Feuille 1: Quelques *calculs* topologiques

Exercice 1.
Cet exercice a pour but de vérifier rigoureusement qu'un ensemble que vous connaissez bien est connexe par arcs. Le mot "rigoureux" ne doit pas vous effrayer trop puisque, comme d'ailleurs ca arrive souvent en mathématiques, la rigueur consistera à faire convenablement certains calculs simples. L'ensemble en question est la sphère unité par rapport à la norme $|| \, ||_1$, notamment $S((0,0),1)$. Nous commençons avec une question générale :

1. Soient $p \in \mathbb{N}^*$, E une partie non vide de $\mathbb{R}^p$ et P, Q, R trois points *dans* E. On suppose qu'il existe $\gamma_1 : [0,1] \longrightarrow E$ et $\gamma_2 : [0,1] \longrightarrow E$ deux arcs continus joignant dans E le point P au point Q et le point Q au point R respectivement. Expliciter, en recollant les deux fonctions γ_1 et γ_2 un arc continu joignant P à R.

Nous utiliserons le point 1 dans le cas particulier de la sphère unité de la norme $|| \, ||_1$.

2. Soient P et Q deux points sur $S((0,0),1)$ qui sont situés dans le *même quart du plan.* En d'autres termes, si P et Q sont de coordonnées (x_0, y_0) et (x_1, y_1) respectivement, alors x_0 est positif si et seulement si x_1 est positif, et y_0 est positif si et seulement si y_1 est positif. Expliciter un arc qui joint P à Q.

3. Maintenant supposons que $x_0 \geq 0$ et $y_0 \geq 0$ tandis que $x_1 \geq 0$ et $y_1 \leq 0$. En d'autres termes, P est dans le premier quart du plan et Q est dans le quatrième. Expliciter un arc dans $S((0,0),1)$ qui joint P à Q en passant par $(1,0)$.

4. Répéter le point 3 sous les hypothèses suivante :
(i) Le point P est dans le quatrième quart du plan ($x_0 \geq 0$ et $y_0 \leq 0$), Q est dans le troisième quart du plan ($x_1 \leq 0$, $y_1 \leq 0$), l'arc doit passer par $(0,-1)$.
(ii) Le point P est dans le troisième quart du plan ($x_0 \leq 0$ et $y_0 \leq 0$), Q est dans le deuxième quart du plan ($x_1 \leq 0$, $y_1 \geq 0$), l'arc doit passer par $(-1,0)$.
(iii) Le point P est dans le deuxième quart du plan ($x_0 \leq 0$ et $y_0 \geq 0$), Q est dans le premier quart du plan ($x_1 \geq 0$, $y_1 \geq 0$), l'arc doit passer par $(0,1)$.

5. En utilisant les points précédents vérifier que quels que soient les quarts du plan où sont situés P et Q, il y a un arc continu qui les joint. (*Indication : la plus grande partie du travail a été accomplie, il reste à étudier le cas où P et Q ne sont ni dans le même quart, ni dans deux quarts successifs. Or, les cas restants se réduisent aux cas précdents en utilisant le point 1.*)

6. Finalement, vérifier que $S((0,0),1)$ n'est **pas** convexe.

Exercice 2.
La boule ouverte $B((0,0),1)$ n'est pas compacte. Expliciter un recouvrement de $B((0,0),1)$ par des ouverts qui n'a pas de sous-recouvrement fini de $B((0,0),1)$. Justifier votre réponse.

Exercice 3.
Il y a quelques semaines, j'ai remplacé un collègue dans les khôlles. Voici quelques exercices que j'ai donnés aux khôllés de ce jour-là :

1. Vérifier si l'ensemble $\left\{\left(\frac{1}{n}, (-1)^n\right) \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$ est compact.
2. Vérifier si l'ensemble $\left\{\left(1, \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$ est compact.
3. Vérifier si l'ensemble $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} B\left(0, \frac{1}{n}\right)$ est compact.