chapitre 2

Chaînes de Markov à temps continu

Ex1 (Chaîne à 2 états)

1) On a $X_t = Y_{N_t}$

2) $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov de matrice de transition $Q = (q_{ij})_{1\le i,j\le 2}$ telle que

$$\begin{cases} q_{11} = \mathbb{P}_1(Y_1=1) = p \\ q_{21} = \mathbb{P}_2(Y_1=1) = p \end{cases} \qquad \begin{cases} q_{12} = \mathbb{P}_1(Y_1=2) = q \\ q_{22} = \mathbb{P}_2(Y_2=2) = q \end{cases}$$

(la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est iid)

d'où $Q = \begin{pmatrix} p & q \\ p & q \end{pmatrix}$.

Alors $p_{ij}(t) = \mathbb{P}_i(X_t = j) = \mathbb{P}(Y_{N_t} = j \mid Y_0 = i) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(N_t = n)\,\mathbb{P}(Y_n = j \mid Y_0 = i)$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} q_{ij}^{(n)} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!} \implies P(t) = e^{-\lambda t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\lambda t Q)^n = e^{-\lambda t}\exp(\lambda t Q)$$

or $Q = \begin{pmatrix} 1 & -q \\ 1 & p\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ -1 & 1\end{pmatrix}$ donc $\exp(\lambda t Q) = \begin{pmatrix} 1 & -q \\ 1 & p\end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ -1 & 1\end{pmatrix}$

et $P(t) = \begin{pmatrix} 1 & -q \\ 1 & p\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-\lambda t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ -1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p+qe^{-\lambda t} & q-qe^{-\lambda t} \\ p-pe^{-\lambda t} & q+pe^{-\lambda t}\end{pmatrix}$.

Autre méthode de calcul : $Q^2 = Q$ donc $\forall n\in\mathbb{N}^*, Q^n = Q$

d'où $\exp(\lambda t Q) = I + \left[\lambda t + \frac{(\lambda t)^2}{2!} + \dots\right] Q = I + (e^{\lambda t}-1)Q$ puis $P(t) = e^{-\lambda t} I + (1-e^{-\lambda t})Q$.

généralisation à k provenances différentes : $Q = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_k \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_k \\ \vdots & & & \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_k \end{pmatrix}$ avec $p_1 + \dots + p_k = 1$, $p_i \in]0,1[$.

Q : projecteur $Q^2 = Q$ d'où $P(t) = e^{-\lambda t} I + (1-e^{-\lambda t})Q$.

Ex2 (Source binaire)

1) $\mathbb{P}(X_t = y \mid X_0 = x_0, X_{s_1} = x_1, \dots, X_{s_n} = x_n) = \dfrac{\mathbb{P}(N_{s_1} \text{ sauts de } x_0 \text{ à } x_1,\ N_{s_2}-N_{s_1} \text{ sauts de } x_1 \text{ à } x_2, \dots,\ N_t - N_{s_n} \text{ sauts de } x_n \text{ à } y)}{\mathbb{P}(N_{s_1} \text{ sauts de } x_0 \text{ à } x_1, \dots, N_{s_n}-N_{s_{n-1}} \text{ sauts de } x_{n-1} \text{ à } x_n)}$

$0 < s_1 < \dots < s_n < t$
$x_0, \dots, x_n, y \in \{a, b\}$

$= \mathbb{P}(N_t - N_{s_n} \text{ sauts de } x_n \text{ à } y) = \mathbb{P}(N_{t-s_n} \text{ sauts de } x_n \text{ à } y) = \boxed{\mathbb{P}(X_{t-s_n} = y \mid X_0 = x_n)}$

donc $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est une chaîne de Markov homogène.

2) $\mathbb{P}_x(X_t = y) = \mathbb{P}(N_t \text{ sauts de } x \text{ à } y) = \begin{cases} \text{si } x=y : \mathbb{P}(N_t \text{ pair}) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{2n}}{(2n)!} = e^{-\lambda t}\operatorname{ch}(\lambda t) \\ \text{si } x\ne y : \mathbb{P}(N_t \text{ impair}) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{2n+1}}{(2n+1)!} = e^{-\lambda t}\operatorname{sh}(\lambda t)\end{cases}$

$\to$ fonction matricielle de transition $\boxed{P(t) = e^{-\lambda t}\begin{pmatrix} \operatorname{ch}(\lambda t) & \operatorname{sh}(\lambda t) \\ \operatorname{sh}(\lambda t) & \operatorname{ch}(\lambda t)\end{pmatrix}}$.

Générateur infinitésimal $A = P'(0) = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \lambda & -\lambda\end{pmatrix}$.

3) On a $(\mathbb{P}(X_t = a), \mathbb{P}(X_t = b)) = (p, q)P(t) \implies \begin{cases} \mathbb{P}(X_t = a) = e^{-\lambda t}[p\operatorname{ch}(\lambda t) + q\operatorname{sh}(\lambda t)] = \frac{1}{2} - (\frac{1}{2}-p)e^{-2\lambda t} \\ \mathbb{P}(X_t = b) = e^{-\lambda t}[p\operatorname{sh}(\lambda t) + q\operatorname{ch}(\lambda t)] = \frac{1}{2} + (\frac{1}{2}-p)e^{-2\lambda t}\end{cases}$

Ainsi, la chaîne est stationnaire ssi $\mathbb{P}(X_t = {}^{a}_{b})$ sont indépendants du temps donc ssi $\boxed{p = \frac{1}{2}}$.

4) Chaîne induite : $(X_{T_n})_{n\in\mathbb{N}}$ où $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite des temps de sauts successifs, $T_0 = 0$.

$\mathbb{P}_x(X_{T_1} = y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \ne y \\ 0 & \text{si } x = y\end{cases}$ (T_1 : premier saut) $\implies$ matrice de transition de $(X_{T_n})_{n\in\mathbb{N}}$: $\boxed{Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}}$.

5) $\lim_{t\to+\infty} P(t) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2\end{pmatrix}$ i.e. $X_t \xrightarrow[t\to+\infty]{\mathcal{L}} Y : B(0, \frac{1}{2})$ Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ à valeurs dans $\{a, b\}$

Par contre Q^n n'a pas de limite lorsque $n\to+\infty$ (Q est 2-périodique : $Q^{2n} = I$, $Q^{2n+1} = Q$)

Ex3 (Un processus de naissance pure)

Données : $\begin{cases} \mathbb{P}(X_{t+\varepsilon}-X_t=1 \mid X_t=i) \underset{\varepsilon\to 0^+}{=} \lambda_i\varepsilon+o(\varepsilon) \\ \mathbb{P}(X_{t+\varepsilon}=X_t \mid X_t=i) \underset{\varepsilon\to 0^+}{=} 1-\lambda_i\varepsilon+o(\varepsilon) \\ \mathbb{P}(X_{t+\varepsilon}-X_t \notin\{0,1\} \mid X_t=i) \underset{\varepsilon\to 0^+}{=} o(\varepsilon) \end{cases}$ et $\begin{cases} \mathbb{P}(X_{t+\varepsilon}-X_t=1 \mid X_t \text{ pair}) \underset{\varepsilon\to 0^+}{=} \alpha\varepsilon+o(\varepsilon) \\ \mathbb{P}(X_{t+\varepsilon}-X_t=1 \mid X_t \text{ impair}) \underset{\varepsilon\to 0^+}{=} \beta\varepsilon+o(\varepsilon) \end{cases}$

$(X_t) \nearrow$

1) Préliminaire : Posons $p_n(t)=\mathbb{P}(X_t=n)$, $q(t)=\mathbb{P}(X_t \text{ pair})$, $r(t)=\mathbb{P}(X_t \text{ impair})$

$$\mathbb{P}(X_{t+\varepsilon}-X_t=1 \mid X_t \text{ pair}) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}(X_{t+\varepsilon}-X_t=1 \mid X_t=2n)\,\mathbb{P}(X_t=2n)}{\mathbb{P}(X_t \text{ pair})} \underset{\varepsilon\to 0^+}{=} \frac{1}{q(t)}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{2n}p_{2n}(t)+o(\varepsilon)$$

d'où $\boxed{\alpha q(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{2n}p_{2n}(t)}$.

De même $\boxed{\beta r(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{2n+1}p_{2n+1}(t)}$.

2) a) $q(t+\varepsilon)=\mathbb{P}(X_{t+\varepsilon} \text{ pair}) = \mathbb{P}(X_t \text{ pair et } X_{t+\varepsilon}-X_t \text{ pair}) + \mathbb{P}(X_t \text{ impair et } X_{t+\varepsilon}-X_t \text{ impair})$

$= \mathbb{P}(X_t \text{ pair}, X_{t+\varepsilon}-X_t=0) + \mathbb{P}(X_t \text{ impair}, X_{t+\varepsilon}-X_t=1)+o(\varepsilon)$

$= (1-\alpha\varepsilon)q(t)+\beta\varepsilon r(t)+o(\varepsilon)$

$\Rightarrow \frac{1}{\varepsilon}[q(t+\varepsilon)-q(t)] = -\alpha q(t)+\beta r(t)+o(1) \Rightarrow \boxed{q'(t)=-\alpha q(t)+\beta r(t)}$

De même $r(t+\varepsilon)=\alpha\varepsilon q(t)+(1-\beta\varepsilon)r(t)+o(\varepsilon) \Rightarrow \boxed{r'(t)=\alpha q(t)-\beta r(t)}$

(ou encore avec $r(t)=1-q(t)$)

b) Avec $r=1-q$, $q'(t)=\beta-(\alpha+\beta)q(t)$ donc $q(t)=Ce^{-(\alpha+\beta)t}+\frac{\beta}{\alpha+\beta}$.

si X_0 est pair, $q(0)=1$ et donc $C=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$: $\boxed{\begin{aligned} q(t) &= \frac{\beta}{\alpha+\beta}+\frac{\alpha}{\alpha+\beta}e^{-(\alpha+\beta)t} \\ r(t) &= \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\left[1-e^{-(\alpha+\beta)t}\right] \end{aligned}}$

si X_0 est impair, $q(0)=0$ et donc $C=-\frac{\beta}{\alpha+\beta}$: $\boxed{\begin{aligned} q(t) &= \frac{\beta}{\alpha+\beta}\left[1-e^{-(\alpha+\beta)t}\right] \\ r(t) &= \frac{\alpha}{\alpha+\beta}+\frac{\beta}{\alpha+\beta}e^{-(\alpha+\beta)t} \end{aligned}}$

c) $\boxed{\lim_{t\to+\infty} q(t)=\frac{\beta}{\alpha+\beta}, \quad \lim_{t\to+\infty} r(t)=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}$

3) $M(t)=E(X_t)=\sum_{n=0}^{\infty} n\,p_n(t)$.

D'après les équations progressives de Kolmogorov : $p_n'(t)=\lambda_{n-1}p_{n-1}(t)-\lambda_n p_n(t)$, $n\geq 1$,

$$M'(t)=\sum_{n=1}^{\infty} n\lambda_{n-1}p_{n-1}(t)-\sum_{\substack{n=1\\ \text{ou } 0}}^{\infty} n\lambda_n p_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+1)\lambda_n p_n(t)-n\lambda_n p_n(t)\right]$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n p_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{2n}p_{2n}(t)+\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_{2n+1}p_{2n+1}(t)$$

$$=\alpha q(t)+\beta r(t) = (\alpha-\beta)q(t)+\beta$$

$$=\begin{cases} \frac{\alpha(\alpha-\beta)}{\alpha+\beta}e^{-(\alpha+\beta)t}+\frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta} & \text{si } X_0 \text{ est pair} \\ \frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}-\frac{\beta(\alpha-\beta)}{\alpha+\beta}e^{-(\alpha+\beta)t} & \text{si } X_0 \text{ est impair} \end{cases}$$

d'où $\boxed{M(t)=M(0)+\frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}t+\begin{cases} \frac{\alpha(\alpha-\beta)}{(\alpha+\beta)^2}\left[1-e^{-(\alpha+\beta)t}\right] & \text{si } X_0 \text{ est pair} \\ \frac{\beta(\beta-\alpha)}{(\alpha+\beta)^2}\left[1-e^{-(\alpha+\beta)t}\right] & \text{si } X_0 \text{ est impair} \end{cases}}$

ex4 (processus de naissance-mort linéaire avec immigration)

$$\begin{cases}\lambda_j = j\lambda + a \\ \mu_j = j\mu\end{cases} \quad j\geq 0$$

1. a) Equations progressives de Kolmogorov : $\begin{cases} p'_{i0}(t) = -\lambda_0 p_{i0}(t) + \mu_1 p_{i1}(t) \\ p'_{ij}(t) = \lambda_{j-1}p_{ij-1}(t) - (\lambda_j+\mu_j)p_{ij}(t) + \mu_{j+1}p_{ij+1}(t), \ j\geq 1\end{cases}$

$$M_i(t) = E_i(X_t) = \sum_{j=1}^\infty j p_{ij}(t)$$

$$M'_i(t) = \sum_{j=1}^\infty j[\lambda_{j-1}p_{ij-1}(t) - (\lambda_j+\mu_j)p_{ij}(t) + \mu_{j+1}p_{ij+1}(t)] = \sum_{j=0}^\infty (j+1)\lambda_j p_{ij}(t) - \sum_{\substack{j=1\\ \text{ou } 0}}^\infty j(\lambda_j+\mu_j)p_{ij}(t) + \sum_{\substack{j=2\\ \text{ou } 1 \text{ ou } 0}}^\infty (j-1)\mu_j p_{ij}(t)$$

$$= \sum_{j=0}^\infty (\lambda_j - \mu_j)p_{ij}(t) = (\lambda-\mu)\sum_{j=0}^\infty j p_{ij}(t) + a\sum_{j=0}^\infty p_{ij}(t) \qquad (\mu_0=0)$$

$\boxed{M'_i(t) = (\lambda-\mu)M_i(t) + a}$ (en admettant que $\sum_{j=0}^\infty p_{ij}(t)=1$)

b) avec $M_i(0) = E_i(X_0) = i$ on trouve $\boxed{\begin{array}{l}\text{pour } \lambda\neq\mu : \ M_i(t) = \left(i + \frac{a}{\lambda-\mu}\right)e^{(\lambda-\mu)t} - \frac{a}{\lambda-\mu} \\ \text{et pour } \lambda=\mu : \ M_i(t) = at+i\end{array}}$

2. a) $N_i(t) = E_i(X_t^2) = \sum_{j=1}^\infty j^2 p_{ij}(t)$.

De la même manière :

$$N'_i(t) = \sum_{j=0}^\infty (j+1)^2\lambda_j p_{ij}(t) - \sum_{\substack{j=1\\ \text{ou } 0}}^\infty j^2(\lambda_j+\mu_j)p_{ij}(t) + \sum_{\substack{j=2\\ \text{ou } 1 \text{ ou } 0}}^\infty (j-1)^2\mu_j p_{ij}(t)$$

$$= \sum_{j=0}^\infty[(2j+1)\lambda_j - (2j-1)\mu_j]\,p_{ij}(t) = \sum_{j=0}^\infty [2j(\lambda_j-\mu_j) + (\lambda_j+\mu_j)]\,p_{ij}(t)$$

$$= \sum_{j=0}^\infty [2(\lambda-\mu)j^2 + (\lambda+\mu+2a)j + a]\,p_{ij}(t)$$

$$\boxed{N'_i(t) = 2(\lambda-\mu)N_i(t) + (\lambda+\mu+2a)M_i(t) + a}$$

b) cas sans immigration $a=0$: $\begin{cases}N'_i(t) = 2(\lambda-\mu)N_i(t) + (\lambda+\mu)i\,e^{(\lambda-\mu)t}\\ N_i(0)=i^2\end{cases}$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{pour } \lambda\neq\mu : \ N_i(t) = i\left(i+\frac{\lambda+\mu}{\lambda-\mu}\right)e^{2(\lambda-\mu)t} - i\,\frac{\lambda+\mu}{\lambda-\mu}\,e^{(\lambda-\mu)t} \\ \text{pour } \lambda=\mu : \ N_i(t) = 2\lambda i t + i^2\end{array}}$$

D'où $var_i(X_t) = N_i(t) - M_i(t)^2 = \begin{cases} i\,\frac{\lambda+\mu}{\lambda-\mu}\left[e^{2(\lambda-\mu)t} - e^{(\lambda-\mu)t}\right] & \text{si } \lambda\neq\mu \\ 2i\lambda t & \text{si } \lambda=\mu .\end{cases}$

---

ex5 (processus de naissance-mort linéaire non-homogène)

$$\begin{cases}\lambda_j(t) = j\lambda(t) \\ \mu_j(t) = j\mu(t)\end{cases} \quad j\geq0 \qquad G_i(t,z) = \sum_{j=0}^\infty p_{ij}(t)z^j, \quad M_i(t) = E_i(X_t)$$

1. a) Equations progressives de Kolmogorov : $P'(t) = P(t)A(t) \Rightarrow \begin{cases} p'_{i0}(t) = -\lambda_0(t)p_{i0}(t) + \mu_1(t)p_{i1}(t) \\ p'_{ij}(t) = \lambda_{j-1}(t)p_{ij-1}(t) - (\lambda_j(t)+\mu_j(t))p_{ij}(t) + \mu_{j+1}(t)p_{ij+1}(t)\end{cases}$

$$\frac{\partial G_i}{\partial t}(t,z) = \sum_{j=0}^\infty p'_{ij}(t)z^j = \sum_{j=1}^\infty \lambda_{j-1}(t)p_{ij-1}(t)z^j - \sum_{j=0}^\infty[\lambda_j(t)+\mu_j(t)]p_{ij}(t)z^j + \sum_{j=0}^\infty \mu_{j+1}(t)p_{ij+1}(t)z^j$$

$$= (z-1)\sum_{j=0}^\infty \underbrace{\lambda_j(t)}_{\lambda(t)j}p_{ij}(t)z^j - \left(1-\frac1z\right)\sum_{j=0}^\infty\underbrace{\mu_j(t)}_{\mu(t)j}p_{ij}(t)z^j$$

$$= (z-1)\left[\lambda(t) - \frac{\mu(t)}{z}\right]\underbrace{\sum_{j=0}^\infty j\,p_{ij}(t)z^j}_{-z-} \rightarrow z\frac{\partial G_i}{\partial z}(t,z) \Rightarrow \boxed{\frac{\partial G_i}{\partial t}(t,z) = (z-1)(\lambda(t)z - \mu(t))\frac{\partial G_i}{\partial z}(t,z)}$$

2. a) On pose $G_i(t,z) = H\left(f(t), \frac{1}{z-1} - g(t)\right)$ avec $\begin{cases} f(t) = e^{\int_0^t (\lambda(s)-\mu(s))\,ds} \\ g(t) = \int_0^t \lambda(s) \frac{f(t)}{f(s)}\,ds \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} f'(t) = (\lambda(t)-\mu(t))f(t) \\ g'(t) = \lambda(t) + \frac{f'(t)\,g(t)}{f(t)} \end{array}$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial G_i}{\partial t}(t,z) = [\lambda(t)-\mu(t)]\,f(t)\,\dfrac{\partial H}{\partial x}(x,y) - \Big[\lambda(t) + \underbrace{\dfrac{f'(t)g(t)}{f(t)}}_{[\lambda(t)-\mu(t)]g(t)}\Big]\dfrac{\partial H}{\partial y}(x,y) \\[2ex] \dfrac{\partial G_i}{\partial z}(t,z) = -\dfrac{1}{(z-1)^2}\,\dfrac{\partial H}{\partial x}(x,y) \end{cases}$$

Equation du 1. $\Rightarrow$ $[\lambda(t)-\mu(t)]f(t)\frac{\partial H}{\partial x}(x,y) - [\lambda(t) + (\lambda(t)-\mu(t))g(t)]\frac{\partial H}{\partial y}(x,y) = -\frac{\lambda(t)z-\mu(t)}{z-1}\frac{\partial H}{\partial y}(x,y)$

$$\Rightarrow [\lambda(t)-\mu(t)]f(t)\frac{\partial H}{\partial x}(x,y) - \Big[\underbrace{\lambda(t) + (\lambda(t)-\mu(t))g(t) - \frac{\lambda(t)z-\mu(t)}{z-1}}_{\frac{\mu(t)-\lambda(t)}{z-1} + [\lambda(t)-\mu(t)]g(t) = [\lambda(t)-\mu(t)]\left[g(t)-\frac{1}{z-1}\right]}\Big]\frac{\partial H}{\partial y}(x,y) = 0$$

$$\Rightarrow f(t)\frac{\partial H}{\partial x}(x,y) - \left(g(t)-\frac{1}{z-1}\right)\frac{\partial H}{\partial y}(x,y) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x\frac{\partial H}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial H}{\partial y}(x,y) = 0}$$

b) Posons $H(x,y) = \varphi(u,v)$ où $u = x$, $v = \frac{x}{y}$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v) + \dfrac{1}{y}\dfrac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v) \\[1ex] \dfrac{\partial H}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{x}{y^2}\dfrac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v) \end{cases} \qquad x\frac{\partial H}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial H}{\partial y}(x,y) = x\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v) = 0 \Rightarrow \varphi(u,v) = \psi(v)$$

d'où $G_i(t,z) = \psi\left(\dfrac{f(t)}{\frac{1}{z-1} - g(t)}\right)$. Or $G_i(0,z) = z^i$, $f(0) = 1$, $g(0) = 0$ donc $\psi\left(\frac{1}{z-1}\right) = z^i$

soit $\psi(z) = \left(1 + \frac{1}{z}\right)^i$

donc $$\boxed{G_i(t,z) = \left[\frac{[1-f(t)+g(t)] + [f(t)-g(t)]z}{[1+g(t)] - g(t)z}\right]^i}$$

si $\mu = 0$, $g(t) = \int_0^t \underbrace{\lambda(s)e^{-\int_0^s \lambda}}_{-\frac{d}{ds}\left(e^{-\int_0^s \lambda}\right)} ds \cdot f(t) = f(t) - 1$

et $\boxed{G_i(t,z) = \left[\frac{\tilde{f}(t)\,z}{1-(1-\tilde{f}(t))z}\right]^i}$ avec $\tilde{f}(t) = \frac{1}{f(t)} = e^{-\int_0^t \lambda(s)ds}$

3. $G_1(t,z) = \sum_{j=0}^{\infty} P_{1j}(t) z^j = \dfrac{[1-f(t)+g(t)] + [f(t)-g(t)]z}{[1+g(t)] - g(t)z} = \dfrac{(1-f(t)+g(t)) + (f(t)-g(t))z}{1+g(t)} \sum_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{g(t)}{1+g(t)}\right)^n z^n$

$$= \frac{1-f(t)+g(t)}{1+g(t)} + \frac{1}{1+g(t)}\sum_{n=1}^{\infty}\Bigg[\underbrace{\left[\frac{g(t)}{1+g(t)}\right]^n [1-f(t)+g(t)] + \left[\frac{g(t)}{1+g(t)}\right]^{n-1}[f(t)-g(t)]}_{\left[\frac{g(t)}{1+g(t)}\right]^{n-1}\Big[\underbrace{f(t)-g(t) + \frac{g(t)}{1+g(t)}(1-f(t)+g(t))}_{\frac{f(t)}{1+g(t)}}\Big]}\Bigg] z^n$$

$$\boxed{G_1(t,z) = \frac{1-f(t)+g(t)}{1+g(t)} + \frac{f(t)}{[1+g(t)]^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{g(t)}{1+g(t)}\right]^{n-1} z^n}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P_{10}(t) = \dfrac{1-f(t)+g(t)}{1+g(t)} = 1 - \dfrac{f(t)}{1+g(t)} \\[1ex] P_{1j}(t) = \dfrac{f(t)}{1+g(t)}\,\dfrac{1}{1+g(t)}\left[\dfrac{g(t)}{1+g(t)}\right]^{j-1}, \quad j \geq 1 \end{cases}$$

Donc sous $\mathbb{P}_1$, X_t suit une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{1+g(t)}$ modifiée en 0

et $\mathbb{P}_1(X_t = j \mid X_t > 0) = \dfrac{P_{1j}(t)}{1-P_{10}(t)} = \dfrac{1}{1+g(t)}\left[\dfrac{g(t)}{1+g(t)}\right]^{j-1}$, $j \geq 1$ d'où $\boxed{(X_t \mid X_t > 0) : \mathcal{G}\left(\frac{1}{1+g(t)}\right)}$

4\. a) Fonction de répartition du temps d'extinction :

$$P_i(\tau_0 \leq t) = P_i(X_t = 0) = p_{i0}(t) = G_i(t,0) = \left[\frac{1-f(t)+g(t)}{1+g(t)}\right]^i = \boxed{\left[1 - \frac{f(t)}{1+g(t)}\right]^i} \quad (= p_{10}(t)^i)$$

b) On a
$$\frac{f(t)}{1+g(t)} = \frac{f(t)}{1+f(t)\int_0^t \frac{\lambda(s)}{f(s)}ds} = \frac{1}{\int_0^t \frac{\lambda(s)}{f(s)}ds + \frac{1}{f(t)}}$$

or
$$\int_0^t \frac{\lambda(s)-\mu(s)}{f(s)}ds = \int_0^t \frac{f'(s)}{f(s)^2}ds = \frac{1}{f(0)} - \frac{1}{f(t)} = 1 - \frac{1}{f(t)} \implies \int_0^t \frac{\lambda(s)}{f(s)}ds + \frac{1}{f(t)} = \int_0^t \frac{\mu(s)}{f(s)}ds + 1$$

donc
$$\frac{f(t)}{1+g(t)} = \frac{1}{\int_0^t \frac{\mu(s)}{f(s)}ds + 1}.$$

D'où la probabilité d'extinction :
$$P_i(\tau_0 < \infty) = \lim_{t\to\infty} p_{i0}(t) = \boxed{\left[1 - \frac{1}{\int_0^\infty \frac{\mu(s)}{f(s)}ds + 1}\right]^i}$$

c) extinction p.s. $\iff P_i(\tau_0<\infty) = 1 \iff \dfrac{1}{\int_0^{+\infty} \frac{\mu(s)}{f(s)}ds+1} = 0 \iff \boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\mu(s)}{f(s)}ds = +\infty}$.

Complément : cas $\lambda(t) = \lambda$, $\mu(t) = \mu$ (processus de naissance-mort linéaire homogène)

- si $\lambda \neq \mu$: $f(t) = e^{(\lambda-\mu)t}$, $g(t) = \lambda \int_0^t e^{(\lambda-\mu)(t-s)}ds = \lambda \dfrac{e^{(\lambda-\mu)t}-1}{\lambda-\mu}$

$$G_i(t,z) = \left[\frac{\mu[e^{(\lambda-\mu)t}-1] + [\lambda - \mu e^{(\lambda-\mu)t}]z}{[\lambda e^{(\lambda-\mu)t} - \mu] - \lambda[e^{(\lambda-\mu)t}-1]z}\right]^i \qquad \begin{cases} f(t)-g(t) = \dfrac{\lambda - \mu e^{(\lambda-\mu)t}}{\lambda-\mu} \\ 1-f(t)+g(t) = \dfrac{\mu[1-e^{(\lambda-\mu)t}]}{\lambda-\mu} \\ 1+g(t) = \dfrac{\lambda e^{(\lambda-\mu)t}-\mu}{\lambda-\mu} \end{cases}$$

soit, en posant $A(t) = \dfrac{e^{(\lambda-\mu)t}-1}{\lambda e^{(\lambda-\mu)t}-\mu}$ $\left(\iff e^{(\lambda-\mu)t} = \dfrac{\mu A(t)-1}{\lambda A(t)-1}\right)$: $G_i(t,z) = \left[\dfrac{\mu A(t) + (1-\lambda-\mu)A(t)z}{1-\lambda A(t)z}\right]$

$$p_{1j}(t) = \begin{cases} \dfrac{\mu[e^{(\lambda-\mu)t}-1]}{\lambda e^{(\lambda-\mu)t}-\mu} = \mu A(t) & \text{si } j=0 \\ (\lambda-\mu)^2 e^{(\lambda-\mu)t} \dfrac{[\lambda(1-e^{(\lambda-\mu)t})]^{j-1}}{[\mu - \lambda e^{(\lambda-\mu)t}]^j} & \text{si } j \geq 1 \\ = [1-\mu A(t)][1-\lambda A(t)][\lambda A(t)]^{j-1} & \end{cases}$$

$$p_{i0}(t) = p_{10}(t)^i = [\mu A(t)]^i$$

$$P_i(\tau_0<\infty) = \left[1 - \frac{1}{\underbrace{\mu\int_0^\infty e^{(\mu-\lambda)s}ds}_{\begin{cases}\frac{1}{\lambda-\mu} \text{ si } \lambda>\mu \\ +\infty \text{ si } \lambda<\mu\end{cases}}+1}\right]^i = \left\{\begin{matrix} \left[1-\frac{\lambda-\mu}{\lambda}\right] = \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^i & \text{si } \mu<\lambda \\ 1 & \text{si } \mu>\lambda \end{matrix}\right\} = \left(1 \wedge \frac{\mu}{\lambda}\right)^i.$$

$(\lambda \neq \mu)$

- si $\lambda = \mu$: $f(t) = 1$, $g(t) = \lambda\int_0^t 1\,ds = \lambda t$ $\quad \begin{cases} f(t)-g(t) = 1-\lambda t \\ 1-f(t)+g(t) = \lambda t \\ 1+g(t) = 1+\lambda t \end{cases}$

$$G_i(t,z) = \left[\frac{\lambda t + (1-\lambda t)z}{(1+\lambda t) - \lambda t z}\right]^i$$ soit, en posant $A(t) = \dfrac{t}{\lambda t+1}$ $\left(\iff t = \dfrac{A(t)}{1-\lambda A(t)}\right)$

$$G_i(t,z) = \left[\frac{\lambda A(t) + (1-2\lambda A(t))z}{1-\lambda A(t)z}\right]^i$$

$$p_{1j}(t) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{1+\lambda t} = \lambda A(t) & \text{si } j=0 \\ \dfrac{1}{(1+\lambda t)^2}\left[\dfrac{\lambda t}{\lambda t+1}\right]^{j-1} & \text{si } j\geq 1 \\ = [1-\lambda A(t)]^2[\lambda A(t)]^{j-1} & \end{cases}$$

$$p_{i0}(t) = p_{10}(t)^i = [\lambda A(t)]^i$$
$$P_i(\tau_0<\infty) = \left[1 - \frac{1}{\lambda\underbrace{\int_0^\infty 1\,ds}_{\infty}+1}\right]^i = 1.$$

complément : processus de naissance pure non-homogène général

$(N_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$: processus de Markov croissant à valeurs dans $\mathbb{N}$.

$p_{ij}(s,t) = \mathbb{P}(N_t = j \mid N_s = i)$ pour $i \le j$ vérifiant $\begin{cases} p_{i,i+1}(s,s+\varepsilon) = \lambda_i(s)\varepsilon + o(\varepsilon) \\ p_{i,i}(s,s+\varepsilon) = 1-\lambda_i(s)\varepsilon + o(\varepsilon) \\ p_{i,j}(s,s+\varepsilon) = o(\varepsilon),\ j\ge i+2 \end{cases}$

$\Rightarrow$ équation forward : $\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} p_{ij}(s,t) = -\lambda_j(t) p_{ij}(s,t) + \lambda_{j-1}(t) p_{i,j-1}(s,t) \quad \text{pour } j \ge i+1 \\ \dfrac{\partial}{\partial t} p_{ii}(s,t) = -\lambda_i(t) p_{ii}(s,t) \\ p_{ij}(s,s) = \delta_{ij} \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} p_{ii}(s,t) = e^{-\int_s^t \lambda_i(u)du} \\ p_{ij}(s,t) = \int_s^t \lambda_{j-1}(u)\, p_{i,j-1}(s,u)\, e^{-\int_u^t \lambda_j(v)dv}\, du \end{cases}$$

Soit $\tau_n = \inf\{t \ge 0 : N_t = n\}$: instant du n^e saut de $(N_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$

$= \inf\{t > \tau_{n-1} : N_t - N_{\tau_{n-1}} = 1\}$

On a $N_{\tau_n} = n$ et $T_n = \tau_{n+1} - \tau_n$ est le laps de temps séparant les n^e et $(n+1)^e$ sauts.

$$\mathbb{P}(T_n > t \mid \tau_n = s) = \mathbb{P}(N_{t+s} - N_s = 0 \mid \tau_n = s) = \frac{\mathbb{P}(N_{s^-} = n-1, N_s = n, N_{s+t} = n)}{\mathbb{P}(N_{s^-} = n-1, N_s = n)}$$

$$= \mathbb{P}(N_{s+t} = n \mid N_s = n) = p_{nn}(s,s+t) = e^{-\int_s^{s+t}\lambda_n(u)du}$$

pour $s<t$: $$\mathbb{P}(T_n > t \mid \tau_n = \sigma \text{ et } T_n > s) = \frac{\mathbb{P}(T_n > t \mid \tau_n = \sigma)}{\mathbb{P}(T_n > s \mid \tau_n = \sigma)} = \frac{e^{-\int_\sigma^{\sigma+t}\lambda_n(u)du}}{e^{-\int_\sigma^{\sigma+s}\lambda_n(u)du}} = e^{-\int_{\sigma+s}^{\sigma+t}\lambda_n(u)du}$$

$$= \mathbb{P}(T_n > t-s \mid \tau_n = \sigma+s)$$

Ex : 1) si $\lambda_n(t) = \lambda_n$ (processus de naissance homogène) :

1) T_n et τ_n sont indépendantes et $T_n \sim \mathcal{E}(\lambda_n)$
(puisque $\mathbb{P}(T_n > t \mid \tau_n = s) = e^{-\lambda_n t}$)

2) Les T_n sont indépendantes :
e.g. $\mathbb{P}(T_{n+1} > t, T_n > s) = \mathbb{P}(T_{n+1} > t, T_n > s \mid \tau_n = \sigma)$
$= \mathbb{P}(T_{n+1} > t \mid \tau_n = \sigma, T_n > s)\, \mathbb{P}(T_n > s \mid \tau_n = \sigma)$
$= \mathbb{P}(T_{n+1} > t \mid \tau_{n+1} > \sigma + s, \tau_n = \sigma)\, \mathbb{P}(T_n > s)$
$= \mathbb{P}(T_{n+1} > t)\, \mathbb{P}(T_n > s)$.

$$p_{ii}(s,t) = e^{-\lambda_i(t-s)}$$
$$p_{ij}(s,t) = \lambda_{j-1} e^{-\lambda_j(t-s)} \int_0^{t-s} p_{i,j-1}(u) e^{\lambda_j u}\, du$$

Transformation d'un processus non-homogène en processus homogène.

Soit $\tilde{N}_t = N_{\varphi^{-1}(t)}$ avec $\varphi \nearrow$, $\varphi(0)=0$, $\varphi^{-1}(t) = \inf\{s \geq 0 : \varphi(s) = t\}$.

Alors $(\tilde{N}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est une chaîne de Markov avec probabilités de transition

$$\tilde{p}_{ij}(s,t) = \mathbb{P}(\tilde{N}_t = j \mid \tilde{N}_s = i) = p_{ij}(\varphi^{-1}(s), \varphi^{-1}(t)).$$

φ est dit temps opérationnel si $(\tilde{N}_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est homogène.

Lemme : $\boxed{(N_t)_{t\in\mathbb{R}^+} \text{ homogène} \iff \text{il existe des constantes } (c_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ telles que } \forall n\in\mathbb{N}, \forall s,t>0 \ \ p_{nn}(s,t) = e^{-c_n(t-s)}.}$

Dém : • Si $(N_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est homogène, c'est vrai avec $c_n = \lambda_n$.

• Si $p_{nn}(s,t) = e^{-c_n(t-s)}$ alors $p_{nn}(s,s+\varepsilon) = e^{-c_n\varepsilon} = 1 - c_n\varepsilon + o(\varepsilon)$

$\Rightarrow$ définition d'une chaîne homogène. □

Théorème : $\boxed{(N_t)_{t\in\mathbb{R}^+} \text{ admet un temps opérationnel} \iff \text{les } \lambda_n(t) \text{ sont de la forme } \lambda_n(t) = \lambda_n \cdot \alpha(t)}$

Dém : • si $\lambda_n(t) = \lambda_n \cdot \alpha(t)$, soit $\varphi(t) = \int_0^t \alpha(s)\,ds$

$$\tilde{p}_{nn}(s,t) = p_{nn}(\varphi^{-1}(s), \varphi^{-1}(t)) = e^{-\int_{\varphi^{-1}(s)}^{\varphi^{-1}(t)} \lambda_n(u)\,du}$$

$$= e^{-\lambda_n[\varphi(\varphi^{-1}(t)) - \varphi(\varphi^{-1}(s))]} = e^{-\lambda_n(t-s)}$$

$\Rightarrow \varphi$ temps opérationnel.

• soit φ un temps opérationnel. $\exists (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\tilde{p}_{nn}(s,t) = e^{-c_n(t-s)}$.

On a $\tilde{p}_{nn}(0,\varphi(t)) = e^{-c_n\varphi(t)}$

et d'autre part $\tilde{p}_{nn}(0,\varphi(t)) = p_{nn}(0,t)$ si $\varphi^{-1}(\varphi(t)) = t$

$$= e^{-\int_0^t \lambda_n(u)\,du}$$

$\Rightarrow c_n\varphi(t) = \int_0^t \lambda_n(u)\,du$ p.p.

$\Rightarrow \lambda_n(t) = c_n \cdot \varphi'(t)$ de la forme $\lambda_n \cdot \alpha(t)$. □

2) si $\lambda_n(t) = \lambda_n = an + b$ (croissance linéaire avec immigration, processus de Yule)

• $a = 0$, $\lambda_n = \lambda$:

$$p_{ii}(t) = e^{-\lambda t}$$
$$p_{i,i+1}(t) = \lambda e^{-\lambda t} \int_0^t p_{ii}(u) e^{\lambda u}\,du = \lambda t\, e^{-\lambda t}$$
$$p_{i,i+2}(t) = \lambda e^{-\lambda t} \int_0^t p_{i,i+1}(u) e^{\lambda u}\,du = \frac{(\lambda t)^2}{2} e^{-\lambda t}$$

...

$$\Rightarrow \boxed{p_{ij}(t) = \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} e^{-\lambda t}}, \quad j \geq i$$

→ processus de Poisson.

• $a \neq 0$:
($\lambda_{n+1} - \lambda_n = a$)

$$p_{ii}(t) = e^{-\lambda_i t}$$
$$p_{i,i+1}(t) = \lambda_i e^{-\lambda_{i+1} t} \int_0^t p_{ii}(u) e^{\lambda_{i+1} u}\,du = \lambda_i e^{-\lambda_{i+1} t} \times \frac{e^{at} - 1}{a}$$
$$p_{i,i+2}(t) = \lambda_{i+1} e^{-\lambda_{i+2} t} \int_0^t \underbrace{p_{i,i+1}(u) e^{\lambda_{i+2} u}}_{\lambda_i \frac{e^{au}(e^{au}-1)}{a}}\,du = \lambda_i \lambda_{i+1} e^{-\lambda_{i+2} t} \times \frac{1}{2}\left(\frac{e^{at}-1}{a}\right)^2$$

...

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} p_{ij}(t) = \lambda_i \lambda_{i+1} \cdots \lambda_{j-1}\, e^{-\lambda_j t}\, \dfrac{1}{(j-i)!} \left(\dfrac{e^{at}-1}{a}\right)^{j-i}, \quad j \geq i+1 \\ \text{et} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{tant que } \lambda_{j-1} \geq 0 \\ p_{ii}(t) = e^{-\lambda_i t} \end{array}}$$

si $a > 0$ (taux de croissance λ_n croissant $\Rightarrow$ ($n \to p_{n\,n+1} \nearrow$) et $E(T_n) = \frac{1}{\lambda_n} \downarrow$)

$$p_{ij}(t) = \frac{\lambda_i(\lambda_i + a) \cdots (\lambda_i + (j-i-1)a)}{(j-i)!\, a^{j-i}} e^{-(\lambda_i + (j-i)a)t} \left(e^{at} - 1\right)^{j-i}$$

$$= \frac{1}{(j-i)!} \times \frac{\lambda_i}{a}\left(\frac{\lambda_i}{a} + 1\right) \cdots \left(\frac{\lambda_i}{a} + (j-i-1)\right) \left(e^{-at}\right)^{\frac{\lambda_i}{a}} \left(1 - e^{-at}\right)^{j-i}$$

$$\Rightarrow \boxed{p_{ij}(t) = C^{j-i}_{\frac{\lambda_i}{a} + j - i - 1} \left(e^{-at}\right)^{\frac{\lambda_i}{a}} \left(1 - e^{-at}\right)^{j-i}} \quad j \geq i \geq 0$$

loi de type Pascal

si $a < 0$ (taux de croissance λ_n décroissant $\Rightarrow E(T_n) = \frac{1}{\lambda_n} \nearrow$ et le processus va s'arrêter lorsque $\lambda_n > \frac{b}{\alpha}$)

posons $a = -\alpha > 0$:

$$p_{ij}(t) = \frac{\lambda_i(\lambda_i - \alpha) \cdots (\lambda_i - (j-i-1)\alpha)}{(j-i)!} e^{-(\lambda_i - (j-i)\alpha)t} \left(\frac{e^{-\alpha t} - 1}{-\alpha}\right)^{j-i}$$

$$= \frac{1}{(j-i)!} \frac{\lambda_i}{\alpha}\left(\frac{\lambda_i}{\alpha} - 1\right) \cdots \left(\frac{\lambda_i}{\alpha} - (j-i-1)\right) \left(e^{-\alpha t}\right)^{\frac{\lambda_i}{\alpha} - (j-i)} \left(1 - e^{-\alpha t}\right)^{j-i}$$

$$\Rightarrow \boxed{p_{ij}(t) = C^{j-i}_{\frac{\lambda_i}{\alpha}} \left(e^{-\alpha t}\right)^{\frac{\lambda_i}{\alpha} - (j-i)} \left(1 - e^{-\alpha t}\right)^{j-i}} \quad 0 \leq i \leq j \leq \frac{b}{\alpha}$$

loi de type loi binomiale.

complément : croissance + immigration

A l'instant $t=0$, l'effectif de la population est n_0. Chaque individu donne naissance à des descendants indépendamment des autres.

$X_i(t)$ = taille à l'instant t de la descendance du i^e individu

$X_1(t), \dots, X_{n_0}(t)$: iid

On note $t_1, \dots, t_N$ les instants d'immigration. Chaque immigrant engendre une descendance suivant les mêmes lois de reproduction que les n_0 individus initiaux, indépendamment les uns des autres.

Soit $Y_j(t_j, t) = X'_j(t-t_j)$ la taille à l'instant t de la descendance du j^e immigrant, avec $X'_1, \dots, X'_N$ iid de même loi que X_1.

Taille totale de la population à l'instant t : $Z(t) = \sum_{i=1}^{n_0} X_i(t) + \sum_{j=1}^{N} X'_j(t-t_j)$

Cas où $t_1 = \tau_1, \dots, t_N = \tau_N$ sont des temps aléatoires issus d'un processus de Poisson $(N(t))_{t\in\mathbb{R}^+}$ i.e. les τ_i sont les instants de saut de $(N(t))_{t\in\mathbb{R}^+}$.

Dans ce cas $Z(t) = \sum_{i=1}^{n_0} X_i(t) + \underbrace{\sum_{j=1}^{N(t)} Y_j(\tau_j, t)}_{Y(t)}$.

fonction génératrice de Y : $G_Y(t,z) = \mathbb{E}\left[z^{Y(t)}\right]$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left(z^{Y(t)} \mid N(t)=k\right) \mathbb{P}(N(t)=k)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!} \quad \mathbb{E}\left[z^{\sum_{j=1}^{k} Y_j(\tau_j,t)} \mid N(t)=k\right]$$

or $(\tau_1, \dots, \tau_N \mid N(t)=k)$ est un k-échantillon de la loi uniforme sur $[0, t]$

donc $\mathbb{E}\left(z^{\sum_{j=1}^{k} Y_j(\tau_j,t)} \mid N(t)=k\right) = \frac{k!}{t^k} \int\cdots\int_{\{0<s_1<\dots<s_k<t\}} \mathbb{E}\left[z^{\sum_{j=1}^{k} Y_j(s_j,t)}\right] ds_1 \dots ds_k$

$$= \frac{k!}{t^k} \int\cdots\int_{\{0<s_1<\dots<s_k<t\}} \prod_{j=1}^{k} \mathbb{E}\left(z^{Y_j(s_j,t)}\right) ds_1 \dots ds_k$$

$$= \frac{1}{t^k}\left[\int_0^t \mathbb{E}\left(z^{Y_j(s,t)}\right) ds\right]^k$$

$$= \left[\frac{1}{t}\int_0^t G_{X_1}(t-s, z)\, ds\right]^k$$

d'où $G_Y(t,z) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}\left[\frac{1}{t}\int_0^t G_X(\underbrace{t-s}_{\text{ou } s},z)\,ds\right]^n$

$$= \exp\left[\lambda\int_0^t (G_X(s,z)-1)\,ds\right]$$

et alors $\boxed{G_Z(t,z) = E\left(z^{Z(t)}\right) = G_{X_1}(t,z)^{n_0}\exp\left[\lambda\int_0^t [G_{X_1}(s,z)-1]\,ds\right]}$

Ex : $\forall i$, X_i : processus de Yule de taux $\alpha > 0$ ($\Rightarrow Z$ processus de naissance avec $\lambda_n = \alpha n + \lambda$)

$$P(X_1(t)=k) = P(X_1(t)=k \mid X_1(0)=1) = e^{-\alpha t}(1-e^{-\alpha t})^{k-1}$$

$$G_{X_1}(t,z) = \frac{e^{-\alpha t}z}{1-(1-e^{-\alpha t})z}$$

$$\Rightarrow G_Z(t,z) = \frac{e^{-n_0\alpha t}z^{n_0}}{[1-(1-e^{-\alpha t})z]^{n_0}}\exp\left[\lambda\underbrace{\int_0^t \frac{e^{-\alpha s}z}{1-(1-e^{-\alpha s})z}\,ds}_{\left[-\frac{1}{\alpha}\ln(1-(1-e^{-\alpha s})z)\right]_0^t} - \lambda t\right]$$

$$= \frac{e^{-n_0\alpha t}z^{n_0}}{[1-(1-e^{-\alpha t})z]^{n_0}}\,e^{-\lambda t}[1-(1-e^{-\alpha t})z]^{-\frac{\lambda}{\alpha}}$$

$$\boxed{G_Z(t,z) = \frac{z^{n_0}e^{-(\lambda+\alpha n_0)t}}{[1-(1-e^{-\alpha t})z]^{n_0+\frac{\lambda}{\alpha}}}}$$

On tire $E(Z(t)) = \frac{\partial}{\partial z}G_Z(t,1) = \frac{n_0\,e^{-(\lambda+\alpha n_0)t}}{e^{-(\alpha n_0+\lambda)t}} + \left(n_0+\frac{\lambda}{\alpha}\right)\frac{(1-e^{-\alpha t})\,e^{-(\lambda+\alpha n_0)t}}{e^{-\alpha(n_0+\frac{\lambda}{\alpha}+1)t}}$

soit $\boxed{E(Z(t)) = n_0 + \left(n_0+\frac{\lambda}{\alpha}\right)(e^{\alpha t}-1)}$

Calcul direct : $E(Z(t)) = n_0\,E(X_1(t)) + E(Y(t))$

où $E(Y(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} P(N_t=k)\,E\left(\sum_{j=1}^{k} Y_j(\tau_j,t) \mid N_t=k\right)$

$= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}\,k\,E(X_1(t-U))$ avec U : loi uniforme sur $[0,t]$

$= \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}\,\lambda\int_0^t \underbrace{E(X_1(t-s))}_{e^{\alpha(t-s)}}\,ds$

$= \lambda\,\frac{e^{\alpha t}-1}{\alpha}$

$\Rightarrow E(Z(t)) = n_0\,e^{\alpha t} + \frac{\lambda}{\alpha}(e^{\alpha t}-1)$. OK.

Ex4 : Complément : <u>naissance - mort linéaire avec émigration - immigration</u>

$\begin{cases} \lambda_j = j\lambda + \alpha, & j \geq 0 \\ \mu_j = \begin{cases} j\mu + \beta & \text{si } j \geq 1 \\ 0 & \text{si } j = 0 \end{cases} \end{cases}$, $G_i(t,z) = \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}(t) z^j$. A l'aide de $P'(t) = P(t)A$ on trouve

$$\frac{\partial G_i}{\partial t}(t,z) = (z-1)\sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j p_{ij} z^j - \left(1-\frac{1}{z}\right)\sum_{j=0}^{\infty} \mu_j p_{ij} z^j$$

$$= (z-1)\left[\alpha G_i(t,z) + \lambda z \frac{\partial G_i}{\partial z}(t,z)\right] - \left(1-\frac{1}{z}\right)\left[\beta\left(G_i(t,z) - p_{i0}(t)\right) + \mu z \frac{\partial G_i}{\partial z}(t,z)\right]$$

$$= \left[\alpha(z-1) - \beta\left(1-\frac{1}{z}\right)\right] G_i(t,z) + \left[\lambda z(z-1) - \mu z\left(1-\frac{1}{z}\right)\right]\frac{\partial G_i}{\partial z}(t,z) + \beta\left(1-\frac{1}{z}\right)p_{i0}(t)$$

$$\frac{\partial G_i}{\partial t}(t,z) = (z-1)\left(\alpha - \frac{\beta}{z}\right)G_i(t,z) + (z-1)(\lambda z - \mu)\frac{\partial G_i}{\partial z} + \beta\left(1-\frac{1}{z}\right)p_{i0}(t)$$

<u>Supposons $\beta = 0$</u>. $\begin{cases} \frac{\partial G_i}{\partial t}(t,z) = \alpha(z-1)G_i(t,z) + (z-1)(\lambda z - \mu)\frac{\partial G_i}{\partial z}(t,z) \\ G_i(0,z) = z^i \end{cases}$

On pose $G_i(t,z) = H\left(e^{(\lambda-\mu)t}, \frac{z-1}{\lambda z - \mu}\right)$: $\begin{cases} x = e^{(\lambda-\mu)t} \\ y = \frac{z-1}{\lambda z - \mu} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = \frac{\mu y - 1}{\lambda y - 1} \\ \lambda z - \mu = \frac{\mu - \lambda}{\lambda y - 1} \\ z - 1 = (\mu - \lambda)\frac{y}{\lambda y - 1} \end{cases}$.

On a $\begin{cases} \frac{\partial G_i}{\partial t}(t,z) = (\lambda-\mu)x\frac{\partial H}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial G_i}{\partial z}(t,z) = \frac{\lambda-\mu}{(\lambda z - \mu)^2}\frac{\partial H}{\partial y}(x,y) = \frac{(\lambda y - 1)^2}{\lambda - \mu}\frac{\partial H}{\partial y}(x,y) \end{cases}$

$$\Rightarrow (\lambda-\mu)\frac{\partial H}{\partial x}(x,y) - (\mu-\lambda)^2\frac{y}{\lambda y - 1}\frac{(\lambda y-1)^2}{\lambda-\mu}\frac{\partial H}{\partial y}(x,y) = \alpha\frac{(\mu-\lambda)y}{\lambda y - 1}H(x,y)$$

$$\Rightarrow x\frac{\partial H}{\partial x}(x,y) - y\frac{\partial H}{\partial y}(x,y) = -\frac{\alpha y}{\lambda y - 1}H(x,y).$$

On pose maintenant $H(x,y) = \varphi(x, xy)$: $\begin{cases} x = u \\ xy = v \end{cases}$.

On a $\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial H}{\partial y} = x\frac{\partial \varphi}{\partial v} \end{cases} \Rightarrow u\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v) = -\alpha\frac{v}{\lambda v - x}\varphi(u,v) = \frac{\alpha v}{u - \lambda v}\varphi(u,v)$

$$\Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v) = \frac{\alpha v}{u(u-\lambda v)}\varphi(u,v) = \frac{\alpha}{\lambda}\left[\frac{1}{u-\lambda v} - \frac{1}{u}\right]\varphi(u,v)$$

$$\Rightarrow \varphi(u,v) = \psi(v)\exp\left[\frac{\alpha}{\lambda}\ln\frac{u-\lambda v}{u}\right] = (1-\lambda y)^{\frac{\alpha}{\lambda}}\psi(v)$$

$$\Rightarrow G_i(t,z) = \left(1 - \lambda\frac{z-1}{\lambda z - \mu}\right)^{\alpha/\lambda}\psi\left(\frac{z-1}{\lambda z - \mu}e^{(\lambda-\mu)t}\right) = \left(\frac{\lambda-\mu}{\lambda z - \mu}\right)^{\alpha/\lambda}\psi\left(\frac{z-1}{\lambda z-\mu}e^{(\lambda-\mu)t}\right)$$

Or $G_i(0,z) = z^i$ donc $H\left(1, \frac{z-1}{\lambda z-\mu}\right) = z^i \Rightarrow \varphi\left(1, \frac{z-1}{\lambda z - \mu}\right) = \left(1 - \lambda\frac{z-1}{\lambda z-\mu}\right)^{\alpha/\lambda}\psi\left(\frac{z-1}{\lambda z-\mu}\right) = z^i$

$$\Rightarrow \psi(v) = (1-\lambda v)^{-\alpha/\lambda}\left(\frac{1-\mu v}{1-\lambda v}\right)^i$$

d'où $$\boxed{G_i(t,z) = \left(\frac{\lambda-\mu}{\lambda z-\mu}\right)^{\frac{\alpha}{\lambda}}\left[1 - \lambda\frac{z-1}{\lambda z-\mu}e^{(\lambda-\mu)t}\right]^{-i-\frac{\alpha}{\lambda}} \times \left[1 - \mu\frac{z-1}{\lambda z-\mu}e^{(\lambda-\mu)t}\right]^i}$$

si $\mu = 0$: $$G_i(t,z) = \frac{z^i e^{-(\lambda i + \alpha)t}}{\left[1 - (1-e^{-\lambda t})z\right]^{i+\frac{\alpha}{\lambda}}}$$

et si de plus $\alpha = 0$: $$G_i(t,z) = \left[\frac{z e^{-\lambda t}}{1-(1-e^{-\lambda t})z}\right]^i.$$

ex6 (Processus de Poisson composé) $X_t = \sum_{k=0}^{N_t} Y_k$

I – 1. a) $\varphi_{X_t}(z) = E[e^{izX_t}] = \sum_{n=0}^{\infty} [\underbrace{E(e^{izY_1})}_{\varphi(z)}]^n \underbrace{P(N_t=n)}_{e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}} = e^{-\lambda t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[\lambda t\varphi(z)]^n}{n!}$

$\to \boxed{\varphi_{X_t}(z) = e^{-\lambda t[1-\varphi(z)]}}$ $\quad (= G_{N_t}(\varphi(z)))$

b) $E(X_t) = -i\varphi'_{X_t}(0) = -i\lambda t\underbrace{\varphi'(0)}_{iE(Y_1)} = \boxed{\lambda\mu t}$ $\quad (= E(N_t)E(Y_1))$

$E(X_t)^2 = -\varphi''_{X_t}(0) = -\frac{d}{dz}\left[\lambda t\varphi'(z)e^{-\lambda t[1-\varphi(z)]}\right]_{z=0} = -\lambda t[\underbrace{\varphi''(0)}_{-E(Y_1^2)} + \lambda t\underbrace{\varphi'(0)^2}_{-(EY_1)^2}] = \lambda t E(Y_1^2) + (\lambda t)^2(EY_1)^2$

$\Rightarrow var(X_t) = \lambda t E(Y_1^2) = \boxed{(\sigma^2+\mu^2)\lambda t}$ $\quad (= E(N_t)var(Y_1) + var(N_t)E(Y^2))$

2. (X_t) est croissant donc $T>t \iff X_t \le c$ et alors

$P(T>t) = P(X_t\le c) = P\left(\sum_{k=0}^{N_t} Y_k \le c\right) = \sum_{n=0}^{\infty} P\Big(\underbrace{\sum_{k=0}^{n} Y_k \le c}_{\hookrightarrow \text{ loi Gamma } \Gamma(n,\mu)}\Big) P(N_t=n)$

$= e^{-\lambda t}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\lambda t)^n}{n!}\int_0^c \frac{\mu^n x^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\mu x}dx\right]$

$= e^{-\lambda t}\left[1 + (\lambda\mu t)\int_0^c e^{-\mu x}\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\lambda\mu t x)^{n-1}}{(n-1)!\,n!}}\,dx\right]$

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda\mu t x)^n}{n!(n+1)!} = \frac{1}{\sqrt{\lambda\mu t x}} I_1(2\sqrt{\lambda\mu t x})$

$= e^{-\lambda t}\left[1 + \sqrt{\lambda\mu t}\int_0^c I_1(2\sqrt{\lambda\mu t x})\frac{dx}{\sqrt{x}}\right]$

$= e^{-\lambda t}\left[1 + \int_0^{2\sqrt{\lambda\mu c t}} I_1(x)\,dx\right]$

or $I_1 = I_0'$ d'où $\boxed{P(T>t) = e^{-\lambda t}[1 + I_0(2\sqrt{\lambda\mu c t})]}$

MTBF : $E(T) = \int_0^{+\infty} P(T>t)dt = \frac{1}{\lambda} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} I_0(2\sqrt{\lambda\mu c t})dt$ $\quad$ or $\int_0^{\infty} e^{-\alpha t} I_0(\beta\sqrt{t})dt = \frac{1}{\alpha}e^{\frac{\beta^2}{\alpha}}$ (Oberhettinger – Badii p 153 formule 15.24)

$= \boxed{\frac{1+\mu c}{\lambda}}$.

Calcul direct : $E(T) = \int_0^{\infty} P(T>t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} P\left(\sum_{k=0}^{n} Y_k \le c\right)\underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}dt}_{\frac{1}{\lambda}}$

$= \frac{1}{\lambda}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^c \frac{\mu^n x^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\mu x}dx\right]$

$= \frac{1}{\lambda}\left[1 + \mu\int_0^c e^{\mu x - \mu x}dx\right] = \frac{1+\mu c}{\lambda}$.

II – 1) $\varphi_{X_1(t)+X_2(t)}(z) = \varphi_{X_1(t)}(z)\varphi_{X_2(t)}(z) = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t + \lambda_1 t\varphi_1(z) + \lambda_2 t\varphi_2(z)} = \boxed{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t[1-\psi(z)]}}$

avec $\psi(z) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\varphi_1(z) + \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\varphi_2(z)$

2) $\psi = \varphi_W$ avec $W = \begin{cases} Y_1 \text{ avec probabilité } \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} \\ Y_2 \text{ avec probabilité } \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\end{cases} = \boxed{W_N}$ où $W_0 = Y_1$, $W_1 = Z_1$, $N : \Omega \to \{0,1\}$ v.a. $B(1, \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2})$ $\begin{cases} P(N=0) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} \\ P(N=1) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\end{cases}$

3) Et alors d'après I-1.a) $\boxed{X_1(t)+X_2(t) \overset{loi}{=} \sum_{l=0}^{N_t} W_l}$, $(N_t)_{t\ge 0}$: processus de Poisson $(\lambda_1+\lambda_2)$; W_l : i.i.d de f.c. ψ.

III – $X_t = X_1(t) - X_2(t)$

1. * si $X_1(t) > X_2(t)$, il n'y a pas de client en attente et $X_1(t)-X_2(t)$ est le nombre de taxis en attente.

* si $X_1(t) < X_2(t)$, il n'y a pas de taxi disponible et $X_2(t)-X_1(t)$ est le nombre de clients en attente.

* si $X_1(t)=X_2(t)$, il y a eu sur $[0,t]$ autant de taxis que de clients. Donc à l'instant la station est vide : $X_1(t)-X_2(t)=0$.

2. $X_1(t) = \sum_{j=0}^{N_1(t)} Y_j$ avec $Y_j=1$, $\quad -X_2(t) = \sum_{k=0}^{N_2(t)} Z_k$ avec $Z_k=1$. $\quad Y_0=Z_0=0$

Donc $X_t = \sum_{\ell=0}^{N_t} W_\ell = S_{N_t}$ avec $W_\ell = \begin{cases} 1 & \text{avec probabilité } \frac{d_1}{d_1+d_2} \\ -1 & \text{avec probabilité } \frac{d_2}{d_1+d_2} \end{cases}$ $\quad W_0=0$ i.e. $W_\ell : \mathcal{B}(1, \frac{d_1}{d_1+d_2})$ à valeurs dans $\{-1,1\}$

et $S_n = \sum_{\ell=0}^{n} W_\ell \quad (S_0=0) \quad \Rightarrow \frac{S_n+n}{2} : \mathcal{B}(n, \frac{d_1}{d_1+d_2})$

3. $$\mathbb{P}(X_t=m) = \mathbb{P}(S_{N_t}=m) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\mathbb{P}(S_n=m)}_{\mathbb{P}\left(\frac{S_n+n}{2}=\frac{m+n}{2}\right)} \mathbb{P}(N_t=n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{\frac{m+n}{2}} \left(\frac{d_1}{d_1+d_2}\right)^{\frac{m+n}{2}} \left(\frac{d_2}{d_1+d_2}\right)^{\frac{n-m}{2}} e^{-(d_1+d_2)t} \frac{[(d_1+d_2)t]^n}{n!}$$

avec $\left.\begin{array}{l}\frac{m+n}{2}\in\mathbb{N}\\ \frac{m+n}{2}\le n\end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} n \ge |m| \\ \text{et } n-|m| \text{ pair}\end{cases}$

$$\underset{(n=2\ell+|m|)}{=} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{[(d_1+d_2)t]^{2\ell+|m|}}{(\ell+m^+)!(\ell+m^-)!} e^{-(d_1+d_2)t} \frac{(d_1d_2)^\ell d_1^{m^+} d_2^{m^-}}{(d_1+d_2)^{2\ell+|m|}}$$

$m = m^+ - m^-$
$|m| = m^+ + m^-$
$m^+, m^- \ge 0$

$$= \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^{m/2} e^{-(d_1+d_2)t} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{d_1d_2}\, t)^{2\ell+|m|}}{\Gamma(\ell+|m|+1)\, \ell!}$$

$\begin{cases} (\ell+m^+)!(\ell+m^-)! = \ell!(\ell+|m|)! \\ d_1^{m^+} d_2^{m^-} = (d_1d_2)^{\frac{|m|}{2}} \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^{\frac{m}{2}} \end{cases}$

$$= \boxed{\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^{m/2} e^{-(d_1+d_2)t} I_m(2t\sqrt{d_1d_2})} \qquad (I_{-m}=I_m)$$

Calcul direct : e.g. $m \ge 0$:
$$\mathbb{P}(X_t=m) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_1(t)=m+n)\mathbb{P}(X_2(t)=n) = e^{-(d_1+d_2)t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(d_1t)^{m+n}(d_2t)^n}{(m+n)!\,n!}$$
$$= \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^{m/2} e^{-(d_1+d_2)t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{d_1d_2}\,t)^{2n+m}}{(m+n)!\,n!}.$$

complément : en fait $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est un processus de naissance-mort sur $\mathbb{Z}$.
Posons $p_n(t) = \mathbb{P}(X_t=n)$, $n\in\mathbb{Z}$. On va écrire des équations de Kolmogorov progressives.

$$p_n(t+\varepsilon) = \mathbb{P}(X_{t+\varepsilon}=n) = \mathbb{P}(X_t=n, X_{t+\varepsilon}=n) + \mathbb{P}(X_t=n-1, X_{t+\varepsilon}=n) + \mathbb{P}(X_t=n+1, X_{t+\varepsilon}=n) + \mathbb{P}(|X_t-n|\ge 2, X_{t+\varepsilon}=n)$$

$$= \mathbb{P}(X_t=n)\mathbb{P}(X_{t+\varepsilon}=n|X_t=n) + \mathbb{P}(X_t=n-1)\mathbb{P}(X_{t+\varepsilon}=n|X_t=n-1) + \mathbb{P}(X_t=n+1)\mathbb{P}(X_{t+\varepsilon}=n|X_t=n+1) + \mathbb{P}(|X_t-X_{t+\varepsilon}|\ge 2, X_{t+\varepsilon}=n)$$

$$= p_n(t)\,\mathbb{P}(\underbrace{X_{t+\varepsilon}-X_t=0}_{\Leftrightarrow X_1(t+\varepsilon)-X_1(t)=X_2(t+\varepsilon)-X_2(t)}|X_t=n) + p_{n-1}(t)\,\mathbb{P}(\underbrace{X_{t+\varepsilon}-X_t=1}_{\Leftrightarrow X_1(t+\varepsilon)-X_1(t)=1+[X_2(t+\varepsilon)-X_2(t)]}|X_t=n-1)$$
$$+ p_{n+1}(t)\,\mathbb{P}(\underbrace{X_{t+\varepsilon}-X_t=-1}_{\Leftrightarrow X_2(t+\varepsilon)-X_2(t)=1+[X_1(t+\varepsilon)-X_1(t)]}|X_t=n+1) + \mathbb{P}(|X_t-X_{t+\varepsilon}|\ge 2, X_{t+\varepsilon}=n)$$

or $\mathbb{P}(X_1(t+\varepsilon)-X_1(t)=\delta_1 \text{ et } X_2(t+\varepsilon)-X_2(t)=\delta_2 \mid X_t=k)$

$$= \frac{\sum_{i,j:\, i-j=k} \mathbb{P}(X_1(t+\varepsilon)-X_1(t)=\delta_1,\ X_2(t+\varepsilon)-X_2(t)=\delta_2,\ X_1(t)=i,\ X_2(t)=j)}{\mathbb{P}(X_t=k)}$$

$$= \sum_{i,j:\, i-j=k} \underbrace{\mathbb{P}(X_1(t+\varepsilon)-X_1(t)=\delta_1 \mid X_1(t)=i)}_{=\begin{cases} \lambda_1\varepsilon+o(\varepsilon) & \text{si } \delta_1=1\\ 1-\lambda_1\varepsilon+o(\varepsilon) & \text{si } \delta_1=0\\ o(\varepsilon) & \text{si } \delta_1\neq 0,1\end{cases}} \underbrace{\mathbb{P}(X_2(t+\varepsilon)-X_2(t)=\delta_2 \mid X_2(t)=j)}_{=\begin{cases} \lambda_2\varepsilon+o(\varepsilon) & \text{si } \delta_2=1\\ 1-\lambda_2\varepsilon+o(\varepsilon) & \text{si } \delta_2=0\\ o(\varepsilon) & \text{si } \delta_2\neq 0,1\end{cases}} \frac{\mathbb{P}(X_1(t)=i)\mathbb{P}(X_2(t)=j)}{\mathbb{P}(X_t=k)}$$

$$= \begin{cases} \lambda_1\lambda_2\varepsilon^2+o(\varepsilon^2)=o(\varepsilon) & \text{si } \delta_1=\delta_2=1\\ \lambda_1\varepsilon+o(\varepsilon) & \text{si } \delta_1=1,\ \delta_2=0\\ \lambda_2\varepsilon+o(\varepsilon) & \text{si } \delta_1=0,\ \delta_2=1\\ 1-(\lambda_1+\lambda_2)\varepsilon+o(\varepsilon) & \text{si } \delta_1=\delta_2=0\\ o(\varepsilon^2)=o(\varepsilon) & \text{si } \delta_1,\delta_2\neq 0,1\end{cases} \qquad \frac{\sum_{i,j:\, i-j=k}\mathbb{P}(X_1(t)=i)\mathbb{P}(X_2(t)=j)}{\mathbb{P}(X_t=k)}=1$$

D'où $p_n(t+\varepsilon)=p_n(t)[1-(\lambda_1+\lambda_2)\varepsilon+o(\varepsilon)]+p_{n-1}(t)[\lambda_1\varepsilon+o(\varepsilon)]+p_{n+1}(t)[\lambda_2\varepsilon+o(\varepsilon)]+o(\varepsilon)$

$$\Rightarrow \frac{1}{\varepsilon}[p_n(t+\varepsilon)-p_n(t)] = \lambda_1 p_{n-1}(t)-(\lambda_1+\lambda_2)p_n(t)+\lambda_2 p_{n+1}(t)+o(1)$$

$$\Rightarrow \boxed{p_n'(t)=\lambda_1 p_{n-1}(t)-(\lambda_1+\lambda_2)p_n(t)+\lambda_2 p_{n+1}(t)},\quad n\in\mathbb{Z}.$$

Soit $G(t,z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} p_n(t)z^n$. On a

$$\frac{\partial G}{\partial t}(t,z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\lambda_1 p_{n-1}(t)z^n-\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(\lambda_1+\lambda_2)p_n(t)z^n+\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\lambda_2 p_{n+1}(t)z^n$$

$$=\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty}p_n(t)z^n\right]\left[\lambda_1 z-(\lambda_1+\lambda_2)+\frac{\lambda_2}{z}\right]$$

$$=\left[\lambda_1 z-(\lambda_1+\lambda_2)+\frac{\lambda_2}{z}\right]G(t,z)$$

On a $X_0=0$. Avec $G(0,z)=1$ on trouve donc $G(t,z)=e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}\underbrace{e^{(\lambda_1 z+\frac{\lambda_2}{z})t}}_{\text{f.g. d'une fonction de Bessel}}$.

Ex : (système informatique)

X_t : état du système à l'instant t

a_0 : état de marche
a_1 : système en panne du 1^{er} type
a_2 : système en panne du 2^e type

$\mathbb{P}(X_{t+\varepsilon}=a_1 \mid X_t=a_0)=\mathbb{P}(1\text{ panne de type 1 survient dans }[t,t+\varepsilon] \mid \text{système en marche à l'instant } t)=\lambda_1\varepsilon+o(\varepsilon)$

" a_2 " " type 2 " " $=\lambda_2\varepsilon+o(\varepsilon)$

" a_0 " pas de panne " $=1-(\lambda_1+\lambda_2)\varepsilon+o(\varepsilon)$

$\mathbb{P}(X_{t+\varepsilon}=a_1 \mid X_t=a_1)=\mathbb{P}(\text{la panne de type 1 n'est pas réparée dans } [t,t+\varepsilon] \mid \text{panne de type 1 à l'instant } t)$ → temps de réparation $>\varepsilon$

$+\,\mathbb{P}(\text{la panne de type 1 est réparée et une autre survient dans } [t,t+\varepsilon] \mid \ldots)$

$=e^{-\mu_1\varepsilon}+o(\varepsilon)=1-\mu_1\varepsilon+o(\varepsilon)$

" a_2 " $=\mathbb{P}(\text{plus d'1 panne dans } [t,t+\varepsilon] \mid \ldots)=o(\varepsilon)$

" a_0 " $=\mu_1\varepsilon+o(\varepsilon)$

→ générateur $A=\begin{pmatrix}-\lambda_1-\lambda_2 & \lambda_1 & \lambda_2\\ \mu_1 & -\mu_1 & 0\\ \mu_2 & 0 & -\mu_2\end{pmatrix} \Rightarrow P(t)=e^{tA}$ et $\mathbb{P}_{a_0}(X_t=a_0)=(1\ 0\ 0)\,e^{tA}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.