\ a \leq k \leq i-1}} \sum + \sum_{\substack{a \leq j \leq k-1 \\ a \leq k \leq i-1}} \sum$

$$= \sum_{j=0}^{a-1} \sum_{k=a}^{i-1} + \sum_{j=a}^{i-2} \sum_{k=j+1}^{i-1}$$

$$= \sum_{j=0}^{a-1} \frac{1}{j+1}\left(\frac{p}{q}\right)^{j+1} \underbrace{\sum_{k=a}^{i-1} r^k}_{\frac{r^i - r^a}{r-1}} + \sum_{j=a}^{i-2} \frac{1}{j+1}\left(\frac{p}{q}\right)^{j+1} \underbrace{\sum_{k=j+1}^{i-1} r^k}_{\frac{r^i - r^{j+1}}{r-1}}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}_i(\tau_a) = -\frac{r^i - r^a}{q-p} \ln\left(1-\frac{p}{q}\right) - \frac{r^i - r^a}{q-p} \sum_{j=0}^{a-1} \frac{1}{j+1}\left(\frac{p}{q}\right)^{j+1} - \frac{1}{q-p} \underbrace{\sum_{j=a}^{i-2} \frac{1}{j+1}\left(r^{i-j-1} - 1\right)}_{r^i \sum_{j=a}^{i-2} \frac{1}{j+1}\left(\frac{p}{q}\right)^{j+1} - \sum_{j=a}^{i-2} \frac{1}{j+1}}$$

Posons $\displaystyle \varphi(a,x) = \sum_{j=0}^{a-1} \frac{x^{j+1}}{j+1} = \int_0^x \frac{y^a - 1}{y-1}\, dy$ et $\varphi(0,x) = 0$

on trouve $$\boxed{\mathbb{E}_i(\tau_a) = -\frac{r^i - r^a}{q-p}\left[\ln\left(1-\frac{p}{q}\right) + \varphi\left(a, \frac{p}{q}\right)\right] - \frac{1}{q-p}\left[r^i\left(\varphi\left(i-1, \frac{p}{q}\right) - \varphi\left(a, \frac{p}{q}\right)\right) - \left(\varphi(i-1,1) - \varphi(a,1)\right)\right]}$$

pour $a = 0$: $\quad \mathbb{E}_i(\tau_0) = -\frac{r^i - 1}{q-p} \ln\left(1-\frac{p}{q}\right) - \frac{1}{q-p}\left[r^i \varphi\left(i-1, \frac{p}{q}\right) - \varphi(i-1,1)\right]$

pour $i = a+1$: $\quad \mathbb{E}_{a+1}(\tau_a) = -\frac{r^a}{p}\left[\ln\left(1-\frac{p}{q}\right) + \varphi\left(a, \frac{p}{q}\right)\right]$

pour $i = 1, a = 0$: $\quad \mathbb{E}_1(\tau_0) = -\frac{1}{p} \ln\left(1 - \frac{p}{q}\right)$ $\quad$ (temps moyen d'absorption).

Temps de retour : $T_i = \min\{n \geq 1 : X_n = i\}$ (alors que $\tau_i = \min\{n \geq 0 : X_n = i\}$)

$$\mathbb{E}_i(T_i) = \sum_j \underbrace{\mathbb{E}_i(T_i \mid X_1 = j)}_{\substack{\text{si } i=j,\ T_i = 1 \\ \text{si } i \neq j,\ \to \mathbb{E}_j(\tau_i + 1)}} p_{ij}$$

$$= p_{ii} + \sum_{j \neq i} p_{ij} \mathbb{E}_j(\tau_i + 1)$$

$$= 1 + \sum_{j \neq i} p_{ij} \mathbb{E}_j(\tau_i)$$

$$= 1 + q_i \quad \mathbb{E}_{i-1}(\tau_i) + p_i \quad \mathbb{E}_{i+1}(\tau_i)$$

$$= 1 + q_i \quad \gamma_{i-1} \sum_{j=0}^{i-1} \frac{1}{p_j \gamma_j} + p_i \quad \gamma_i \sum_{j=i+1}^{\infty} \frac{1}{p_j \gamma_j}$$

or $\quad p_i \gamma_i = \dfrac{q_1 \cdots q_i}{p_1 \cdots p_{i-1}} = q_i \gamma_{i-1}$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{E}_i(T_i) = 1 + p_i \gamma_i \sum_{j \neq i} \frac{1}{p_j \gamma_j} = p_i \gamma_i \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{p_j \gamma_j} = \frac{1}{\pi_i} \quad (\pi_i : \text{loi stationnaire})$$

$$\boxed{\mathbb{E}_i(T_i) = p_i \gamma_i \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{p_j \gamma_j}}$$

Calcul de $\mathbb{E}_i(\tau_{ab})$ sans passer par $\mathbb{E}_i[\tau_a \mathbb{1}_{\{\tau_a < \tau_b\}}]$ et $\mathbb{E}_i[\tau_b \mathbb{1}_{\{\tau_b < \tau_a\}}]$ pour l'exemple

$\begin{cases} p_i = p \\ q_i = q \end{cases}$, $\quad r = \dfrac{q}{p}$, $\quad \gamma_i = r^i$:

cas $r \neq 1$: $\quad s'_{a,i} = \displaystyle\sum_{k=a+1}^{i-1} r^k \sum_{j=a+1}^{k} \frac{1}{p\, r^j} = \frac{1}{p} \sum_{k=a+1}^{i-1} \frac{r^k}{r^{a+1}} \; \frac{1 - \left(\frac{1}{r}\right)^{k-a}}{1 - \frac{1}{r}}$

$$= \frac{r}{p(r-1)} \left[\sum_{k=0}^{i-a-2} r^k - \frac{1}{r} \sum_{k=a+1}^{i-1} 1 \right]$$

$$= \frac{r}{q-p} \left[\frac{1 - r^{i-a-1}}{1-r} - \frac{i-a-1}{r} \right]$$

$$= \frac{r^{i-a} - (i-a) r + (i-a-1)}{p(r-1)^2}$$

$$v'_i = s'_{ab}(1 - u_i) - s'_{a,i} = \frac{r^i - r^a}{r^b - r^a} \; \frac{r^{b-a} - (b-a) r + (b-a-1)}{p(r-1)^2} - \frac{r^{i-a} - (i-a) r + (i-a-1)}{p(r-1)^2}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{E}_i(\tau_{ab}) = \frac{1}{q-p} \left[(i-a) \frac{r^b - r^i}{r^b - r^a} - (b-i) \frac{r^i - r^a}{r^b - r^a} \right] \qquad (\text{OK})$$

cas $r=1$: $s'_{a,i} = \sum_{k=a+1}^{i-1} \sum_{j=a+1}^{k} \frac{1}{p} = \frac{1}{p} \sum_{k=a+1}^{i-1} (k-a) = \frac{1}{2p} (i-a-1)(i-a)$

$$\sigma'_i = s'_{a,b}(1-u_i) - s'_{a,i} = \frac{1}{2p}\left[\frac{i-a}{b-a}(b-a-1)(b-a) - (i-a-1)(i-a)\right]$$

$$\Longrightarrow \quad E_i(\tau_{ab}) = \frac{(i-a)(b-i)}{2p} \quad (\text{OK})$$

Réversibilité : Supposons la chaîne de naissance-mort récurrente positive (i.e. $\sum_{j=1}^{+\infty} \gamma_j = +\infty$ et $\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{p_j \gamma_j} < +\infty$)

La loi stationnaire est $\pi_j = \frac{c}{p_j \gamma_j}$ avec $c = \frac{1}{\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{p_j \gamma_j}}$.

On a $\pi_i p_{i,i+1} = \pi_i p_i = \frac{c}{\gamma_i}$ et $\pi_{i+1} p_{i+1,i} = \pi_{i+1} q_{i+1} = \frac{c\, q_{i+1}}{\gamma_{i+1} p_{i+1}} = \frac{c}{\gamma_i}$

$\pi_i p_{i,i-1} = \pi_i q_i = \frac{c\, q_i}{\gamma_i p_i} = \frac{c}{\gamma_{i-1}}$ et $\pi_{i-1} p_{i-1,i} = \pi_{i-1} p_{i-1} = \frac{c}{\gamma_{i-1}}$

d'où $\forall i,j$, $\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji}$,

et la loi π est réversible.

Donc toute chaîne de naissance-mort récurrente positive est réversible.

Remarque : $\pi_j = \pi_{j-1} p_{j-1} + \pi_j r_j + \pi_{j+1} q_{j+1}$ est l'équation de balance globale

et $\pi_j p_j = \pi_{j+1} q_{j+1}$ est l'équation de balance locale (réversibilité).

Ex : **Chaîne de Markov avec revenus**

$P = (p_{ij})_{a_i, a_j \in E}$ $\quad S_n$: gains/pertes produits au bout de n pas

$R = (r_{ij})_{a_i, a_j \in E}$ avec $r_{ij} = E(S_1 \mid X_0 = a_i, X_1 = a_j)$: revenu de l'état a_i à a_j en 1 pas

$r^{(n)} = (r_i^{(n)})_{a_i \in E}$ avec $r_i^{(n)} = \underset{a_i}{E}(S_n)$: revenus depuis a_i au bout de n pas.

1) On a $S_n(X_0) = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{revenus} \\ \text{depuis } X_0 \\ \text{en 1 pas}}}{S_1(X_0)} + \underset{\substack{\downarrow \\ \text{revenus} \\ \text{depuis } X_1 \\ \text{en } (n-1) \text{ pas}}}{S_{n-1}(X_1)}$ et $S_1(X_0), S_{n-1}(X_1)$ sachant X_0, X_1 sont indépendant

$$r_i^{(n)} = \underset{a_i}{E}(S_n) = \sum_{a_j \in E} E_{a_i}(S_n \mid X_1 = a_j)\, \mathbb{P}_{a_i}(X_1 = a_j) = \sum_{a_j \in E} p_{ij}\, E\left(S_1(X_0) + S_{n-1}(X_1) \mid X_0 = a_i, X_1 = a_j\right)$$

$$= \sum_{a_j \in E} p_{ij} \left[E\left(S_1 \,\middle|\, \begin{matrix} X_0 = a_i \\ X_1 = a_j \end{matrix}\right) + \underset{a_j}{E}(S_{n-1})\right] = \underbrace{\sum_{a_j \in E} p_{ij}\, r_{ij}}_{v_i} + \sum_{a_j \in E} p_{ij}\, r_j^{(n-1)}$$

En vecteurs-colonne, cela s'écrit encore : $\boxed{r^{(n)} = v + P r^{(n-1)}}$.

2) Fonction génératrice : $g(z) = (g_i(z))_{a_i \in E}$ avec $g_i(z) = \sum_{n=0}^{\infty} r_i^{(n)} z^n$

$$g(z) = r^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} (v + P r^{(n-1)}) z^n = r^{(0)} + \frac{z}{1-z} v + z P\left(\sum_{n=1}^{\infty} r^{(n-1)} z^{n-1}\right) = r^{(0)} + \frac{z}{1-z} v + z P g(z)$$

$$\Rightarrow \boxed{g(z) = (I - zP)^{-1}\left(r^{(0)} + \frac{z}{1-z} v\right)} \quad \text{pour } z \in \mathcal{V}(0).$$

Inversion : $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n P^n \left(r^{(0)} + \left(\sum_{m=1}^{\infty} z^m\right) v\right) = r^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} z^n \left(P^n r^{(0)} + \sum_{k=0}^{n-1} P^k v\right)$ car $\sum_{n=0}^{\infty} z^n P^n \sum_{m=1}^{\infty} z^m$

$$= \sum_{\substack{n \geq 0 \\ m \geq 1}} P^n z^{n+m} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} P^k\right) z^n$$

$$\Rightarrow \boxed{r^{(n)} = P^n r^{(0)} + \sum_{k=0}^{n-1} P^k v}$$

3) ex : $P = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-q & q \end{pmatrix}$, $r^{(0)} = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}$. $r^{(n)} = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix}$

a), b) $(I - zP)^{-1} = \begin{pmatrix} 1-pz & -(1-p)z \\ -(1-q)z & 1-qz \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{(1-z)(1-(p+q-1)z)} \begin{pmatrix} 1-qz & (1-p)z \\ (1-q)z & 1-pz \end{pmatrix}$

$\det(I - zP) = 1 - (p+q)z + (p+q-1)z^2$.

$$\text{or } \begin{cases} \dfrac{1-pz}{(1-z)(1-(p+q-1)z)} = \dfrac{1}{2-p-q}\left[\dfrac{1-p}{1-z} + \dfrac{1-q}{1-(p+q-1)z}\right] \\[2ex] \dfrac{1-qz}{(1-z)(1-(p+q-1)z)} = \dfrac{1}{2-p-q}\left[\dfrac{1-q}{1-z} + \dfrac{1-p}{1-(p+q-1)z}\right] \\[2ex] \dfrac{z}{(1-z)(1-(p+q-1)z)} = \dfrac{1}{2-p-q}\left[\dfrac{1}{1-z} + \dfrac{1}{1-(p+q-1)z}\right] \end{cases}, \quad \frac{1}{(1-z)(1-(p+q-1)z)} = \frac{1}{2-p-q}\left[\frac{1}{1-z} - \frac{p+q-1}{1-(p+q-1)z}\right]$$

$$\boxed{(I - zP)^{-1} = \frac{1}{2-p-q}\left[\frac{1}{1-z}\begin{pmatrix} 1-q & 1-p \\ 1-q & 1-p \end{pmatrix} + \frac{1}{1-(p+q-1)z}\begin{pmatrix} 1-p & p-1 \\ q-1 & 1-q \end{pmatrix}\right]}$$

c) $(I - zP)^{-1} = \dfrac{1}{2-p-q} \sum_{n=0}^{\infty} z^n \left[\begin{pmatrix} 1-q & 1-p \\ 1-q & 1-p \end{pmatrix} + (p+q-1)^n \begin{pmatrix} 1-p & p-1 \\ q-1 & 1-q \end{pmatrix}\right]$

$$\frac{z}{1-z}(I - zP)^{-1} = \frac{1}{2-p-q} \sum_{n=0}^{\infty} z^n \left[n \begin{pmatrix} 1-q & 1-p \\ 1-q & 1-p \end{pmatrix} + \frac{1-(p+q-1)^n}{2-p-q}\begin{pmatrix} 1-p & p-1 \\ q-1 & 1-q \end{pmatrix}\right]$$

$$\Rightarrow \underset{\beta_n}{\alpha_n} = \frac{n}{2-p-q}\left[(1-q)a + (1-p)b\right] + \frac{1-(p+q-1)^n}{(2-p-q)^2}\underset{q-1}{(1-p)}(a-b) + \frac{1}{2-p-q}\left[(1-q)\alpha_0 + (1-p)\beta_0\right] + \frac{(p+q-1)^n}{2-p-q}\underset{q-1}{(1-p)}(\alpha_0 - \beta_0)$$

$$\boxed{\underset{\beta_n}{\alpha_n} = \frac{1}{2-p-q}\left[(1-q)(an + \alpha_0) + (1-p)(bn + \beta_0)\right] + \frac{\overset{q-1}{(1-p)}(a-b)}{(2-p-q)^2} - \frac{(p+q-1)^n}{(2-p-q)^2}\underset{q-1}{(1-p)}\left[(a-b) - (\alpha_0 - \beta_0)(2-p-q)\right]} \quad \frac{\alpha_n}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{(1-q)a + (1-p)b}{2-p-q}$$