Quelques énoncés du chapitre 1 non démontrés en cours

Dans ce texte, nous détaillerons certains énoncés du Chapitre 1 du cours dont les preuves n'ont pas été données bien qu'elles soient simples et exmples utiles de raisonnement analytique. Ceci constitue un complément qui a pour but d'améliorer votre appréciation de divers aspects du cours.

Nous commençons avec des propriétés fondamentales des ouverts et des fermés.

Proposition 1 *Soit* (E, d) *un espace métrique.*

1. *Toute boule ouverte est un ouvert de* E*.*
2. *Toute boule fermée est un fermé de* E*.*

Preuve. 1. Soient $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}_+$, et $B(a, r)$ la boule ouverte de centre a et de rayon r dans E. Nous montrerons que si $x \in B(a, r)$ alors il existe $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $B(x, \delta) \subset B(a, r)$. Pour ce faire, il suffit de choisir δ tel que $0 < \delta < r - d(x, a)$. En effet, si $y \in B(x, \delta)$ alors

$$d(y, a) \leq d(y, x) + d(x, a) < \delta + d(x, a) < r - d(x, a) + d(x, a) = r \ ;$$

en d'autres termes tout point qui appartient à $B(x, \delta)$ appartient aussi à $B(y, r)$.

Remarque sur le paragraphe précédent : Pour apprécier le raisonnement du paragraphe précédent, faites le dessin du cas particulier d'une boule dans $\mathbb{R}^2$, essayez de voir comment l'inégalité triangulaire intervient.

2. Considérons maintenant la boule fermée $\overline{B}(a, r)$. Pour vérifier que c'est en fait un fermé de (E, d), il suffit de vérifier que son complémentaire est ouvert. Soit donc $x \in E \setminus \overline{B}(a, r)$. Alors, la distance $d(x, a) > r$. Appelons cette distance r', et considérons la boule ouverte $B(x, \delta)$ avec $0 < \delta < r' - r$. Il suffira de montrer que $B(x, \delta)$ n'intersecte pas $\overline{B}(a, r)$; en d'autres termes, si $y \in B(x, \delta)$, il faut vérifier que $d(y, a) > r$.

D'après l'inégalité triangulaire,

$$d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a) \ .$$

De manière équivalente,

$$d(y, a) \geq d(x, a) - d(x, y) \ .$$

Or,

$$d(x, a) - d(x, y) > r - \delta > r' - (r' - r) = r \ .$$

Vous pouvez mieux apprécier ce dernier raisonnement en faisant un dessin comme indiqué dans le premier point. □

Proposition 2 *Soit* (E, d) *un espace métrique.*

1. *L'union de toute famille d'ouverts est un ouvert.*
2. *L'intersection d'une famille finie d'ouverts est ouverte.*

Preuve. 1. Soit $\{A_i \mid i \in I\}$ une famille de parties ouvertes de E. On montrera que $\bigcup_{i \in I} A_i$ est un ouvert de E. Soit alors $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$. D'après la définition de l'union d'une famille d'ensembles il existe $i_0 \in I$ tel que $x \in A_{i_0}$. Or, $B(x, a) \subset A_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} A_i$.

2. Pour le deuxième point, il suffit de montrer que l'intersection deux ouverts est ouverte. Le cas général se fait par récurrence (pouvez-vous voir ?).

Soient donc A_1 et A_2 deux ouverts, et $x \in A_1 \cap A_2$. Comme A_1 et A_2 sont ouverts, il existe deux nombres réels r_1 et r_2 strictement positifs tels que $B(x, r_1) \subset A_1$ et $B(x, r_2) \subset A_2$. On pose alors $r = \min(r_1, r_2)$, et r est le rayon d'une boule de centre x qui appartient à la fois à A_1 et A_2 puisque

$$B(x, r) \subset B(x, r_1) \subset A_1 \text{ et } B(x, r) \subset B(x, r_2) \subset A_2 \ .$$

Le dernier paragraphe montre que tout point de $A_1 \cap A_2$ est entouré d'une boule ouverte contenue dans cette intersection. Ainsi, $A_1 \cap A_2$ est ouverte. □

Corollaire 3 *Soit* (E, d) *un espace métrique.*

1. *L'intersection de toute famille de fermés est un fermé.*
2. *L'union d'une famille finie de fermés est un fermé.*

Preuve. C'est une conséquence directe de la définition d'une partie fermée. C'est un bon exercice de rédiger les détails qui ne seront pas donnés ici. □

Une direction des liens entre les notions de distance et de norme a été énoncée mais sans preuve. La proposition suivante a pour but de revisiter ce point.

Proposition 4 *Soit* $(E, || \, ||)$ *un espace normé. Alors, la norme* $|| \, ||$ *induit une métrique sur* E. *Par conséquent, tout espace normé est aussi un espace métrique.*

Preuve. Sur l'espace $(E, || \, ||)$, nous définissons l'application suivante :

$$\begin{array}{cccc} d & : & E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & & (x, y) & \longmapsto & ||x - y|| \ . \end{array}$$

Il suffira de montrer que d est une distance. Allons-y !

D1 Par définition de d, $d(x, y) = 0$ si et seulement si $||x - y|| = 0$. Ceci équivaut à ce que $x - y$ soit le vecteur nul de l'espace vectoriel E d'après la condition N1 de la définition d'une norme. Ainsi, $x = y$.

D2 Si $x, \ y \in E$ alors, $||x - y|| = ||(-1).(y - x)||$. D'après la condition N2, cette dernière expression est égale à $|-1| \ ||y - x|| = ||y - x||$.

D3 Si $x, \ y, \ z \in E$, alors

$$d(x, y) = ||x - y|| = ||x - z + z - y|| \ .$$

L'inégalité triangulaire pour les normes (la condition N3) montre alors que

$$||x - z + z - y|| \leq ||x - z|| + ||z - y|| = d(x, z) + d(z, y) \ .$$

□

Rappelons que l'inverse de cette dernière proposition est fausse. Certains contrexemples seront étudiés en cours et en travaux dirigés.

Nous finissons ces compléments pour le premier chapitre des notes avec une proposition sur les conséquences topologiques de l'équivalence des métriques, donc des normes.

Proposition 5 *Soit* E *un ensemble* (*resp. un espace vectoriel*) *muni de deux notions de distance* d *et* d' (*resp. de normes* $|| \, ||$ *et* $|| \, ||'$) *équivalentes. Alors, les espaces métriques* (E, d) *et* (E, d') (*resp. normés* $(E, || \, ||)$ *et* $(E, || \, ||')$) *ont les mêmes ouverts, donc les mêmes fermés. En d'autres termes, les topologies induites par les deux métriques* (*resp. normes*) *sont la même.*

Preuve. Pour vérifier l'énoncé, il suffit de montrer que tout ouvert U par rapport à d est aussi un ouvert par rapport à d'. Soit donc U un ouvert par rapport à la métrique d. D'après la définition d'un ouvert par rapport à la topologie induite par une métrique, pour tout $a \in U$, il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que la boule ouverte de rayon r, notamment $B(a, r)$, soit contenue dans U. En utilisant cette boule et la notion d'équivalence, nous essayerons d'expliciter le rayon d'une boule ouverte par rapport à d' qui soit de centre a et contenue dans U.

Comme par hypothèse, d et d' sont deux métriques équivalentes, il existe $\beta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour toute paire d'éléments x et y de E, $d(x, y) \leq \beta d'(x, y)$. Considérons $B'(a, \frac{r}{\beta})$, une boule ouverte par rapport à d' et de centre a. Un élément $x \in E$ appartient à $B'(a, \frac{r}{\beta})$ si et seulement si $d'(a, x) < \frac{r}{\beta}$. Ceci équivaut à $\beta d'(a, x) < r$. Or, d'après le choix de β, $d(x, a) \leq \beta d'(x, a)$. Par conséquent, $d(x, a) < r$. En d'autres termes, $x \in B(a, r)$. Comme x était arbitrairement choisi de $B'(a, \frac{r}{\beta})$, nous pouvons conclure que $B'(a, \frac{r}{\beta}) \subset B(a, r)$. Or, la boule $B(a, r)$ est contenue dans U, ainsi il en est de même pour $B'(a, \frac{r}{\beta})$. Il en découle que U est ouvert par rapport à d'.

La preuve pour les normes est la même, quitte à remplacer les métriques par des normes. □

Pour mieux apprécier le raisonnement de la preuve de la proposition 5, il peut être utile de considérer le cas particulier des équivalences discutées pendant les travaux dirigés.