La proposition II.2.1 du cours sur l'intérieur et l'adhérence

Rappelons d'abord la définition de départ :

Définition 1 *Soient $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique, $A \subset E$ et $x \in E$.*

1. *Le point x est dit* intérieur *à A s'il existe un ouvert U ($U \in \mathcal{T}$) tel que $x \in U$ et $U \subset A$.*
2. *Le point x est dit* adhérent *à A si pour tout ouvert U tel que $x \in U$, l'intersection $U \cap A \neq \emptyset$.*

Voici l'énoncé de la proposition en question :

Proposition 1 *Soient $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique et $A \subset E$. Les conclusions suivantes sont vraies :*

1. *Tout point x intérieur à A appartient à A.*
2. *L'ensemble des points intérieurs à A est un ouvert de E par rapport à la topologie $\mathcal{T}$; c'est la plus grande partie ouverte de A contenue dans A.*
3. *Tout point de A est adhérent à A.*
4. *L'ensemble des points adhérents à A est un fermé de E par rapport à la topologie $\mathcal{T}$; c'est la plus petite partie fermée de E qui contient A.*

Des usages du type "la plus grande partie" ou "la plus petite partie" peuvent semer la confusion dans les esprits. Précisons donc ce que nous en entendons dans le contexte de la proposition 1 :

– l'ensemble des points intérieurs à A, l'*intérieur* de A contient toute partie de A ouvert par rapport à la topologie $\mathcal{T}$; en d'autres termes, si U est un ouvert et que $U \subset A$ alors $U \subset \overset{\circ}{A}$.
– tout fermé de E qui contient A contient l'ensemble des points adhérents à A, l'*adhérence* de A, $\overline{A}$; en d'autres termes si $A \subset F$ avec F fermé, alors $\overline{A} \subset F$.

La preuve suivante vérifiera ces propriétés :

Preuve de la proposition 1. Le premier point découle de la définition d'un point intérieur à A.

En ce qui concerne le deuxième point, rappelons que d'après la définition d'un point intérieur à A, si x est un tel point, alors il existe U_x un ouvert de E contenu dans A et auquel appartient x. Comme l'union de toute famille d'ouverts est ouverte, l'union

$$\bigcup_{x \in \overset{\circ}{A}} U_x$$

est un ouvert. Cette union, par sa définition, contient $\overset{\circ}{A}$. De plus, elle est contenue dans A. Par conséquent, tout point de $\bigcup_{x \in \overset{\circ}{A}} U_x$ satisfait la condition pour être intérieur à A. Ainsi $\bigcup_{x \in \overset{\circ}{A}} U_x \subset \overset{\circ}{A}$, et l'égalité des deux ensembles s'ensuit.

Pour finir la preuve du deuxième point, il reste à vérifier pourquoi $\overset{\circ}{A}$ est le plus grand ouvert de E contenu dans A. Or, si $U \subset A$ est un ouvert, comme dans le raisonnement du paragraphe précédent, chacun de ses points satisfait la condition d'être intérieur à A. Ainsi $U \subset \overset{\circ}{A}$.

Le troisième point est assez clair puisque pour tout $a \in A$, l'intersection de tout ouvert avec A contient au moins le point a.

Pour vérifier le quatrième point, nous montrerons que $\overline{A}$ est l'intersection de tous les fermés contenant A. Si $x \in \overline{A}$ et que F est un fermé de E contenant A, alors en particulier, $E \setminus F$ un ouvert. Il est impossible que cet ouvert contienne x puisque d'après la définition d'un point adhérent à A, tout ouvert contenant x a une intersection non vide avec A. Ceci n'est pas le cas pour $E \setminus F$ puisque $A \subset F$. Ainsi $x \in F$.

Le raisonnement du paragraphe précédent montre que $\overline{A}$ est contenu dans l'intersection des fermés de E contenant A. Montrons maintenant que $\overline{A}$ contient cette intersection. Notons cette intersection C provisoirement. Nous montrerons que $(E \setminus \overline{A}) \cap C = \emptyset$, ce qui équivaut à montrer que $C \subset \overline{A}$. Soit donc $y \in E \setminus \overline{A}$. D'après la définition de l'adhérence, il existe un ouvert U_y de E contenant y dont l'intersection avec A est vide. Par conséquent, $E \setminus U_y$ est un fermé de E qui contient A. Il s'ensuit que $E \setminus U_y$ contient C aussi, puisque C est par définition l'intersection de tous ces fermés. Ainsi $y \notin C$.

Les deux paragraphes précédents montrent que $\overline{A}$ est exactement l'intersection de tous les fermés qui contiennent A. Cette conclusion finit la preuve du point 4 (voyez-vous pourquoi ?). $\square$

Le corollaire suivant de la proposition précédente est parfois utile :

Corollaire 2 *Soient* $(E, \mathcal{T})$ *un espace topologique et* $A \subset E$. *Alors*

1. *A est un ouvert de E si et seulement si* $A = \overset{\circ}{A}$ *;*
2. *A est un fermé de E si et seulement si* $A = \overline{A}$.