**Certains résultats du troisième chapitre**

Ce volet des compléments de cours contient plusieurs types de résultats. Nous commencerons par donner les preuves de certaines propriétés élémentaires des limites. Comme c'est souvent le cas des preuves données en cours ou dans les compléments, leurs preuves sont aussi de valeur pratique. Il est donc conseillé aux étudiants de les aborder en détail.

Le théorème à la fin présente un résultat plus avancé qui souligne les liens entre la continuité des fonctions sur un ensemble et la topologie. Pour simplifier la présentation, nous travaillerons sur $\mathbb{R}^p$ tout entier plutôt que sur une partie $D \subset \mathbb{R}^p$.

Commençons donc par les énoncés de base.

**Proposition 1** *Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$, $D \subset \mathbb{R}^p$, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^q$, et $a \in \overline{D}$. Alors les énoncés suivants sont vrais :*

1. *si $f$ a une limite quand $x$ tend vers $a$, alors cette limite est unique ;*
2. *ni l'existence de la limite $\lim_{x \to a} f(x)$ ni sa valeur ne dépend du choix de la norme.*

**Preuve.** 1. Si $l_1$ et $l_2$ sont deux points limites dans $\mathbb{R}^q$ de $f$ quand $x \longrightarrow a$, alors nous pouvons écrire les (in)égalités suivantes :

$$||l_1 - l_2|| = ||l_1 - f(x) + f(x) - l_2|| \le ||l_1 - f(x)|| + ||f(x) - l_2|| \text{ pour tout } x \in D.$$

D'après la définition des limites, pour tout $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $||l_1 - f(x)|| < \frac{\epsilon}{2}$ et que $||l_2 - f(x)|| < \frac{\epsilon}{2}$ dès que $||x - a|| < \delta$. Ainsi, $||l_1 - l_2|| < \epsilon$. Comme $\epsilon$ est arbitrairement choisi parmi les nombres réels strictement positifs, il n'y a qu'un seul nombre réel positif possible comme valeur de $||l_1 - l_2||$, c'est 0. D'après la condition N1 de la définition des normes, ceci équivaut à $l_1 = l_2$.

2. La preuve du deuxième point est d'esprit similaire à celle du premier point, quoique légèrement plus compliquée. Nous noterons $||\ ||$ et $||\ ||'$ deux normes sur $\mathbb{R}^p$. D'après le fait admis du premier chapitre sur les normes définies dans $\mathbb{R}^p$, ces deux normes sont équivalentes. En fait, notre raisonnement ci-dessous montre que chaque fois que deux normes sur un espace normé arbitraire sont équivalentes, alors les calculs de limites en utilisant l'une donnent les mêmes résultats qu'en utilisant l'autre.

Soient $b = \lim_{x \to a} f(x)$ la limite par rapport à la norme $||\ ||$, et $b' = \lim_{x \to b} f(x)$ la limite par rapport à l'autre norme $||\ ||'$. D'après l'inégalité triangulaire (N3), $||b - b'|| \le ||b - f(x)|| + ||f(x) - b'||$. Comme les deux normes sont équivalentes, il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $||f(x) - b'|| \le \alpha ||f(x) - b'||'$. Choisissons maintenant $\delta_1,\ \delta_2 \in \mathbb{R}_+^*$ tels que

$$||x - a|| < \delta_1 \Rightarrow ||f(x) - b|| < \frac{\epsilon}{2} \text{ et}$$

$$||x - a||' < \delta_2 \Rightarrow ||f(x) - b'||' < \frac{\epsilon}{2\alpha}\ .$$

Comme les deux normes sont équivalentes, il existe $\beta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\beta ||x - a|| \le ||x - a||'$. Si l'on pose $\delta = \min(\delta_1, \frac{\delta_2}{\beta})$, alors il en découle que

$$||x - a|| < \delta \Rightarrow ||b - b'|| < \epsilon\ .$$

Comme $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$ est arbitraire, la seule possibilité pour la valeur de $||b - b'||$ est 0. D'après la condition N1 de la définition d'une norme, ceci équivaut à $b = b'$.

(*Pour mieux apprécier ce raisonnement, il est toujours utile de penser aux boules en forme de sphère, de losange et de carré pour les normes 2, 1 et $\infty$. Toute boule d'une certaine forme en contient une de toute autre forme aussi petite soit-elle.*). □

Nous vérifierons maintenant une caractérisation du fait d'avoir une limite en utilisant les suites. Les suites fournissent un outil efficace dans les raisonnements de limites.

**Proposition 2** *Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$, $D \subset \mathbb{R}^p$, et $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^q$ une fonction. Pour tout point $a \in \overline{D}$, $\lim_{x \to a} f(x) = l$ si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $D$ qui converge à $a$, $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = l$.*

**Preuve.** Supposons d'abord que $\lim_{x \to a} f(x) = l$ et que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $a$. Nous montrerons que $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = l$. En d'autres termes, nous vérifierons que pour tout $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N$ implique $||f(x_n) - l|| < \epsilon$. Fixons donc un tel $\epsilon$ arbitrairement choisi. D'après la définition des limites (la définition III.2.1 des notes de cours), il existe $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $x \in B(a, \delta)$, $f(x) \in B(l, \epsilon)$. Pour un tel $\delta$, la définition de la convergence des suites montre qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N$ entraîne $||x_n - a|| < \delta$. Par conséquent, $||f(x_n) - l|| < \epsilon$ pour tout $n \geq N$.

Maintenant, montrons que la condition sur les suites est suffisante pour conclure l'existence de la limite. Pour ce faire, nous procédons en considérant la contraposée. Nous supposerons que

$$\lim_{x \to a} f(x) \neq l \ ,$$

et nous "construirons" une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $D$ qui tend vers $a$ tandis que

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) \neq l \ .$$

Nous avons mis entre " " le verbe construire parce que la preuve n'est pas aussi constructive que le mot ne le fait entendre.

D'après la définition d'une limite, quand $\lim_{x \to a} f(x) \neq l$, il existe $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $\delta \in \mathbb{R}_+^*$, il existe un élément que nous noterons $x_\delta$ dans l'intersection $B(a, \delta) \cap D$ tel que $||f(x_\delta) - l|| \geq \epsilon$. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ si $\delta = \frac{1}{n}$, il existe $x_n \in B(a, \frac{1}{n}) \cap D$ tel que $||f(x_n) - l|| \geq \epsilon$. Notons qu'il peut y avoir beaucoup de points ayant ces propriétés mais nous n'en retenons qu'un seul, arbitrairement choisi de l'intersection $B(a, \frac{1}{n}) \cap D$.

L'ensemble des $x_n$ permet de définir une suite dans $D$ qui converge vers $a$. Or la suite formé par les $f(x_n)$ ne converge pas vers $l$ puisqu'aucun de ces points ne peut appartenir à $B(l, \epsilon)$. Cette conclusion finit la preuve. □

Cette caractérisation permet de démontrer la caractérisation similaire de la continuité abordée en cours (la proposition III.4.1 des notes de cours) :

> *$f$ est continue en un point $a$ si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $D$, quand $\lim_{n \to +\infty} x_n = a$, $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(a)$.*

Finalement, nous montrerons une caractérisation importante de la continuité. Comme c'était indiqué en cours, ce théorème présente une importance double. D'un côté, il montre que pour définir la continuité nous n'avons pas vraiment besoin d'une notion de distance. Il suffit de pouvoir définir des ouverts et des fermés, en d'autres termes, d'avoir une topologie. D'un autre côté, le résultat, comme illustré en cours et pendant les travaux dirigés, a une valeur pratique puisque parfois il permet de simplifier la vérification des propriétés topologiques de certains ensembles.

Notons aussi que l'énoncé n'évoque que la continuité sur la totalité d'un ensemble de points. C'est dans la preuve que les points individuels apparaissent.

**Théorème 1** *Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$ une application. Les conditions sont équivalentes :*

1. *$f$ est continue ;*
2. *si $V \subset \mathbb{R}^q$ est un ouvert, alors $f^{-1}(V)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^p$ (rappel : $f^{-1}(V) = \{a \in \mathbb{R}^p | f(a) \in V\}$ ) ;*
3. *si $F \subset \mathbb{R}^q$ est un fermé, alors $f^{-1}(F)$ est fermé de $\mathbb{R}^p$.*

**Preuve.** Montrons d'abord l'équivalence des deux premiers points. Supposons d'abord que $f$ soit continue, et fixons une ouvert $V$ de $\mathbb{R}^q$. Soit $a \in f^{-1}(V)$. Notre objectif est de trouver une boule ouverte de centre $a$ qui soit contenue dans $f^{-1}(V)$. Pour ce faire, nos ressources sont l'ensemble $f^{-1}(V)$, qui est par hypothèse ouvert, et la continuité de la fonction $f$.

Puisque $a \in f^{-1}(V)$, $f(a) \in V$. L'ensemble $V$ étant ouvert, il existe une boule ouverte de centre $f(a)$ qui est contenue dans $V$. Appelons $\epsilon$ le rayon de cette boule. Rappelons que comme la boule est ouverte, $\epsilon$ est un réel strictement positif. Comme $f$ est continue, la proposition III.4.1 des notes de cours montre qu'il existe $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\text{si } ||x - a|| < \delta \text{ alors } ||f(x) - a|| < \epsilon \; .$$

Une autre manière d'exprimer cette *conclusion* est

$$f(B(a, \delta)) \subset B(f(a), \epsilon) \; .$$

Or, nous avons suppsé $B(f(a), \epsilon) \subset V$. Par conséquent, $f(B(a, \delta)) \subset V$, soit encore $B(a, \delta) \subset f^{-1}(V)$. Nous avons donc trouvé une boule de centre $a$ qui est contenu dans $f^{-1}(V)$.

Maintenant nous admettrons comme hypothèse la condition (2), et nous en déduirons la continuité de $f$ à un point $a$ arbitrairement choisi dans le domaine de $f$. Fixons donc un point $a \in \mathbb{R}^p$ auquel la fonction $f$ est définie. Son image dans $\mathbb{R}^q$ est $f(a)$. Utilisons la caractérisation de la proposition III.4.1 qui était déjà utilisée. Soit donc $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Il nous faut montrer l'existence d'un réel strictement positif $\delta$ tel que

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}^p, \; ||x - a|| < \delta \text{ implique } ||f(x) - f(a)|| < \epsilon \; .$$

Une manière équivalente d'exprimer cette *condition* est

$$f(B(a, \delta)) \subset B(f(a), \epsilon) \; ,$$

soit encore

$$B(a, \delta) \subset f^{-1}(B(f(a), \epsilon))$$

(voir le passage similaire dans le paragraphe précédent). Maintenant, nous appliquerons notre hypothèse à la boule ouverte $B(f(a), \epsilon)$ qui est après tout un ensemble ouvert : son image inverse $f^{-1}(B(f(a), \epsilon))$ est un ouvert de $\mathbb{R}^p$. Par conséquent, $f^{-1}(B(f(a), \epsilon))$ contient une boule ouverte de centre $a$ et de rayon $\delta$ pour un certain $\delta \in \mathbb{R}_+^*$. En d'autres termes, pour tout $x \in \mathbb{R}^p$, $||x - a|| < \delta$ implique $||f(x) - f(a)|| < \epsilon$. Nous avons donc vérifé la condition de continuité mentionnée ci-dessus.

Ensuite, nous montrons l'équivalence des premier et troisième points en utilisant l'équivalence que nous venons de vérifier. Le raisonnement est très formel, et il se base sur la définition d'un fermé comme complémentaire d'un ouvert. Soit donc $F$ un fermé de $\mathbb{R}^q$. Par définition d'un fermé, $F$ est fermé si et seulement si son complémentaire $\mathbb{R}^q \setminus F$ est ouvert. D'après l'équivalence des deux premiers points, cette dernière condition est équivalente à dire que $f^{-1}(\mathbb{R}^q \setminus F)$ est ouvert. Or, $f^{-1}(\mathbb{R}^q \setminus F) = f^{-1}(\mathbb{R}^q) \setminus f^{-1}(F)$ (exercices supplémentaires I.5.5). Alors, $f^{-1}(\mathbb{R}^q) \setminus f^{-1}(F)$ est ouvert par définition des fermés encore une fois. De manière équivalente, $f^{-1}(F)$ est fermé.

Pour finir, nous avons montré d'abord l'équivalence des énoncés (1) et (2), et puis celle des énoncés (1) et (3). Ainsi, tous les trois énoncés sont équivalents. □