Chaînes de Markov à temps continu

Exercice 1 (Chaîne à deux états)

Des appels téléphoniques arrivent dans un central selon un processus de Poisson $(N_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ de paramètre $\lambda > 0$. Chaque appel provient soit de la métropole (type 1) soit de l'étranger (type 2) avec probabilités respectives p et q (p, $q \geqslant 0$, $p+q=1$), indépendamment des autres appels et des instants d'arrivée. Le type du n^{e} appel est donc une v.a. Y_n à valeurs dans $\{1,2\}$ de loi (p,q). Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ le type du dernier appel survenu avant l'instant t.

1. Exprimer X_t à l'aide de N_t et de la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Montrer que $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est une chaîne de Markov dont la fonction matricielle de transition est donnée par

$$P(t) = \begin{pmatrix} p + qe^{-\lambda t} & q - qe^{-\lambda t} \\ p - pe^{-\lambda t} & q + pe^{-\lambda t} \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 (Source binaire)

Une source émet au cours du temps un signal binaire aléatoire $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ à valeurs dans $\{a,b\}$ défini par sa loi initiale qui est la loi de Bernoulli de paramètre p : $\mathbb{P}(X_0 = a) = p$ et $\mathbb{P}(X_0 = b) = 1-p = q$, et $\forall s \in \mathbb{R}^+$, $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ subit N_s sauts sur $[0,s]$ où $(N_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est un processus de Poisson d'intensité λ indépendant de $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$.

1. Montrer que $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est une chaîne de Markov homogène.
2. Calculer les probabilités de transition de la chaîne $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$.
3. En déduire $\mathbb{P}(X_t = a)$ et $\mathbb{P}(X_t = b)$. Pour quelle valeur de p la chaîne $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est-elle stationnaire ?
4. Écrire la matrice de transition de la chaîne à temps discret induite, $(X_{T_n})_{n\in\mathbb{N}}$ où $T_0 = 0$ et $T_{n+1} = \inf\{t > T_n : X_t \neq X_{T_n}\}$.
5. Comparer les comportements asymptotiques des chaînes $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ et $(X_{T_n})_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 3 (Processus de naissance-mort linéaire avec immigration)

Soit λ, μ, $a \geqslant 0$. On considère un processus de naissance-mort $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ de paramètres $\lambda_j = j\lambda + a$ et $\mu_j = j\mu$, $j \in \mathbb{N}$. On pose $M_i(t) = \mathbb{E}_i(X_t)$ et $N_i(t) = \mathbb{E}_i(X_t^2)$.

1. (a) En utilisant les équations progressives de Kolmogorov, trouver une équation différentielle vérifiée par M_i.
   (b) En déduire M_i.
2. (a) Trouver de même une équation différentielle vérifiée par N_i.
   (b) En déduire N_i puis calculer $\operatorname{var}_i(X_t)$ dans le cas où $a = 0$.

Exercice 4 (Processus de naissance-mort linéaire non-homogène)

Soit λ et μ deux fonctions continues sur $\mathbb{R}^+$. On considère un processus de naissance-mort $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ de paramètres dépendant du temps $\lambda_j(t) = j\lambda(t)$ et $\mu_j(t) = j\mu(t)$, $j \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}$. On pose $G_i(t,z) = \sum_{j=0}^{+\infty} p_{ij}(t) z^j$ et $M_i(t) = \mathbb{E}_i(X_t)$

1. En utilisant les équations progressives de Kolmogorov, trouver une équation aux dérivées partielles vérifiée par G_i.
2. On effectue le changement de variables $(x,y) = (f(t), \frac{1}{z-1} - g(t))$ avec $f(t) = \exp\left(\int_0^t [\lambda(s) - \mu(s)]\, ds\right)$ et $g(t) = \displaystyle\int_0^t \lambda(s) \frac{f(t)}{f(s)}\, ds$. Donc $G_i(t,z)$ est de la forme $H(x,y)$.
   (a) Trouver une équation vérifiée par H que l'on résoudra en posant $H(x,y) = \varphi(x, \frac{y}{x})$.
   (b) En déduire G_i en utilisant la condition initiale $G_i(0,z) = z^i$.
3. Déduire de l'expression de G_1 la valeur de $p_{1j}(t)$. Reconnaître la loi de la v.a. $(X_t \mid X_t > 0)$.
4. (a) Calculer la fonction de répartition du temps d'extinction de la population τ_0.
   (b) En déduire la probabilité d'extinction de la population : $\mathbb{P}_i(\tau_0 < +\infty)$. On pourra remarquer que $\displaystyle\int_0^t \frac{\lambda(s)}{f(s)}\, ds = \int_0^t \frac{\mu(s)}{f(s)}\, ds + 1 - \frac{1}{f(t)}$. Réponse : $\left[1 - \dfrac{1}{1 + \int_0^{+\infty} \frac{\mu(s)}{f(s)}\, ds}\right]^i$.
   (c) Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait extinction presque-sûre.

Exercice 5

Soit α, $\beta > 0$. On considère un processus de naissance pure $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ de suite de taux de croissance $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$, vérifiant les relations suivantes :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{ un événement se produit dans } [t,t+\varepsilon] \mid X_t \text{ est pair}) &\underset{\varepsilon\to0^+}{=} \alpha\varepsilon+\mathrm{o}(\varepsilon),\\ \mathbb{P}(\text{ un événement se produit dans } [t,t+\varepsilon] \mid X_t \text{ est impair}) &\underset{\varepsilon\to0^+}{=} \beta\varepsilon+\mathrm{o}(\varepsilon).\end{aligned}$$

On pose $p_n(t)=\mathbb{P}(X_t=n)$, $q(t)=\mathbb{P}(X_t \text{ est pair})$, $r(t)=\mathbb{P}(X_t \text{ est impair})$, puis $M(t)=\mathbb{E}(X_t)$.

1. Montrer les relations suivantes : $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{2n}p_{2n}(t)=\alpha q(t)$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{2n+1}p_{2n+1}(t)=\beta r(t)$.
2. (a) Montrer que les probabilités q et r satisfont au système différentiel $\left\{\begin{array}{rcl} q'(t) &=& -\alpha q(t)+\beta r(t),\\ r'(t) &=& \alpha q(t)-\beta r(t).\end{array}\right.$
   (b) Résoudre le système précédent. On discutera suivant la parité de X_0.
   (c) Calculer $\lim_{t\to+\infty} q(t)$ et $\lim_{t\to+\infty} r(t)$.
3. (a) En utilisant les équations progressives de Kolmogorov, exprimer $M'(t)$ à l'aide de α, β, $q(t)$ et $r(t)$.
   (b) En déduire $M(t)$.

Exercice 6 (Processus de Poisson composé)

I — On considère un système soumis à des chocs, subissant des dommages. Soit $(N_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ le nombre de chocs survenus pendant l'intervalle de temps $[0,t]$, $Y_k\geqslant 0$ le coût du dommage occasionné par le k-ème choc. On pose $Y_0=0$.

La quantité $X_t=\displaystyle\sum_{k=0}^{N_t}Y_k$ représente le coût total des dommages occasionnés sur $[0,t]$. Le système tombe en panne dès que X_t dépasse un seuil critique c ; on note T l'instant où le système tombe en panne. On suppose que $(N_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est un processus de Poisson d'intensité λ, que les Y_k, $k\geqslant 1$, sont des v.a. i.i.d. de moyenne μ, d'écart-type σ et de fonction caractéristique φ, et qu'elles sont indépendantes de $(N_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$.

1. (a) Exprimer la fonction caractéristique de X_t en fonction de φ.
   (b) En déduire $\mathbb{E}(X_t)$ et $\mathrm{var}\,(X_t)$.
2. On suppose que les v.a. Y_k, $k\geqslant 1$, suivent la loi exponentielle de paramètre μ.
   (a) Calculer le MTBF $\mathbb{E}(T)$.
   (b) Exprimer la fiabilité $\mathbb{P}(T>t)$ à l'aide d'une fonction de Bessel. On donne
   $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\,\Gamma(n+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+k}=I_k(x)=I_{-k}(x)\quad\text{et}\quad I_1'=I_0\quad\text{(fonction de Bessel modifiée).}$$

II — On considère à présent deux types de chocs dont les nombres respectifs sur $[0,t]$, $N_1(t)$ et $N_2(t)$, sont des processus de Poisson d'intensité λ_1 et λ_2 indépendants ; ces chocs occasionnent sur la particule des dommages de coûts respectifs Y_j, $1\leqslant j\leqslant N_1(t)$ et Z_k, $1\leqslant k\leqslant N_2(t)$. On pose $Y_0=0$ et $Z_0=0$. On suppose que les v.a. Y_j, $j\geqslant 1$ sont i.i.d. ainsi que les v.a. Z_k, $k\geqslant 1$, et que les suites $(Y_j)_{j\geqslant1}$ et $(Z_k)_{k\geqslant1}$ sont indépendantes.

Les quantités $X_1(t)=\displaystyle\sum_{j=0}^{N_1(t)}Y_j$ et $X_2(t)=\displaystyle\sum_{k=0}^{N_2(t)}Z_k$ représentent respectivement les coûts totaux des dommages dûs aux chocs de type 1 et 2. On note φ_1 et φ_2 les fonctions caractéristiques de Y_1 et Z_1.

1. Exprimer la fonction caractéristique du nombre total de dommages $X_1(t)+X_2(t)$ à l'aide de φ_1 et φ_2.
2. On pose $\psi=\dfrac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\varphi_1+\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\varphi_2$. Interpréter ψ comme la fonction caractéristique d'une v.a. W que l'on identifiera au moyen des v.a. Y_1 et Y_2.
3. Prouver alors que $X_1(t)+X_2(t)$ a même loi que $\displaystyle\sum_{l=0}^{N_t}W_l$ où $W_0=0$, les v.a. W_l, $l\geqslant 1$, sont indépendantes de même loi que W, et $(N_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est un processus de Poisson dont on précisera les paramètres, indépendant de la suite $(W_l)_{l\geqslant1}$.

III Application à un problème de file d'attente. — À une station de taxis, on observe les arrivées de taxis ainsi que les arrivées de clients respectivement modélisées par des processus de Poisson d'intensités λ_1 et λ_2, $(X_1(t))_{t\in\mathbb{R}^+}$ et $(X_2(t))_{t\in\mathbb{R}^+}$. On pose $X_t=X_1(t)-X_2(t)$.

1. Donner une interprétation de X_t.
2. En s'inspirant de la partie précédente, écrire X_t sous la forme $\displaystyle\sum_{l=0}^{N_t}W_l$ où $W_0=0$, les v.a. W_l, $l\geqslant 1$ sont indépendantes suivant une loi de Bernoulli à valeurs dans $\{-1,1\}$ et $(N_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est un processus de Poisson dont on précisera les paramètres, indépendant de la suite $(W_l)_{l\geqslant1}$.
3. Exprimer la loi de X_t à l'aide d'une fonction de Bessel.