Chapitre 3 **Files d'attente**

N.B. : les données numériques datent de 2000 et sont aujourd'hui obsolètes...

Ex1 (Monoserveur M/D/1)

1) temps de service déterministe : $S = d = \frac{1}{\mu} = \frac{500\times 8}{9600} = \boxed{0{,}42\ s}$ (500 caractères, 1 caractère = 8 bits ; 9600 bits/s)

La ligne joue le rôle de serveur

2) a) taux d'arrivée des blocs (ligne chargée à 60 %) : $\lambda = 60\% \times \underbrace{\frac{9600}{500\times 8}}_{2{,}4 \text{ blocs/s}} = \boxed{1{,}44 \text{ blocs/s}}$

→ intensité du trafic : $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 60\% = \boxed{0{,}6} < 1$

Note : pour une ligne chargée à 100 %, le temps inter-arrivées est identique au temps de service

b) $\begin{cases} E(\tilde{W}_\infty) = \frac{\rho}{2(1-\rho)} E(S) = \frac{0{,}6}{2(1-0{,}6)} \times 0{,}42 \simeq \boxed{0{,}31\ s} & \text{(temps de réponse)} \\ E(Q_\infty) = \frac{\rho(2-\rho)}{2(1-\rho)} = \frac{0{,}6(2-0{,}6)}{2(1-0{,}6)} \simeq \boxed{1{,}05 \text{ blocs}} \end{cases}$

remarque : cas M/M/1 : $E(\tilde{W}_\infty) = \frac{\rho}{1-\rho} E(S) = 0{,}625\ s$ et $E(Q_\infty) = \frac{\rho}{1-\rho} = 1{,}5$ blocs.

Ex2 (cabine téléphonique)

Préliminaire : rappels sur M/M/n_0 : $E(\tilde{W}_\infty) = \frac{P_B(n_0) E(S)}{n_0 - \rho}$ où $P_B(n_0) = \frac{\rho^{n_0}}{n_0!(1-\frac{\rho}{n_0})(1+\rho+\frac{\rho^2}{2!}+\dots+\frac{\rho^{n_0-1}}{(n_0-1)!})+\rho^{n_0}}$ (probabilité de saturation)

$\begin{cases} n_0 = 1 : & P_B(1) = \rho, \quad E(\tilde{W}_\infty) = \frac{\rho}{1-\rho} E(S) \\ n_0 = 2 : & P_B(2) = \frac{\rho^2}{2+\rho}, \quad E(\tilde{W}_\infty) = \frac{\rho^2}{4-\rho^2} E(S) \\ n_0 = 3 : & P_B(3) = \frac{\rho^3}{6+4\rho+\rho^2}, \quad E(\tilde{W}_\infty) = \frac{\rho^3}{(3-\rho)(6+4\rho+\rho^2)} E(S) \end{cases}$

$\lambda = 3$ clients/h $= 0{,}05$ clients/mn, $\frac{1}{\mu} = 10$ mn/client → $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 0{,}5 < 1$

1) $E(\tilde{W}_\infty) = \frac{\rho}{1-\rho}\frac{1}{\mu} = \boxed{10 \text{ mn}}$

2) $E(Q_\infty) = \frac{\rho}{1-\rho} = \boxed{1 \text{ client}}$

3) $W_\infty : \mathcal{E}(\mu-\lambda) = \mathcal{E}(0{,}05)$

$E(W_\infty) = 20$ mn

$\begin{cases} P(W_\infty \geq 10 \text{ mn}) = e^{-0{,}05\times 10} \simeq 0{,}606 \\ P(W_\infty \geq 15 \text{ mn}) = e^{-0{,}05\times 15} \simeq 0{,}470 \\ P(W_\infty \geq 20 \text{ mn}) = e^{-0{,}05\times 20} \simeq 0{,}367 \end{cases}$

→ la probabilité de rester longtemps est de plus en plus faible

4) $\lambda = 10$ clients/h $\quad \rho = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} \in]1,2[$

$\begin{cases} n_0 = 1 : & E(\tilde{W}_\infty) = +\infty \\ n_0 = 2 : & E(\tilde{W}_\infty) = \frac{25}{11} E(S) \approx 22{,}7 \text{ mn} = 22 \text{ mn } 42\ s \\ n_0 = 3 : & E(\tilde{W}_\infty) = \frac{125}{556} E(S) \approx 2{,}2 \text{ mn} = 2 \text{ mn } 12\ s \end{cases}$

→ il faudrait disposer de $\boxed{3}$ cabines pour avoir un temps d'attente ≤ 10 mn.

Remarque à 3) : pour $S : \mathcal{E}(\mu)$, $P(S > t) = e^{-\mu t}$. Dans α % des cas on a $S < \frac{1}{\mu} \ln \frac{1}{1-\frac{\alpha}{100}}$

En effet : $P\left(S < \frac{1}{\mu}\ln\frac{1}{1-\frac{\alpha}{100}}\right) = 1 - \exp\left(-\ln\frac{1}{1-\frac{\alpha}{100}}\right) = \frac{\alpha}{100}$.

Ex3 : Comparaison entre les files $M(\lambda)/M(\mu)/2$ et $M(\lambda)/M(2\mu)/1$

- $M(\lambda)/M(\mu)/2$:

$$\mathbb{P}(Q_\infty = j) = \pi_j = \begin{cases} \pi_0 \dfrac{\rho^j}{j!}, & 0 \leq j \leq 1 \\ 2\pi_0 \left(\dfrac{\rho}{2}\right)^j, & j \geq 2 \end{cases} \quad \text{avec } \rho = \frac{\lambda}{\mu} < 2, \quad \pi_0 = \frac{1}{1+\rho+\frac{\rho^2}{2-\rho}} = \frac{2-\rho}{2+\rho}$$

Longueur de la queue :
$$\mathbb{E}(Q_\infty) = \rho + \frac{\pi_0 \rho^3}{(2-\rho)^2} = \rho + \frac{\rho^3}{4-\rho^2} = \boxed{\frac{4\rho}{4-\rho^2}}$$

Nombre de clients en attente : $\tilde{Q}_\infty = (Q_\infty - 2)^+ = (Q_\infty - 2)\mathbb{1}_{Q_\infty \geq 2}$
$$\mathbb{E}(\tilde{Q}_\infty) = \underbrace{\mathbb{E}(Q_\infty \mathbb{1}_{Q_\infty \geq 2})}_{\sum_{j\geq 2} j\pi_j = \mathbb{E}(Q_\infty) - \pi_1} - 2\underbrace{(1-\pi_0-\pi_1)}_{\frac{\rho^2}{2+\rho}} = \boxed{\frac{\rho^3}{4-\rho^2}}$$

$\tilde{W}_\infty$:
$$\begin{cases} (\tilde{W}_\infty \mid \tilde{W}_\infty > 0) : \mathcal{E}(2\mu - \lambda) \\ \text{temps d'attente} \\ \mathbb{E}(\tilde{W}_\infty) = \boxed{\dfrac{\rho^2}{\mu(4-\rho^2)}} \\ \text{temps de séjour} \\ \mathbb{E}(W_\infty) = \boxed{\dfrac{4}{\mu(4-\rho^2)}} \end{cases}$$

$$\mathbb{P}(W_\infty = 0) = \mathbb{P}(Q_\infty < 2) = 1 - \frac{\rho^2}{\rho+2} = \boxed{\frac{(1+\rho)(2-\rho)}{2+\rho}}$$

nombre de serveurs occupés :
$$\begin{cases} \mathbb{P}(N_\infty = 2) = \dfrac{\pi_0 \rho^2}{2-\rho} = \dfrac{\rho^2}{\rho+2} \\ \mathbb{E}(N_\infty) = \rho \end{cases}$$

- $M(\lambda)/M(2\mu)/1$:

$$\mathbb{P}(Q_\infty = j) = \pi'_j = \pi'_0 \rho'^j, \ j \geq 0 \quad \text{avec } \rho' = \frac{\lambda}{2\mu} < 1, \quad \pi'_0 = \frac{1}{1+\frac{\rho'}{1-\rho'}} = 1-\rho'$$

$$\mathbb{E}(Q_\infty) = \rho' + \frac{\pi'_0 \rho'^2}{(1-\rho')^2} = \rho' + \frac{\rho'^2}{1-\rho'} = \boxed{\frac{\rho'}{1-\rho'}}, \quad \mathbb{E}(\tilde{Q}_\infty) = \mathbb{E}(Q_\infty) - (1-\pi_0) = \boxed{\frac{\rho'^2}{1-\rho'}}$$

$\tilde{W}_\infty$:
$$\begin{cases} (\tilde{W}_\infty \mid \tilde{W}_\infty > 0) : \mathcal{E}(2\mu - \lambda) \\ \mathbb{E}(\tilde{W}_\infty) = \boxed{\dfrac{\rho'}{2\mu(1-\rho')}} \\ \mathbb{E}(W_\infty) = \boxed{\dfrac{1}{2\mu(1-\rho')}} \end{cases}$$

$$\mathbb{P}(\tilde{W}_\infty = 0) = \mathbb{P}(Q_\infty = 0) = 1 - \frac{\pi'_0 \rho'}{1-\rho'} = \boxed{1-\rho'}$$

nombre de serveurs occupés :
$$\begin{cases} \mathbb{P}(N_\infty = 1) = \dfrac{\pi_0 \rho'}{1-\rho'} = \rho' \\ \mathbb{E}(N_\infty) = \rho' \end{cases}$$

- comparaison des deux files : $\boxed{\lambda < 2\mu}$

	$M(\lambda)/M(2\mu)/1$	Comparaison	$M(\lambda)/M(\mu)/2$	
$\mathbb{E}(N_\infty)$	$\frac{\lambda}{2\mu}$	$<$	$\frac{\lambda}{\mu}$	
$\mathbb{E}(\tilde{Q}_\infty)$	$\frac{\lambda^2}{2\mu(2\mu-\lambda)}$	$>$	$\frac{\lambda^3}{(4\mu^2-\lambda^2)\mu}$	$\frac{\lambda^2}{2\mu(2\mu-\lambda)} \times \underbrace{\frac{\lambda}{2\mu+\lambda}}_{<1}$
$\mathbb{E}(Q_\infty)$	$\frac{\lambda}{2\mu-\lambda}$	$<$	$\frac{4\lambda\mu}{4\mu^2-\lambda^2}$	$= \frac{\lambda}{2\mu-\lambda} \times \underbrace{\frac{4\mu}{2\mu+\lambda}}_{>1}$
$(\tilde{W}_\infty \mid \tilde{W}_\infty > 0)$	$\mathcal{E}(2\mu-\lambda)$	$=$	$\mathcal{E}(2\mu-\lambda)$	
$\mathbb{P}(\tilde{W}_\infty = 0)$	$1 - \frac{\lambda}{2\mu}$	$<$	$\frac{2\mu^2+\lambda\mu-\lambda^2}{2\mu^2+\lambda\mu}$	$= 1 - \frac{\lambda}{2\mu} \times \underbrace{\frac{\lambda}{\mu+\frac{\lambda}{2}}}_{<1}$
$\mathbb{E}(\tilde{W}_\infty)$	$\frac{\lambda}{2\mu(2\mu-\lambda)}$	$>$	$\frac{\lambda^2}{\mu(4\mu^2-\lambda^2)}$	$= \frac{\lambda}{2\mu(2\mu-\lambda)} \times \underbrace{\frac{\lambda}{\mu+\frac{\lambda}{2}}}_{<1}$
$\mathbb{E}(W_\infty)$	$\frac{1}{2\mu-\lambda}$	$<$	$\frac{4\mu}{4\mu^2-\lambda^2}$	$= \frac{1}{2\mu-\lambda} \times \underbrace{\frac{4\mu}{2\mu+\lambda}}_{>1}$

Le temps d'attente pour $M/M(2\mu)/1$ est plus long mais le temps de séjour plus court que pour $M/M(\mu)/2$ $\rightarrow$ un serveur deux fois plus efficace vaut mieux que deux serveurs pour limiter le temps de séjour. De même la longueur de la queue est ~~moins~~ longue pour $M/M(2\mu)/1$.

$\boxed{\text{comparaison entre les files } M(\lambda)/M(\mu)/3 \text{ et } M(\lambda)/M(3\mu)/1}$

• $\underline{M(\lambda)/M(\mu)/3}$: $\mathbb{P}(Q_\infty = j) = \begin{cases} \pi_0 \dfrac{\rho^j}{j!}, & 0 \le j \le 2 \\ \dfrac{9}{2}\pi_0 \left(\dfrac{\rho}{3}\right)^j, & j \ge 3 \end{cases}$ avec $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} < 3$, $\pi_0 = \dfrac{1}{1+\rho+\frac{\rho^2}{2}+\frac{\rho^3}{6-2\rho}} = \dfrac{2(3-\rho)}{6+4\rho+\rho^2}$

$$\begin{cases} \mathbb{E}(Q_\infty) = \rho + \dfrac{\pi_0\,\rho^4}{2(3-\rho)^2} = \rho + \dfrac{\rho^4}{(3-\rho)(6+4\rho+\rho^2)} = \dfrac{18\rho+6\rho^2-\rho^3}{(3-\rho)(6+4\rho+\rho^2)} = \boxed{\dfrac{\lambda(18\mu^2+6\lambda\mu-\lambda^2)}{(3\mu-\lambda)(6\mu^2+4\lambda\mu+\lambda^2)}} \\ \mathbb{E}(\tilde{Q}_\infty) = \mathbb{E}(Q_\infty) - (1-\pi_0) = \dfrac{3\rho^2+\rho^3}{6+4\rho+\rho^2} + \dfrac{\rho^4}{(3-\rho)(6+4\rho+\rho^2)} = \dfrac{9\rho^2}{(3-\rho)(6+4\rho+\rho^2)} = \boxed{\dfrac{9\lambda^2\mu}{(3\mu-\lambda)(6\mu^2+4\lambda\mu+\lambda^2)}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\tilde{W}_\infty \mid \tilde{W}_\infty > 0) : \mathcal{E}(3\mu-\lambda) \qquad \mathbb{P}(N_\infty = 2) = \dfrac{\pi_0\,\rho^3}{2(3-\rho)} = \dfrac{\rho^3}{\rho^2+4\rho+6} \\ \mathbb{E}(\tilde{W}_\infty) = \dfrac{\mathbb{P}(N_\infty=2)}{3\mu-\lambda} = \dfrac{\rho^3}{\mu(3-\rho)(6+4\rho+\rho^2)} = \boxed{\dfrac{\lambda^3}{\mu(3\mu-\lambda)(6\mu^2+4\lambda\mu+\lambda^2)}} \\ \mathbb{E}(W_\infty) = \dfrac{18+6\rho-\rho^2}{\mu(3-\rho)(6+4\rho+\rho^2)} = \boxed{\dfrac{18\mu^2+6\lambda\mu-\lambda^2}{(3\mu-\lambda)(6\mu^2+4\lambda\mu+\lambda^2)}} \end{cases}$$

• $\underline{M(\lambda)/M(3\mu)/1}$: $\mathbb{P}(Q_\infty = j) = (1-\rho')\rho'^j$, $j \ge 0$ avec $\rho' = \dfrac{\lambda}{3\mu} < 1$

$$\begin{cases} \mathbb{E}(Q_\infty) = \dfrac{\rho'}{1-\rho'} = \boxed{\dfrac{\lambda}{3\mu-\lambda}} \\ \mathbb{E}(\tilde{Q}_\infty) = \dfrac{\rho'^2}{1-\rho'} = \boxed{\dfrac{\lambda^2}{3\mu(3\mu-\lambda)}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\tilde{W}_\infty \mid \tilde{W}_\infty > 0) : \mathcal{E}(3\mu-\lambda) \\ \mathbb{E}(\tilde{W}_\infty) = \dfrac{\rho'}{3\mu(1-\rho')} = \boxed{\dfrac{\lambda}{3\mu(3\mu-\lambda)}} \\ \mathbb{E}(W_\infty) = \dfrac{1}{3\mu(1-\rho')} = \boxed{\dfrac{1}{3\mu-\lambda}} \end{cases}$$

• $\underline{\text{Comparaison}}$: $\mathbb{E}(\tilde{W}^{\mu/3}) - \mathbb{E}(\tilde{W}^{3\mu/1}) = \dfrac{\lambda}{\mu(3\mu-\lambda)}\left[\dfrac{\lambda^2}{6\mu^2+4\lambda\mu+\lambda^2} - \dfrac{1}{3}\right] = -\dfrac{2\lambda(\lambda+1)}{3\mu \times (6\mu^2+4\lambda\mu+\lambda^2)} < 0$

$$\mathbb{E}(W)^{\mu/3} - \mathbb{E}(W)^{3\mu/1} = \frac{1}{3\mu-\lambda}\left[\frac{18\mu^2+6\lambda\mu-\lambda^2}{6\mu^2+4\lambda\mu+\lambda^2} - 1\right] = \frac{2(2\mu+\lambda)}{6\mu^2+4\lambda\mu+\lambda^2} > 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathbb{E}(\tilde{W}^{\mu/3}) < \mathbb{E}(\tilde{W}^{3\mu/1}) \\ \text{et } \mathbb{E}(W)^{\mu/3} > \mathbb{E}(W)^{3\mu/1} \end{cases}$$

$\rightarrow$ $\underline{M(\lambda)/M(3\mu)/1 \text{ préférable}}$.

Ex4 (Multiserveurs)

1) Solution 1 : huit files M/M/1 en parallèle

pour chaque file :

$$\begin{cases} \lambda = 2 \text{ paquets/s} \\ \frac{1}{\mu} = \frac{2000}{8000} = 0{,}25\,s \quad (\mu = 4 \text{ paquets/s}) \\ \rho = \frac{\lambda}{\mu} = 0{,}5 \\ \mathbb{E}(\tilde{W}_\infty) = \frac{1}{\mu}\frac{\rho}{1-\rho} = \boxed{250\text{ ms}}, \quad \mathbb{E}(W_\infty) = \boxed{500\text{ ms}} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}(Q_\infty) = \lambda\,\mathbb{E}(W_\infty) = \mu\,\mathbb{E}(\tilde{W}_\infty) = \boxed{1 \text{ paquet}}$$

solution 2 : 1 file M/M/1

$$\begin{cases} \lambda' = 16 \text{ paquets/s} \\ \frac{1}{\mu'} = \frac{2000}{64000} = \frac{1}{32}\,s \quad (\mu' = 32 \text{ paquets/s}) \\ \rho' = \frac{\lambda'}{\mu'} = 0{,}5 \\ \mathbb{E}(\tilde{W}'_\infty) = \frac{1}{\mu'}\frac{\rho'}{1-\rho'} = \frac{1}{32}\,s = \boxed{31{,}25\text{ ms}}, \quad \mathbb{E}(W'_\infty) = \frac{1}{16}s = \boxed{62{,}5\text{ ms}} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}(Q'_\infty) = \lambda'\,\mathbb{E}(W'_\infty) = \mu'\,\mathbb{E}(\tilde{W}'_\infty) = \boxed{1 \text{ paquet}}$$

Le gain de temps est considérable. Quand on partage une voie en n_0 voies, le temps de réponse est $\frac{\rho}{\mu(1-\rho)} \Big/ \frac{\rho'}{\mu'(1-\rho')} = \frac{\mu'}{\mu} = n_0$ fois plus grand $\begin{cases} \lambda' = n_0\lambda \\ \mu' = n_0\mu \\ \rho' = \rho \end{cases}$

Le temps de service perdu par ces voies n'est pas récupérable par les autres.

2) On équilibre la charge entre les 8 serveurs.

a) modèle M/M/8 :

b)

$$\begin{cases} \lambda' = 16 \text{ paquets/s}, \quad n_0 = 8 \text{ serveurs} \\ \frac{1}{\mu} = 0{,}25\,s \text{ pour chaque serveur} \\ \rho'' = \frac{\lambda'}{\mu} = 4 < n_0 = 8 \\ \mathbb{E}(\tilde{W}''_\infty) = \frac{P(n_0)}{n_0 - \rho''}\,\mathbb{E}(S) = \frac{0{,}059}{4} \times 0{,}25 \approx \boxed{3{,}68\text{ ms}} \\ \text{avec } P(n_0) = \frac{\rho''^8}{8!\,(1-\frac{\rho''}{8})(1+\rho''+\frac{\rho''^2}{2!}+\dots+\frac{\rho''^7}{7!})+\rho''^8} \approx 0{,}059 \\ \mathbb{E}(W''_\infty) = 3{,}75 + 250 = \boxed{253{,}68\text{ ms}} \end{cases}$$

On gagne environ 50% par rapport à la solution 1, mais la solution 2 est bien meilleure.

c) $\mathbb{E}(Q''_\infty) = \rho'' + P(n_0)\frac{\rho''}{n_0 - \rho''} = 4 + 0{,}059 \approx \boxed{4{,}05 \text{ paquets}}$.

$= \lambda\,\mathbb{E}(W''_\infty)$

Ex5 (Monoserveur multiclasse sans priorité)

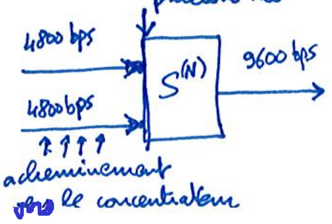
Il y a 2 types d'arrivée avec des temps de services différents.

En entrée : 2 lignes de capacités 4800 bits/s | En sortie : 1 ligne à 9600 bits/s

paquets $\xrightarrow{\text{type 1}}$ 500 bits au taux $\lambda_1 = 2$ paquets/s

$\xrightarrow{\text{type 2}}$ 1000 bits au taux $\lambda_1 = 4$ paquets/s

processus résultant à l'entrée du concentrateur



1) Les processus à l'entrée des deux lignes d'entrée sont Poissoniens et subissent des services exponentiels, donc les processus en sortie de chaque ligne d'entrée sont Poissoniens de même intensité (juste avant le concentrateur)

$\Rightarrow$ Le processus à l'entrée du concentrateur est la somme de deux processus de Poisson indépendants

donc ici un processus de Poisson d'intensité $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$.

2) $1^{\text{ère}}$ ligne : $\lambda_1 = 2$ paquets/s, service $\mu_1 = 9600$ bits/s $= \frac{9600}{500} = \frac{96}{5}$ paquets/s, $\boxed{\frac{1}{\mu_1} = \frac{5}{96}\text{ s}}$

2^{e} ligne : $\lambda_2 = 4$ paquets/s, service $\mu_2 = 9600$ bits/s $= \frac{9600}{1000} = \frac{96}{10}$ paquets/s, $\boxed{\frac{1}{\mu_2} = \frac{10}{96}\text{ s}}$

3) $\frac{1}{\mu} = E(S_N) = P(N=1)\,E(S_1) + P(N=2)\,E(S_2) = \frac{1}{\mu_1}\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} + \frac{1}{\mu_2}\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} = \frac{\rho_1+\rho_2}{\lambda_1+\lambda_2} = \boxed{\frac{\rho}{\lambda}}$ avec $\rho_i = \frac{\lambda_i}{\mu_i}$, $\rho = \rho_1 + \rho_2$

trafic résultant $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$. Le système se comporte comme une file $M(\lambda)/G(\mu)/1$.

La loi de S_N est en fait hyper-exponentielle : $\boxed{f_{S_N}(t) = \frac{\lambda_1\mu_1}{\lambda_1+\lambda_2}e^{-\mu_1 t} + \frac{\lambda_2\mu_2}{\lambda_1+\lambda_2}e^{-\mu_2 t}}$.

$$E(S_N^2) = P(N=1)\,E(S_1^2) + P(N=2)\,E(S_2^2) = \frac{2}{\mu_1^2}\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} + \frac{2}{\mu_2^2}\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}$$

$$\mathrm{var}(S_N) = E(S_N^2) - [E(S_N)]^2 = \frac{\lambda_1(\lambda_1+2\lambda_2)}{\mu_1^2(\lambda_1+\lambda_2)^2} + \frac{\lambda_2(\lambda_2+2\lambda_1)}{\mu_2^2(\lambda_1+\lambda_2)^2} - \frac{2}{\mu_1\mu_2}\frac{\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_1+\lambda_2)^2}$$

$$CV(S_N) = k_{S_N}^2 = \boxed{\frac{1}{\rho^2}\left[\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}-\frac{\lambda_2}{\mu_2}\right)^2 + 2\lambda_1\lambda_2\left(\frac{1}{\mu_1^2}+\frac{1}{\mu_2^2}\right)\right]} \rightarrow k_{S_N}^2 - 1 = \frac{1}{\rho^2}\left[(\rho_1-\rho_2)^2 + 2\lambda_1\lambda_2\left(\frac{1}{\mu_1^2}+\frac{1}{\mu_2^2}\right) - (\rho_1+\rho_2)^2\right]$$

$$= 2\lambda_1\lambda_2\left(\frac{1}{\mu_1}-\frac{1}{\mu_2}\right)^2 > \boxed{0}$$

4) $E(\tilde{W}_\infty) = \frac{\rho(1+k_{S_N}^2)\,E(S_N)}{2(1-\rho)}$ avec

$$\begin{cases} \rho = \rho_1+\rho_2 = \frac{10}{96} + \frac{40}{96} = \frac{50}{96} = 0{,}52, \quad \frac{\rho}{1-\rho} = 1{,}087 \\ \lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = 6 \text{ paquets/s} \\ E(S_N) = \frac{1}{\mu} = \frac{\rho}{\lambda} = 86{,}8\text{ms} \\ k_{S_N}^2 = \frac{1}{0{,}52^2}\left[\left(\frac{30}{96}\right)^2 + 16 \times \frac{125}{96^2}\right] = 1{,}16 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} E(\tilde{W}_\infty) = \frac{25}{46}(1+1{,}16^2) \times 86{,}8 \simeq \boxed{110\text{ ms}} \\ E(W_\infty) \simeq \boxed{196\text{ ms}} \end{cases}$$

$E(Q_\infty) = \lambda\, E(W_\infty) = 6 \times 0{,}196 \simeq \boxed{1{,}17 \text{ paquets}}$.

5) Calculs avec $M(\lambda)/M(\mu)/1$: $E(\tilde{W}_\infty) = \frac{\rho}{1-\rho}E(S_N) \simeq 94$ ms, $E(W_\infty) \simeq 181$ ms, $E(Q_\infty) \simeq 1{,}08$ paquets.

$\rightarrow$ sous-estimations.

complément

* fonction génératrice de Q_∞ : $G_{Q_\infty}(z) = E(z^{Q_\infty}) = (1-\rho)(z-1)\frac{L_{S_N}(\lambda(1-z))}{1-L_{S_N}(\lambda(1-z))}$

avec $L_{S_N}(s) = E[e^{-sS_N}] = \frac{\lambda_1}{\lambda}\frac{\mu_1}{s+\mu_1} + \frac{\lambda_2}{\lambda}\frac{\mu_2}{s+\mu_2} = \frac{(\lambda_1\mu_1+\lambda_2\mu_2)s + \lambda\mu_1\mu_2}{\lambda(s+\mu_1)(s+\mu_2)}$

$$z - L_{S_N}(\lambda(1-z)) = z - \frac{(\lambda_1\mu_1+\lambda_2\mu_2+\mu_1\mu_2) - (\lambda_1\mu_1+\lambda_2\mu_2)z}{[\lambda(1-z)+\mu_1][\lambda(1-z)+\mu_2]} = \frac{(1-z)[\lambda^2(1-z)z + \lambda(\mu_1+\mu_2)z - \overbrace{\vphantom{|}}^{\lambda_1\mu_1+\lambda_2\mu_2+\mu_1\mu_2}]}{[\lambda(1-z)+\mu_1][\lambda(1-z)+\mu_2]}$$

$$\Rightarrow \boxed{G_{Q_\infty}(z) = (1-\rho)\frac{(\lambda_1\mu_1+\lambda_2\mu_2+\mu_1\mu_2) - (\lambda_1\mu_1+\lambda_2\mu_2)z}{\lambda^2 z^2 - \lambda(\lambda+\mu_1+\mu_2)z + (\lambda_1\mu_1+\lambda_2\mu_2+\mu_1\mu_2)}}$$

* transformée de Laplace $\tilde{W}_\infty$: $L_{\tilde{W}_\infty}(s) = E(e^{-s\tilde{W}_\infty}) = \frac{(1-\rho)z}{z+\lambda(L_{S_N}(z)-1)} = \frac{(1-\rho)z(z+\mu_1)(z+\mu_2)}{(z-\lambda)(z+\mu_1)(z+\mu_2) + (\lambda_1\mu_1+\lambda_2\mu_2)z + \lambda\mu_1\mu_2}$

soit $\boxed{L_{\tilde{W}_\infty}(z) = \frac{(1-\rho)(z+\mu_1)(z+\mu_2)}{z^2 + (\mu_1+\mu_2-\lambda_1-\lambda_2)z + (\mu_1\mu_2 - \lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1)}}$

Ex 6 (Monoserveur multiclasse avec priorités)

1) serveur sans priorité : résultant $M(\lambda)/G/1$ avec un service résultant S_N (cf ex.5.)

N : type de paquet

$$E(S_N) = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu_1}\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} + \frac{1}{\mu_2}\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2} = \frac{0{,}2}{\mu_1} + \frac{0{,}8}{\mu_2} \quad (\lambda_1 = 20\% \text{ de } \lambda,\ \lambda_2 = 80\% \text{ de } \lambda)$$

$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$

$$\frac{1}{\mu_1} = \frac{48}{9600} = 5\,ms \quad \text{et} \quad \frac{1}{\mu_2} = \frac{960}{9600} = 100\,ms \implies \frac{1}{\mu} = \boxed{81\,ms}$$

charge donnée $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 0{,}5 \implies \lambda = \frac{\mu}{2} = \boxed{6{,}17 \text{ paquets}/s}$

$\rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1} = 6{,}17.10^{-3}$, $\rho_2 = \frac{\lambda_2}{\mu_2} = 0{,}493$

a) $E(X^2) = (1+k_X^2)[E(X)]^2$

$$E(S_N^2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}E(S_1^2) + \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}E(S_2^2) = 0{,}2\,[E(S_1)]^2(1+k_{S_1}^2) + 0{,}8\,[E(S_2)]^2(1+k_{S_2}^2)$$

or $k_{S_1} = 0$ (paquets déterministes, taille fixe), $k_{S_2}^2 = 2{,}75$

d'où $E(S_N^2) = \frac{0{,}2}{\mu_1^2} + \frac{0{,}8\times 3{,}75}{\mu_2^2} = 3{,}0005.10^{-2}\ s^2$

puis $1 + k_{S_N}^2 = \frac{E(S_N^2)}{[E(S_N)]^2} = \boxed{4{,}57}$

b) $E(\tilde{W}) = \frac{\rho(1+k_{S_N}^2)}{2(1-\rho)}E(S_N) = \frac{4{,}57\times 81}{2} = \boxed{185\,ms}$

$$\boxed{E(\tilde{W}) = \frac{\lambda E(S_N^2)}{2(1-\rho)} = \frac{\lambda_1 E(S_1^2) + \lambda_2 E(S_2^2)}{2(1-\rho)}}$$

2) serveur avec priorités :

a) Avec préemption :

$$\begin{cases} E(\tilde{W}_1) = \frac{\rho_1(1+k_{S_1}^2)E(S_1)}{2(1-\rho_1)} = \frac{\lambda_1 E(S_1^2)}{2(1-\rho_1)} \\ E(\tilde{W}_2) = \frac{\lambda_1 E(S_1^2) + \lambda_2 E(S_2^2)}{2(1-\rho_1)(1-\rho)} \end{cases}$$

on a $\frac{1}{1-\rho_1} < \frac{1}{1-\rho} < \frac{1}{(1-\rho_1)(1-\rho)}$ d'où $\boxed{E(\tilde{W}_1) < E(\tilde{W}) < E(\tilde{W}_2)}$

La formule donnant $E(W_1)$ est la formule classique d'une file $M/G/1$ ce qui est cohérent puisque les paquets de type 1 sont prioritaires avec préemption et donc les paquets de type 2 n'influent pas sur leur transit.

ici
$$\begin{cases} E(\tilde{W}_1) = \frac{\rho_1}{2(1-\rho_1)}\frac{1}{\mu_1} = \boxed{0{,}015\,ms} \rightarrow \text{instantané !} \\ E(\tilde{W}_2) = \frac{\rho_1 E(S_1) + \rho_2(1+k_{S_2}^2)E(S_2)}{2(1-\rho_1)(1-\rho)} \simeq \boxed{185\,ms} \rightarrow \text{pratiquement inchangé} \end{cases}$$

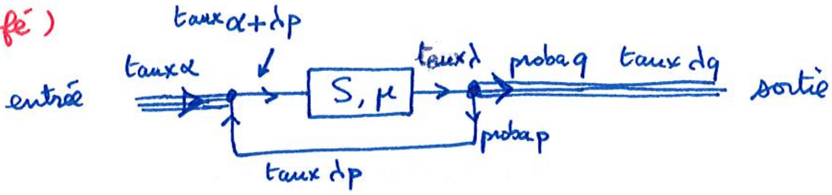
b) Sans préemption :

$$\begin{cases} E(\tilde{W}_1) = \frac{\rho_1(1+k_{S_1}^2)E(S_1) + \rho_2(1+k_{S_2}^2)E(S_2)}{2(1-\rho_1)} = \frac{\lambda_1 E(S_1^2) + \lambda_2 E(S_2^2)}{2(1-\rho_1)} \\ E(\tilde{W}_2) = \frac{1}{1-\rho}E(W_1) \end{cases}$$

on a toujours $E(\tilde{W}_1) < E(\tilde{W}) < E(\tilde{W}_2)$. L'attente des paquets de type 2 est la même dans les deux cas puis la préemption n'influe pas sur leur temps d'attente (seulement sur leur temps de services).

ici
$$\begin{cases} E(\tilde{W}_1) = (1-\rho)\,E(\tilde{W}_2) = 0{,}5\times 185 \simeq \boxed{92{,}5\,ms} \\ E(\tilde{W}_2) \simeq \boxed{185\,ms} \end{cases}$$

Ex 7. (Comptoir de café)



1) égalité des flux entrant et sortant à l'équilibre : $\alpha+\lambda p=\lambda \Rightarrow \lambda=\dfrac{\alpha}{q}$

2) $\rho=\dfrac{\lambda}{\mu}=\dfrac{\alpha}{q\mu}<1$. La loi stationnaire est $\pi_n=\mathbb{P}(Q_\infty=n)=(1-\rho)\rho^n,\ n\geq 0$ i.e. $\pi:\mathcal{G}(1-\rho)$.

3) processus des sorties définitives : processus de Poisson $\mathcal{P}(\lambda q=\alpha)$.

4) a) $\mathbb{P}(T>t\mid Q_\infty=n)=\mathbb{P}\left(\begin{array}{l}\text{le prochain client venant de l'extérieur arrive après } t\\ \text{et}\\ \text{les clients du système reviennent après } t \text{ ou pas du tout}\end{array}\middle| Q_\infty=n\right)$

$$=e^{-\alpha t}\left[\mathbb{P}(\text{les } n \text{ clients quittent le système}\mid Q_\infty=n)+\sum_{j=1}^{n}\mathbb{P}\left(\begin{array}{l}\text{les clients n° } 1,2,\dots,j-1 \text{ quittent le système}\\ \text{et le client n° } j \text{ revient après } t\mid Q_\infty=n\end{array}\right)\right]$$

$$=e^{-\alpha t}\Big[q^n+\sum_{j=1}^{n}q^{j-1}p\,\mathbb{P}(\underbrace{\text{le client n° } j \text{ revient après } t}_{R_j>t}\mid Q_\infty=n)\Big]\quad R_j:\text{ loi d'Erlang } \Gamma(j,\mu)$$

$$=e^{-\alpha t}\left[q^n+\sum_{j=1}^{n}q^{j-1}p\int_t^{+\infty}\frac{\mu^j s^{j-1}}{(j-1)!}e^{-\mu s}\,ds\right],\quad n\geq 1.$$

b) Alors $\mathbb{P}(T>t)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(T>t\mid Q_\infty=n)\,\mathbb{P}(Q_\infty=n)=\pi_0\,\mathbb{P}(T>t\mid Q_\infty=0)+\sum_{n=1}^{+\infty}\pi_n\,\mathbb{P}(T>t\mid Q_\infty=n)$

$$=e^{-\alpha t}(1-\rho)\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[(\rho q)^n+\rho^n\sum_{j=1}^{n}q^{j-1}p\int_t^{+\infty}\frac{\mu^j s^{j-1}}{(j-1)!}e^{-\mu s}\,ds\right]\right]$$

$$=e^{-\alpha t}(1-\rho)\left[\frac{1}{1-\rho q}+p\mu\sum_{j=1}^{\infty}\underbrace{\left(\sum_{n=j}^{\infty}\rho^n\right)}_{\frac{\rho^j}{1-\rho}}\int_t^{+\infty}\frac{(\mu q s)^{j-1}}{(j-1)!}e^{-\mu s}\,ds\right]$$

$$=e^{-\alpha t}\left[\frac{1-\rho}{1-\rho q}+p\mu\rho\int_t^{+\infty}\underbrace{\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\mu q\rho s)^j}{j!}}_{e^{\mu q\rho s}=e^{\alpha s}}e^{-\mu s}\,ds\right]$$

$$=e^{-\alpha t}\left[\frac{1-\rho}{1-\rho q}+p\mu\rho\,\frac{e^{-(\mu-\alpha)t}}{\mu-\alpha}\right]$$

$$=\boxed{\frac{q\mu-\alpha}{q(\mu-\alpha)}e^{-\alpha t}+\frac{p\alpha}{q(\mu-\alpha)}e^{-\mu t}}\ \rightarrow \text{loi hyper-exponentielle.}$$

Ainsi $T=S_N$ avec $N:\Omega\to\{1,2\}$ $\begin{cases}\mathbb{P}(N=1)=\dfrac{q\mu-\alpha}{q(\mu-\alpha)}\\[2mm] \mathbb{P}(N=2)=\dfrac{p\alpha}{q(\mu-\alpha)}\end{cases}$

$\begin{cases}S_1:\mathcal{E}(\alpha)\\ S_2:\mathcal{E}(\mu)\end{cases}$ indépendantes