Feuille 1: Rappels ; espaces métriques ; espaces normés ; espaces topologiques

Exercice 1.
Cet exercice a pour objectif de rappeler les notions de sup et inf. D'après un théorème que nous admettons, toute partie *majorée* (resp. *minorée*) de $\mathbb{R}$ possède un plus petit majorant et un seul, dite la *borne supérieure*, notée sup (resp. un plus grand minorant et un seul, la *borne inférieure*, notée inf). Vérifiez les caractérisations suivantes de ces deux notions :

Borne supérieure : Soit X un sous-ensemble majoré de $\mathbb{R}$. Montrer que $M = \sup(X)$ si et seulement si pour tout $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $[M-\epsilon, M] \cap X \neq \emptyset$.

Borne inférieure : ... formulez la caractérisation vous-mêmes et vérifiez-la.

Exercice 2.
Soient (E, d) un espace métrique et A une partie non vide de E. Nous définissons la distance d'un point x de E à A de la façon suivante :

$$D(x, A) = \inf\{d(x, z) \mid z \in A\} .$$

1. Pour motiver la définition, calculez la distance du point 0 à l'ensemble $]-2,-1] \cup]2,4]$, puis à $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ dans l'espace métrique $(\mathbb{R}, |\ |)$.

2. Montrez que, une fois que le choix de l'ensemble est fait, cette notion de distance est uniquement définie.

3. Montrez que pour tout $x, y \in E$, $|D(x, A) - D(y, A)| \leq D(x, y)$.

4. Supposons maintenant A fermé. Montrez que pour tout point $x \in E$, $x \in A$ si et seulement si $D(x, A) = 0$.

Exercice 3.
Cet exercice introduit un exemple d'espace normé de dimension infinie. Il n'est pas d'urgence de le résoudre puisque nous étudierons plutôt les espaces normés de dimension finie, plus précisément $\mathbb{R}^p$, dans ce cours. Néanmoins, c'est un exercice qui présente une bonne occasion pour comprendre les normes, réviser la notion de sup et ... réviser les suites.

L'ensemble sous-jacent de l'espace est celui des suites réelles à valeurs bornées, en d'autres termes :

$$E = \{(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \mid \text{l'ensemble formé par les } |x_i| \text{ est majoré}\} .$$

Voici quatre exemples d'éléments de E :

$$\left(\frac{1}{i+1} \mid i \in \mathbb{N}\right) \quad ; \quad ((-1)^i \mid i \in \mathbb{N}) \quad ; \quad \text{toute suite constante} \quad ; \quad \text{toute suite éventuellement nulle} .$$

1. Vérifiez que E muni des deux opérations suivantes est un espace vectoriel réel :

Loi interne : si $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sont dans E, alors $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} + (y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est la suite $(x_i + y_i)_{i\in\mathbb{N}}$;

Loi externe : si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite dans E, alors $\lambda(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est la suite $(\lambda x_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

2. Montrer que l'application suivante

$$\begin{array}{rccc} \|\ \| : & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x_i)_{i\in\mathbb{N}} & \longmapsto & \sup\{|x_i| \mid i \in \mathbb{N}\} \end{array}$$

définit une norme sur E.

Exercice 4.
Pendant le deuxième cours, nous avons vu un exemple un peu insolite de topologie dans le cas particulier où elle était définie sur les nombres naturels. Reprenons-le, cette fois-ci en toute généralité.

Soit donc E un ensemble. Nous posons

$$\mathcal{T} = \{A \subset E \mid E \setminus A \text{ est fini}\} \cup \{\emptyset\} .$$

Vérifier que $\mathcal{T}$ définit une topologie sur E.

Cette topologie, que l'on appelle parfois la *topologie cofinie*, quoique très importante dans certaines branches des mathématiques que vous rencontrerez dans deux ans, n'est pas prioritaire pour notre cours. Il est proposé ici pour souligner la généralité de la notion de topologie et pour vous entraîner dans l'art de manipulation des ensembles.

Exercice 5.
Puisque nous parlons de la manipulation des ensembles, voici quelques rappels fort utiles. Vérifiez-les :

1. Soient X et Y deux ensembles, $\{A_i \mid i \in I\}$ et $\{B_j \mid j \in J\}$ deux familles de parties de X et de Y respectivement, et f une application de X vers Y. Montrer que
   (i) $f(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$;
   (ii) $f(\bigcap_{i\in I} A_i) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i)$ (trouvez un exemple où l'inclusion est stricte) ;
   (iii) $f^{-1}(\bigcup_{i\in I} B_i) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$;
   (iv) $f^{-1}(\bigcap_{i\in I} B_i) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$;
2. pour tout $A \subset X$, $A \subset f^{-1}(f(A))$ (trouvez une condition suffisante pour conclure l'égalité des deux ensembles) ;
3. pour tout $B \subset Y$, $f(f^{-1}(B)) \subset B$ (trouvez une condition suffisante pour conclure l'égalité des deux ensembles) ;
4. si A_1 et A_2 sont deux parties de X, alors $f(A_1) \setminus f(A_2) \subset f(A_1 \setminus A_2)$ (trouvez un exemple où l'inclusion est stricte) ;
5. si B_1 et B_2 sont deux parties de Y, alors $f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2) = f^{-1}(B_1 \setminus B_2)$.

Rappelons que la notation f^{-1} est utilisée pour désigner l'*image inverse* d'un ensemble.

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\} .$$

Il ne s'agit pas de l'inverse de l'application f qui peut d'ailleurs ne pas exister, f n'ayant aucune raison d'être bijective.

Exercice 6.
Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique. Pour tout $A \subset E$ montrez que $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \mathring{A}$.