Certains résultats du quatrième chapitre

Dans ce volet des compléments de cours, seront abordées les preuves de certains corollaires simples des résultats sur les différentielles et leurs applications. Nous commençons avec un point promis depuis quelques semaines.

Proposition 1 (Unicité de la différentielle, la proposition IV.3.2) *Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$, $U \subset \mathbb{R}^p$ un ouvert sur lequel est définie une fonction $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^q$ et $a \in U$. Si f est différentiable au point $a \in U$, alors la différentielle en a est unique.*

Preuve. Supposons qu'il existe L_1 et L_2 deux applications linéaires qui satisfont la condition de l'existence d'une différentielle au point a :

$$\lim_{h \to 0} \frac{||f(a+h) - f(a) - L_i(h)||}{||h||} = 0 \ .$$

Ceci s'écrit après avoir introduit la notation o

$$||f(a+h) - f(a) - L_i(h)|| = o(||h||) \ .$$

Alors,

$$\begin{aligned} ||L_1(h) - L_2(h)|| &= ||L_1(h) - (f(a+h) - f(a)) + (f(a+h) - f(a)) - L_2(h)|| \\ &\leq ||L_1(h) - (f(a+h) - f(a))|| + ||(f(a+h) - f(a)) - L_2(h)|| \text{ (l'inégalité triangulaire)} \\ &= o(||h||) \text{ (les propriétés des équivalents)} \end{aligned}$$

Nous déduirons de ceci que $L_1 = L_2$. Pour ce faire, il suffit de vérifier que $L_1(h) = L_2(h)$ pour tout $h \in \mathbb{R}^p$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ un scalaire non nul. Alors,

$$\begin{aligned} ||L_1(\lambda h) - L_2(\lambda h)|| &= |\lambda| ||L_1(h) - L_2(h)|| \\ &= o(|\lambda| ||h||) \ . \end{aligned}$$

Si, dans ce qui précède, h est fixé et λ tend vers 0, alors il découle des propriétés de o que

$$|\lambda| ||L_1(h) - L_2(h)|| = o(|\lambda|) \ .$$

Il en résulte que $||L_1(h) - L_2(h)|| = 0$. D'après les propriétés des normes, $L_1(h) = L_2(h)$. Comme h est arbitrairement choisi dans $\mathbb{R}^p$, la conclusion est que $L_1 = L_2$. $\square$

Nous continuons avec un corollaire du théorème des accroissements finis qui était étudié en cours aussi. Il s'agit de l'énoncé suivant :

Proposition 2 (Le premier corollaire du théorème des accroissements finis) *Soient $p \in \mathbb{N}^*$, $U \subset \mathbb{R}^p$ un ouvert* **convexe***, et f une fonction définie sur U et qui y est différentiable de différentielle nulle à tout point de U. Alors, f est constante sur U.*

Nous avons vu en cours que ce résultat découle rapidement du théorème des accroissements finis et des propriétés des ensembles convexes. Nous finissons cette partie des compléments de cours en démontrant une généralisation du premier corollaire qui était énoncée en cours mais laissée sans preuve :

Proposition 3 (Le deuxième corollaire du théorème des accroissements finis) *Soient $p \in \mathbb{N}^*$, $U \subset \mathbb{R}^p$ un ouvert* **connexe par arcs***, et f une fonction définie sur U et qui y est différentiable de différentielle nulle à tout point de U. Alors, f est constante sur U.*

Preuve. Il suffit de montrer que pour toute paire de points distincts x et y dans U, $f(x) = f(y)$. Fixons deux tels points. Alors, par hypothèse il existe un arc qui les joint dans U. En d'autres termes, il existe une fonction $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^p$ telle que $\gamma(0) = x$, que $\gamma(1) = y$ et que $\gamma(t) \in U$ pour tout $t \in [0,1]$.

Par hypothèse, la différentielle de f est nulle sur U. Comme U est ouvert et que $\gamma([0,1]) \subset U$, pour tout $t \in [0,1]$, il existe un $r_t \in \mathbb{R}_+^*$ tel que la boule ouverte $B(\gamma(t), r_t) \subset U$. Nous avons vu en cours qu'une boule ouverte est un ensemble convexe. Ainsi, d'après le premier corollaire du théorème des accroissements finis, f est constante sur la boule $B(\gamma(t), r_{\gamma(t)})$. Notons $c_{\gamma(t)}$ sa valeur sur la boule $B(\gamma(t), r_{\gamma(t)})$.

Maintenant, nous utiliserons la notion de compacité. L'intervalle $[0,1]$ est un ensemble fermé et borné, donc compact. Comme γ est une fonction continue, $\gamma([0,1])$ est une partie compacte de U. L'ensemble $\gamma([0,1])$ est couvert par l'union des $B(\gamma(t), r_{\gamma(t)})$. Il découle de la définition de la compacité qu'il existe $\{\gamma(t_0), \ldots, \gamma(t_k)\}$ tels que

$$\gamma([0,1]) \subset \bigcup_{i=0}^{k} B(\gamma(t_i), r_{\gamma(t_i)}) \ .$$

Quitte à ajouter à ce recouvrement les deux boules $B(\gamma(0), r_{\gamma(0)})$ et $B(\gamma(1), r_{\gamma(1)})$, nous pouvons supposer que $t_0 = 0$ et que $t_k = 1$, en d'autres termes que $\gamma(t_0) = x$ et que $\gamma(t_k) = y$.

Comme le recouvrement trouvé dans le paragraphe précédent se fait en utilisant des ensembles ouverts, pour tout $i \in \{0, \ldots, k-1\}$ il existe z_i tel que

$$z_i \in B(\gamma(t_i), r_{\gamma(t_i)}) \cap B(\gamma(t_{i+1}), r_{\gamma(t_{i+1})}) \ .$$

Alors, f étant constante sur chacune de ces boules,

$$f(\gamma(t_i)) = f(z_i) = f(\gamma(t_{i+1})) \ .$$

Par récurrence sur les indices des points $\gamma(t_i)$, nous concluons que $f(\gamma(x)) = f(\gamma(y))$. $\square$