Files d'attente

Exercice 1 (Monoserveur $M/D/1$)

On utilise une ligne à 9600 bps pour faire un transfert de fichier. Le fichier est transféré par blocs de 500 caractères.

1. Quel est le temps nécessaire pour transférer un bloc ?
2. La ligne délivre un trafic Poissonien avec une charge limitée à 60%.
   (a) Quel est le taux d'arrivée en blocs/s ?
   (b) Calculer le temps de réponse de la ligne ainsi que le nombre moyen de blocs transitant dans la ligne en régime stationnaire.

Exercice 2

Préliminaire. — Écrire le temps moyen passé par un client dans un système décrit par le modèle $M/M/n_0$ dans les cas $n_0 \in \{1, 2, 3\}$.

On considère une cabine téléphonique avec une loi d'arrivée de Poisson et un taux d'arrivée de 3 clients/heure. Le temps passé par un individu dans la cabine suit la loi exponentielle de moyenne 10 mn.

1. Quel est le temps moyen d'attente de chaque individu ?
2. Quel est le nombre total moyen de clients dans le système ?
3. Quelle est la probabilité que le temps de téléphoner (temps d'attente inclus) soit plus grand ou égal à 10 mn, 15 mn, 20 mn ? Quelle conclusion peut-on en tirer ?
4. On suppose maintenant que le taux d'arrivée s'élève à 10 clients/heure. On souhaiterait limiter le temps d'attente moyen à moins de 10 mn. De combien de cabines faudrait-il disposer au minimum ?

Exercice 3 (Comparaison entre les files $M(\lambda)/M(\mu)/2$ et $M(\lambda)/M(2\mu)/1$)

1. Calculer pour chacune des deux files $M(\lambda)/M(\mu)/2$ et $M(\lambda)/M(2\mu)/1$ en régime stationnaire :
   - la longueur moyenne de la file $\mathbb{E}(Q)$, le nombre moyen de clients en attente $\mathbb{E}(\tilde{Q})$;
   - le temps d'attente moyen avant service $\mathbb{E}(W)$, le temps de séjour moyen dans le système $\mathbb{E}(W + S)$;
   - la probabilité de trouver le système vide $\mathbb{P}(W = 0)$.
2. Dresser un tableau comparatif des résultats obtenus puis en tirer une conclusion.

Exercice 4 (Multiserveur)

On doit relier deux ordinateurs qui utilisent huit applications parallèles. Chaque application génère un trafic Poissonien de 2 paquets/s en moyenne. La longueur moyenne des paquets est de 2000 bits. On propose deux solutions :

solution 1 : dédier une bande de base 8 kb/s à chaque application ;

solution 2 : utiliser une ligne à 64 kb/s pour toutes les applications.

1. Quelle est la solution qui donne le meilleur temps de réponse ?
2. On envisage d'utiliser la solution 1 mais avec une répartition équilibrée entre les serveurs.
   (a) Préciser le modèle mathématique correspondant.
   (b) Quel est le temps de réponse ?
   (c) Quel est le nombre moyen de paquets transitant dans le système ?

Exercice 5 (Monoserveur multiclasse sans priorité)

On considère un concentrateur-commutateur de paquets $X25$ muni de deux lignes d'entrée à 4600 bps et une ligne de sortie à 9600 bps. La longueur moyenne des paquets est de 500 bits sur la ligne 1 et 1000 bits sur la ligne 2. Les lignes d'entrée délivrent un trafic Poissonien de taux respectifs $\lambda_1 = 2$ paquets/s et $\lambda_2 = 4$ paquets/s.

1. De quel type est le processus en entrée ?
2. Déterminer le temps de service moyen $\mathbb{E}(S_i) = \dfrac{1}{\mu_i}$ pour traiter la i^{e} ligne, i=1,2.

   On introduit une v.a. $N : \Omega \longrightarrow \{1,2\}$ de loi $\mathbb{P}(N = 1) = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$ et $\mathbb{P}(N = 2) = \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$ indiquant le numéro de la ligne de laquelle provient un paquet générique ; la v.a. S_N est le temps de service de ce paquet.
3. Exprimer $\mathbb{E}(S_N) = \dfrac{1}{\mu}$ et $\operatorname{var}(S_N)$ en fonction de λ_1, λ_2, μ_1 et μ_2. En déduire le coefficient de variation de S_N, $k^2_{S_N}$. Montrer que $k_{S_N} > 1$.

   Ce monoserveur multiclasse se comporte comme une file résultante $M(\lambda)/G/1$ où $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$. On pose $\rho_1 = \dfrac{\lambda_1}{\mu_1}$, $\rho_2 = \dfrac{\lambda_2}{\mu_2}$ et $\rho = \rho_1 + \rho_2$.
4. Calculer le délai moyen passé par un paquet dans le système concentrateur-ligne de sortie, son temps d'attente moyen ainsi que le nombre moyen de paquets transitant dans le système.
5. Reprendre les calculs de la question précédente sous l'hypothèse d'une file résultante $M(\lambda)/M(\mu)/1$.

Exercice 6 (Monoserveur multiclasse avec priorités)

Deux types de paquets sont transmis sur une ligne à 9600 bps. Les paquets de type 1 sont des paquets de contrôle de taille fixe 48 bits et constituent 20% du trafic total ; ceux de type 2 sont des paquets de données de taille moyenne 960 bits. On charge la ligne à 50%. On note ρ_i l'intensité du trafic et $k^2_{S_i}$ le coefficient de variation du temps de traitement des paquets de type i, $i \in \{1,2\}$. On donne $k^2_{S_2} = 2,75$; que choisir pour k_{S_1} ?

1. Si on fait l'hypothèse d'un monoserveur multiclasse sans priorité, le trafic résultant est modélisé par une file $M/G/1$ (voir exercice précédent).
   (a) Calculer $1 + k^2_S$ où k^2_S est le coefficient de variation du temps de traitement résultant.
   (b) Calculer le temps de réponse pour chaque type de paquet.
2. On fait maintenant l'hypothèse d'un monoserveur multiclasse avec priorités, la classe 1 étant prioritaire sur la classe 2. Montrez que le temps de réponse est réduit pour les paquets de type 1 et augmenté pour ceux de type 2 dans les deux cas suivants :

   cas préemptif : le service d'un paquet non prioritaire est interrompu en cas d'arrivée d'un paquet prioritaire ; on donne les temps d'attente moyens :

   $$\mathbb{E}(W_1) = \frac{\rho_1(1 + k^2_{S_1})\mathbb{E}(S_1)}{2(1-\rho_1)} \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(W_2) = \frac{\rho_1(1 + k^2_{S_1})\mathbb{E}(S_1) + \rho_2(1 + k^2_{S_2})\mathbb{E}(S_2)}{2(1-\rho_1)(1-\rho_1-\rho_2)}.$$

   Expliquer la première formule.

   cas non préemptif : le service n'est jamais interrompu ; on donne

   $$\mathbb{E}(W_1) = \frac{\rho_1(1 + k^2_{S_1})\mathbb{E}(S_1) + \rho_2(1 + k^2_{S_2})\mathbb{E}(S_2)}{2(1-\rho_1)} \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(W_2) = \frac{\rho_1(1 + k^2_{S_1})\mathbb{E}(S_1) + \rho_2(1 + k^2_{S_2})\mathbb{E}(S_2)}{2(1-\rho_1)(1-\rho_1-\rho_2)}.$$

   Expliquer la coïncidence des deux expressions de $\mathbb{E}(W_2)$.

Exercice 7

On étudie les mouvements incoercibles des clients sybaritiques d'un comptoir de café. Des clients arrivent de l'extérieur suivant un processus de Poisson de paramètre α. Le temps de service (temps d'enivrement) suit la loi exponentielle de paramètre μ. Une fois ivre, le client quitte le comptoir avec probabilité q et revient éventuellement dans la file pour s'enivrer davantage avec probabilité $p = 1 - q$.

1. On note λ le flux de clients se présentant au comptoir. Déterminer λ en égalant les flux entrant et sortant à l'équilibre (équation du trafic). On pose $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$.
2. Expliciter la loi stationnaire $\pi = (\pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $\pi_n = \mathbb{P}(Q_\infty = n)$.
3. Décrire le processus des sorties définitives du bouge.
4. Soit T le temps inter-arrivées entre deux clients à la station — comptant aussi bien les nouveaux (ingénus abstèmes) que ceux qui reviennent (les dipsomanes impénitents).
   (a) Expliquer la relation

   $$\mathbb{P}(T > t \mid Q_\infty = n) = e^{-\alpha t}\Big[q^n + \sum_{j=1}^{n} p\, q^{j-1} \int_t^{+\infty} \frac{\mu^j s^{j-1}}{(j-1)!}\, e^{-\mu s}\, ds\Big] \quad \text{pour } n \geqslant 1.$$

   (b) Calculer alors $\mathbb{P}(T > t)$. (Réponse : $\dfrac{q\mu - \alpha}{q(\mu-\alpha)} e^{-\alpha t} + \dfrac{p\alpha}{q(\mu - \alpha)} e^{-pt}$, loi hyper-exponentielle.)

Exercice 8 (Files d'attente en série)

I — On étudie un système composé de deux services successifs S_1 et S_2. Un client entrant dans le système doit d'abord passer par S_1 puis par S_2. On suppose qu'il existe deux salles d'attente à capacité illimitée à l'entrée de chaque service. Les temps de service suivent des lois exponentielles de paramètre μ_1 et μ_2, et le processus des d'arrivées des clients est un processus de Poisson d'intensité λ. On pose $\rho_1 = \dfrac{\lambda}{\mu_1}$ et $\rho_2 = \dfrac{\lambda}{\mu_2}$.

1. Intuitivement, quand existe-t-il un régime stationnaire ?
2. De quel type est le processus modélisant les temps de sortie du premier service des clients en régime stationnaire ? On appelle $Q_t^{(1)}$ (resp. $Q_t^{(2)}$) le nombre de personnes dans le serveur 1 (resp. 2) à l'instant t. Le processus $(Q_t^{(1)}, Q_t^{(2)})_{t\in\mathbb{R}^+}$ est un processus de naissance-mort bidimensionnel.
3. Écrire les équations de balance globale du système en régime stationnaire ; on notera $\pi_{ij} = \mathbb{P}(Q_\infty^{(1)} = i, Q_\infty^{(2)} = j)$.
4. En décomposant le système, écrire les équations de balance locale.
5. Résoudre ces dernières et vérifier qu'elles satisfont aux équations de balance globale.
6. Déterminer le nombre moyen de clients en attente $\mathbb{E}(\tilde{Q}_\infty)$, le nombre moyen de clients présents dans le système $\mathbb{E}(Q_\infty)$, le temps moyen d'attente $\mathbb{E}(W_\infty)$, ainsi que le temps moyen passé dans le système $\mathbb{E}(W_\infty + S)$.
7. Écrire des formules de Little dans ce cadre.

II — On se place dans un système semblable au cas précédent à la différence qu'il n'y a pas de salle d'attente entre les deux serveurs, c'est-à-dire que si S_2 est occupé alors que le client de S_1 a fini de se faire servir, ce client reste en S_1, bloquant ainsi le système ; par exemple, S_2 est un service de contrôle à l'issue du premier service.

1. Écrire les équations régissant le système à l'état stationnaire et les résoudre dans les deux cas suivants :
   (a) Il n'y a pas de file d'attente à l'entrée du système global.
   (b) Il y a une file d'attente à capacité illimitée à l'entrée.
   Indication : On pose $u_i = \mathbb{P}(Q_\infty^{(1)} = i, Q_\infty^{(2)} = 0)$ et $v_i = \mathbb{P}(Q_\infty^{(1)} = i, Q_\infty^{(2)} = 1)$, $i \geqslant 0$.
      i. Écrire une relation de récurrence à quatre indices satisfaite par la suite $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$.
      ii. On pose $w_i = u_i - (\rho_1 + \rho_2 + \rho_1\rho_2)u_{i-1} + \rho_1\rho_2 u_{i-2}$, $i \geqslant 2$. Vérifier que la suite $(w_i)_{i\geqslant 2}$ est constante ; calculer w_2.
      iii. En déduire que la suite $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ satisfait à une récurrence à trois indices, puis déterminer u_i et v_i. Réponse :

$$\begin{aligned} u_i &= \frac{(\rho_2 - r_1)r_1^i - (\rho_2 - r_2)r_2^i}{(r_2 - r_1)(1 - \rho_1 - \rho_2)}, \\ v_i &= \frac{\rho_2[(\rho_2 - r_1)(r_1\rho_1 + r_1 - \rho_1)r_1^i - (\rho_2 - r_2)(r_2\rho_1 + r_2 - \rho_1)r_2^i]}{r_1\rho_1(r_2 - r_1)(1 - \rho_1 - \rho_2)} \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{1}{2}[\rho_1 + \rho_2 + \rho_1\rho_2 + \sqrt{(\rho_1 + \rho_2 + \rho_1\rho_2)^2 - 4\rho_1\rho_2}\,], \\ r_2 &= \frac{1}{2}[\rho_1 + \rho_2 + \rho_1\rho_2 - \sqrt{(\rho_1 + \rho_2 + \rho_1\rho_2)^2 - 4\rho_1\rho_2}\,]. \end{aligned}$$

2. Calculer, dans chacun des cas, la probabilité que le système soit bloqué et le temps moyen passé par un client dans le système. On pourra utiliser la propriété d'absence de mémoire de la loi exponentielle lorsqu'un client est bloqué à l'issue du premier service, pour déterminer le temps d'attente entre les deux services en cas de blocage.
3. En quelle position est-il préférable de mettre le service le plus lent ?