Math IV - Analyse Khôlles de 27/05/2008 = semaines 9,10,11,12

Semaine 1.

***Exercice 1**

Dans $\mathbb{R}^p$ donner la définition d'une boule ouverte de centre a et de rayon r. Démontrer qu'une boule ouverte est un ouvert.

Exercice 2

Montrer en donnant un exemple que l'union d'une famille infinie de parties fermées de $\mathbb{R}^p$ n'est pas nécessairement fermée.

Exercice 3

On considère l'application suivante :

$$\begin{array}{rccl} N : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & |x+y|+|2x-y| \end{array}$$

Vérifier que N définit une norme. Tracer la boule unité autour de l'origine par rapport à cette norme.

Exercice 4

Trouver la meilleure constante C telle que $\|x\|_2 \le C\|x\|_\infty$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

Exercice 5

On considère l'application suivante :

$$\begin{array}{rccl} N : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & |x+y|+|x| \end{array}$$

Vérifier que N définit une norme. Tracer la boule unité autour de l'origine par rapport à cette norme.

***Exercice 6**

Dans $\mathbb{R}^p$ donner la définition d'une boule fermée de centre a et de rayon r. Démontrer qu'une boule fermée est un fermé.

Exercice 7

Montrer en donnant un exemple que l'intersection d'une famille infinie de parties ouvertes de $\mathbb{R}^p$ n'est pas nécessairement ouverte.

***Exercice 8**

Donner la définition d'une partie ouverte de $\mathbb{R}^p$.
Donner la définition d'une partie bornée de $\mathbb{R}^p$.

Exercice 9

On considère l'application suivante :

$$\begin{array}{rccl} N : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & \max(|x+3y|,|x-y|) \end{array}$$

Vérifier que N définit une norme. Tracer la boule unité autour de l'origine par rapport à cette norme.

***Exercice 10**

Donner la définition d'un espace normé en explicitant les trois conditions qui définissent une norme.

***Exercice 11**

Montrer que l'intersection de deux parties ouvertes de $\mathbb{R}^p$ est un ouvert.

Exercice 12

Qu'appelle-t-on "ouvert de $\mathbb{R}^n$" ? Donner la définition. Dessiner les ensembles de définition des fonctions suivantes et préciser leurs natures (ouvert ou fermé ou ni l'un ni l'autre) :

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{x+y+1}}{x^2+y^2} \quad \text{et} \quad g(x,y) = \ln\left(\ln\frac{1}{y-x}\right)$$

***Exercice 13**

Donner la définition d'un espace métrique en explicitant les trois conditions qui définissent une distance.

***Exercice 14**

Démontrer qu'un espace normé est un espace metrique.

Exercice 15

Donner un exemple d'un espace muni d'une distance tel que la distance n'est pas induite par une norme.

***Exercice 16**

1. Définir la notion d'ouvert dans $\mathbb{R}^n$.
2. Montrer que pour $A \subset \mathbb{R}^n$ et $x \in \mathbb{R}^n$ on a l'équivalence suivante : A ouvert ssi $A + x$ ouvert.

***Exercice 17**

Montrer que l'union d'une famille arbitraire de parties ouvertes de $\mathbb{R}^p$ est ouverte.

***Exercice 18**

Montrer que la notion d'ouvert dans $\mathbb{R}^n$ ne dépend pas de la norme choisie.

***Exercice 19**

1. Donner les définitions des normes $||\cdot||_1$, $||\cdot||_2$ et $||\cdot||_\infty$ et montrer que $||\cdot||_1$ est une norme.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, montrer les inégalités

$$||x||_\infty \leq ||x||_2 \leq ||x||_1 \leq n.||x||_\infty$$

En déduire une démonstration de l'équivalence de ces normes.

Exercice 20

Déterminer si l'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 \leq y,\ y^2 < x\}$ est ouvert, fermé. Trouver son adhérence, son intérieur et sa frontière.

Exercice 21

Rappeler la définition d'une norme de $\mathbb{R}^n$. Dire, parmi les applications suivantes, lesquelles sont des normes de $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2) &= |x_1 - x_2| + |x_1 + x_2| \\ g(x_1,x_2) &= x_1^2 + x_2^2 \\ h(x_1,x_2) &= \sqrt{|x_1 x_2|} \end{aligned}$$

Exercice 22

Déterminer l'intérieur, la frontière et l'adhérence des ensembles suivants. Déterminer également s'ils sont ouverts, fermés, ni ouverts ni fermés.

$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$,

$B = \{(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}) \in \mathbb{R}^2 \mid n, m \in \mathbb{N}^*\}$,
$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2 \text{ et } y \leq 1 - x^2\}$.

Exercice 23

Est-ce que un cercle est un ouvert dans $\mathbb{R}^2$? dans $\mathbb{R}^3$? Est-ce qu'une intervale ouvert est un ouvert dans $\mathbb{R}$? dans $\mathbb{R}^2$?

Exercice 24

Déterminer si l'ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x^2 + y^2 - 4)(x^2 + y^2 - 1) < 0\}$ est ouvert, fermé. Trouver son adhérence, son intérieur et sa frontière.

Semaine 2.

***Exercice 25**

Donner une définition de graphe d'une fonction, des fonctions partielles, des lignes de niveau. Presenter un exemple d'une fonction de deux variables pour laquelle calculer quelques lignes de niveau, des fonctions partielles en un point et dessiner un graphe.

***Exercice 26**

1. Soient $f : D \to \mathbb{R}^q, D \subset \mathbb{R}^p$ et A un point adhèrant à D. Donner une définition de la limite de f au point A.
2. Soient f et g deux fonctions continue de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$ et a un point de $\mathbb{R}^p$. Démontrer que

$$\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$$

***Exercice 27**

Soit D un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f, g\ : D \to \mathbb{R}^p$. On suppose que les limites $\lim_{x \to a} f(x)$ et $\lim_{x \to a} g(x)$ existent pour un certain $a \in \overline{D}$, notés respectivement L et M. Montrer que la limite $\lim_{x \to a} (f(x) + g(x))$ existe.

***Exercice 28**

1. Soient $f : D \to \mathbb{R}^q, D \subset \mathbb{R}^p$ et A un point adhèrant à D. Donner une définition de la limite de f au point A.
2. Soient f et g deux fonctions continue de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$ et a un point de $\mathbb{R}^p$. Démontrer que

$$\lim_{x \to a} f(x)g(x) = \lim_{x \to a} f(x) \lim_{x \to a} g(x)$$

***Exercice 29**

Soit $f : D \to \mathbb{R}^q$ une fonction sur une partie D de $\mathbb{R}^p$. Soit $u_0 \in D, f$ continue en u_0. Soit $g : E \to \mathbb{R}^m,\ E \subset \mathbb{R}^q,\ f(D) \subset E, g$ continue en $f(u_0)$.

On a ainsi : $\mathbb{R}^m \xrightarrow{f} \mathbb{R}^p \xrightarrow{g} \mathbb{R}^q$.

Montrer que :

$$\left.\begin{array}{r} f \text{ continue en } u_0 \\ g \text{ continue en } f(u_0) \end{array}\right\} \Rightarrow g \circ f \text{ est continue en } u_0.$$

Exercice 30

Soit

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto \begin{cases} \sin\left(\frac{x^2y}{x^4+y^2}\right) & \text{si} \quad x^2+y^2=0 \\ 0 & \text{si} \quad y=x=0 \end{cases}$$

Calculer les limites partielles sur les droites $y=\alpha x, \alpha\in\mathbb{R}$, puis sur une parabole $y=x^2$.

Est-ce que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 31

Etudier la continuité de l'application suivante :

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x+y}\right) & \text{si} \quad y\neq -x \\ 0 & \text{si} \quad y=-x \end{cases}$$

Exercice 32

Calculer la limite suivante :

$$\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \frac{1-\cos(xy)}{y^2}$$

Exercice 33

Calculer la limite suivante :

$$\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \frac{x^2}{|x-y|}$$

Exercice 34

Calculer la limite suivante :

$$\lim_{(x,y)\mapsto(0,b)} \frac{\sin(xy)}{x}$$

où $b\in\mathbb{R}$.

Exercice 35 Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y)=\frac{yx^2}{x^2+y^2} \quad \text{pour } (x,y)\neq(0,0) \quad \text{et} \quad f(0,0)=0.$$

Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2$

***Exercice 36**

1. Définir l'équivalence de normes.
2. La notion de convergence dans $\mathbb{R}^n$ dépend-elle de la norme choisie ? Si oui, donner un exemple, si non montrez-le.

Exercice 37

1. Étudier la continuité de la fonction $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{\sin(xy)}{x} & \text{si } x\neq 0; \\ y & \text{si } x=0. \end{cases}$$

2. Montrer que l'adhérence de l'ensemble $\{(x,\sin\frac{1}{x}),\ x>0\}\subset\mathbb{R}^2$ est donnée par $\{(x,\sin\frac{1}{x}),\ x>0\}\cup\{(0,y),\ y\in[-1,1]\}$.

Exercice 38

Étudier la continuité de la fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$g(x,y) = \begin{cases} (1+x^2y^2)^{\frac{1}{xy^2}} & \text{si } xy \neq 0; \\ e^x & \text{si } xy = 0. \end{cases}$$

Exercice 39

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \quad \text{pour } (x,y) \neq (0,0).$$

Montrer que la fonction f se prolonge par continuité en $(0,0)$ et donner la valeur de $f(0,0)$.

***Exercice 40**

1. Définir la notion de limite d'une fonction en un point.
2. Montrer que $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est continue ssi toutes les composantes de f sont continues.

Exercice 41

Étudier la continuité de la fonction $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$h(x,y) = \begin{cases} \frac{x\sin y - y\sin x}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ 0 & \text{si } x = y = 0. \end{cases}$$

Exercice 42

Etudier la continuité de l'application suivante en $(0,0)$:

$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \longmapsto \begin{cases} \frac{xy\cos y - y^2\cos x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$$

Exercice 43

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \frac{e^{(xy)^2}-1}{x^2+y^2} \quad \text{pour } (x,y) \neq (0,0) \quad \text{et} \quad f(0,0) = 0.$$

Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2$

Exercice 44

Etudier la continuité de l'application suivante en $(0,0)$:

$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \longmapsto \begin{cases} \frac{x^2\cos(y^{1/3}) - y^2\cos x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$$

Exercice 45 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \frac{xy^2 + x^2y}{x^2+y^2} \quad \text{pour } (x,y) \neq (0,0) \quad \text{et} \quad f(0,0) = 0.$$

Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 46

Montrer que la limite

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x+2y-3}{x+y-2}$$

n'existe pas.

Semaine 3.

Exercice 47

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^2 - y$.

1. Dessiner dans $\mathbb{R}^2$ les lignes de niveau L_k pour $k \in \{0, -1, 1, -3, 3\}$.
2. Dessiner dans $\mathbb{R}^3$ les fonctions partielles au point $(0,0)$.
3. Representer graphiquement la surface $z = x^2 - y$.

***Exercice 48**

Donner un exemple de fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et un ensemble compact $K \subset \mathbb{R}$ tel que $f^{-1}(K)$ ne soit pas compact.

***Exercice 49**

Donner un exemple d'application continue $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $U \subset \mathbb{R}$, partie bornée de $\mathbb{R}$, telles que $f(U)$ ne soit pas une partie bornée de $\mathbb{R}$.

***Exercice 50**

Donner un exemple d'application continue $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $U \subset \mathbb{R}$, partie fermée de $\mathbb{R}$, telles que $f(U)$ ne soit pas une partie fermée de $\mathbb{R}$.

***Exercice 51**

Donner un exemple d'application continue $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $U \subset \mathbb{R}$, partie ouverte de $\mathbb{R}$, telles que $f(U)$ ne soit pas une partie ouverte de $\mathbb{R}$.

Exercice 52

1. Rappeler la définition d'un ensemble compact.
2. Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$. Soit
$$P = \{z \in \mathbb{R}^n : ||y - z|| \leq r\}$$
la boule fermée de centre y et de rayon r. Justifier que P est compact.
3. Soit
$$d(P, x) = \text{Inf}_{z \in P} ||x - z||$$
la distance de x à P. Montrer qu'il existe $z \in P$ tel que $d(P, x) = ||x - z||$:

***Exercice 53**

Vrai ou faux : un ensemble est compact si et seulement s'il est contenu dans une boule.

Exercice 54

Dessiner les ensembles de définition des fonctions suivantes et dire s'ils sont compacts :

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{x^2 - y - 1}}{\ln x} \qquad g(x,y) = \ln\left(\ln \frac{1}{x^2 + y^2}\right)$$

$$F(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\ln(2-x)} \quad \text{et} \quad h(x,y) = \sqrt{x^2-y} + \sqrt{x-y}$$

***Exercice 55** Donner la définition d'une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}^q$. Quelle est la dimension de l'espace des applications linéaires $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$.

***Exercice 56**

Exercice 57

1. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ pour que l'application $\mathbb{R}^2 \ni (x,y) \mapsto |ax+by| + |cx+dy|$ définisse une norme sur $\mathbb{R}^2$.
2. Soient $x \in \mathbb{R}^n$ et K un ensemble compact. Montrer que la distance $d(x,K) = \inf_{y \in K} |x-y|$ est atteinte en un point $y \in K$.

Exercice 58

1. Déterminer si l'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 \leq y,\ y^2 \leq x\}$ est compact ou non.
2. Pour quels $p \in \{1,2\}$ la norme $\|\cdot\|_p$ sur $\mathbb{R}^n$ vérifie l'identité suivante : $\|x+y\|_p^p + \|x-y\|_p^p = 2\|x\|_p^p + 2\|y\|_p^p$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$?

***Exercice 59**

Soit E un espace vectoriel normé. On fixe $x_0 \in F$ et on définit

$$\begin{array}{cccc} f & : & E & \longmapsto & E \\ & & u & \longrightarrow & x_0 + u \end{array}$$

Montrer que si $F \subset E$ est une partie fermée, alors $f(F)$ est aussi une partie fermée de E.

Exercice 60

Soit E un espace vectoriel normé. On fixe $x_0 \in F$ et on définit

$$\begin{array}{cccc} f & : & E & \longmapsto & E \\ & & u & \longrightarrow & x_0 + u \end{array}$$

Montrer que si $C \subset E$ est une partie compacte, alors $f^{-1}(C)$ est aussi une partie compacte de E.

Exercice 61

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application telle que $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{Z}$. Montrer que f n'est pas continue.

Exercice 62

Etudier la continuité de la fonction définie par $f(x,y) = \sup(x,y)$.

***Exercice 63**

Rappeler la définition d'un ensemble compact. Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$. Soit

$$P = \{z \in \mathbb{R}^n : ||y-z|| \leq r\}$$

la boule fermée de centre y et de rayon r. Justifier que P est compact.

Exercice 64

Étudier la continuité, ainsi que l'existence et la continuité des dérivées partielles premières de la fonction suivante :

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2, & |x| > y \\ y^2, & |x| \leq y \end{cases}$$

Exercice 65

Soient $x \in \mathbb{R}^n$ et K un ensemble compact. Montrer que la borne supérieure $\sup\limits_{y\in K} |x-y|$ est atteinte en un point $y \in K$.

***Exercice 66**

1. Donner la définition de l'adhérence $\overline{A}$ d'une partie $A \subset \mathbb{R}^n$.
2. Soient $A, B \subset \mathbb{R}^n$. Montrer l'inclusion

$$\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Donner un exemple où cette inclusion est stricte.

Exercice 67

Trouver $a > 0$ tel que l'application

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^{2a}y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. soit continue sur $\mathbb{R}^2$;
2. soit différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 68

Déterminer, si elle existe, la limite suivante :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\|(x,y)\|_2}{\|(x,y)\|_\infty}$$

***Exercice 69** Définir la notion de différentiabilité en un point.

Exercice 70

Étudier la continuité et la différentiabilité de la fonction $f(x,y) = \max(x,y)$.

Exercice 71

1. Soit $f : K \to \mathbb{R}$ une fonction continue définie sur un compact $K \subset \mathbb{R}^n$. Pour tout fermé $F \subset K$, montrer que $f(F)$ est fermé dans $\mathbb{R}$.
2. Est-ce encore vrai si l'ensemble de définition de f n'est plus compact ?

Exercice 72

1. Un ensemble est dit relativement compact si son adhérence est compacte. Donner un exemple d'ensemble qui est relativement compact mais pas compact.
2. Dessiner les ensembles de définition des fonctions suivantes et dire s'ils sont compacts ou relativement compacts :

$$f(x,y) = \sqrt{4-x^2-y^2} + \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \text{et} \quad g(x,y) = \sqrt{y-x^2} + \ln(x-y)$$

***Exercice 73**

Soient K_i (pour $i \in \mathbb{N}$) des sous-ensembles compacts de $\mathbb{R}^n$. Vrai ou faux ? Justifier votre réponse.

1. L'intersection $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} K_i$ est fermée.

2. L'intersection $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} K_i$ est bornée.
3. L'intersection $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} K_i$ est compacte.
4. La réunion $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} K_i$ est bornée.
5. La réunion $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} K_i$ est compacte.

Semaine 4.

***Exercice 74**

Donner la définition de la différentielle d'une fonction. Montrer qu'une fonction différentiable en un point x_0 est continue en x_0.

***Exercice 75**

Donner la définition de la différentielle d'une fonction. Montrer que si f est une fonction différentiable en un point x_0 alors λf, où $\lambda \in \mathbb{R}$ est aussi différentiable en x_0.

***Exercice 76**

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Quelle la dimension de la matrice jacobienne de f ? A l'aide des entrées de la matrice jacobienne décrire la différentielle de f.

***Exercice 77**

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur un domain $D \subset \mathbb{R}^2$. Définir le vecteur gradient de f en point $a \in D$, $\overrightarrow{\text{grad}} f(a)$. Montrer que $\overrightarrow{\text{grad}} f(a)$ est normal à la courbe de niveau L_k, $k = f(a)$ au point a.

Exercice 78

Soit $f(x, y)$ une fonction définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ qui a des dérivées partielles suivantes :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x}, \ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{y}.$$

Soit $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta, r \in \mathbb{R}_{>0}, \theta \in [0, 2\pi[$. Calculer $\frac{\partial f}{\partial \theta}$ et $\frac{\partial f}{\partial r}$ en tant que fonctions de r et θ.

Exercice 79

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $f(p) = \|p\|_2$. La fonction f est-elle différentiable en l'origine ?

Exercice 80

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = \frac{2x^3 - 3xy^2}{x^2 + y^2} \quad \text{pour } (x, y) \neq (0, 0) \quad \text{et} \quad f(0, 0) = 0.$$

Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ en $(0, 0)$. L'application est-elle différentiable en $(0, 0)$?

Exercice 81

Soit $D =]0; +\infty[\times\mathbb{R}$. Soit l'application

$$\begin{array}{rccc} f : & D & \to & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \mapsto & y/x. \end{array}$$

1) Dessiner l'ensemble $\Gamma_k = \{(x, y) \in D : f(x, y) = k\}$ pour $k \in \{1, 2, -2\}$.
2) Montrer que l'application f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D et calculer sa différentielle en tout point.
3) Le vecteur gradient $\overrightarrow{\nabla}(p)$ (pour $p \in \mathbb{R}^2$) est le vecteur de coordonnées

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p)\right)$$

Dessiner le vecteur gradient en le point d'abscisse 1 de chacun des ensembles Γ_k (pour $k = 1, 2, -2$). Que remarque-t-on ?

Exercice 82

Déterminer à quels points de $\mathbb{R}^2$ sont définies les dérivées partielles de f.

$$f \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad |x| > y \\ y^2 & \text{si} \quad |x| \leq y \end{cases} \end{array}$$

***Exercice 83**

Soit une application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. On considère les assertions suivantes :

A. L'application f est continue en $(0, 0)$.

B. Les dérivées partielles $(\partial f/\partial x)\,(0, 0)$ et $(\partial f/\partial y)\,(0, 0)$ existent et sont continues.

C. L'application f est différentiable en $(0, 0)$.

1) Rappeler les implications qu'il y a entre ces propriétés.

2) Montrer que chaque implication n'est pas une équivalence. On pourra utiliser les deux fonctions suivantes :

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} + y^2 \sin\frac{1}{y} & \text{si } xy \neq 0 \\ x^2 \sin\frac{1}{x} & \text{si } y = 0 \text{ et } x \neq 0 \\ y^2 \sin\frac{1}{y} & \text{si } x = 0 \text{ et } y \neq 0 \\ 0 & \text{en } (0,0) \end{cases}$$

$$\text{et} \quad g(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2 x}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{en } (0,0) \end{cases}$$

Exercice 84

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que f est C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que les dérivées partielles secondes $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$ existent et les calculer.
3. La fonction f est-elle C^2 sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 85

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2} \quad \text{pour } (x,y) \neq (0,0) \quad \text{et} \quad f(0,0) = 0.$$

Montrer que f admet des dérivées directionnelles dans toutes les directions en $(0, 0)$ mais n'y est pas différentiable.

Exercice 86

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = x^2 + y^2$.

1. Dessiner les ensembles $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = k\}$ pour $k = 1, 4, 9$.
2. Montrer que l'application f est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer sa différentielle $df(p)$ en tout $p \in \mathbb{R}^2$.
3. Soient $p_1 = (0, 1)$, $p_2 = (1, \sqrt{3})$ et $p_3 = (2, \sqrt{5})$. Placer ces trois points. Pour $p \in \{p_1, p_2, p_3\}$ dessiner la courbe $\{q \in \mathbb{R}^2 : df(p)(q - p) = 0\}$. Que remarque-t-on ?

Exercice 87

Soit $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ une courbe paramétrée de $\mathbb{R}^2$. Soit $f(x,y) = e^{xy}$. En sachant que $\gamma(0) = (1,2)$, et $\gamma'(0) = (3,4)$. Trouver la valeur de

$$\frac{df(\gamma(t))}{dt}\Big|_{t=0}\,.$$

Exercice 88

Soit $z(t) = f(x(t), y(t))$ où f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ dans $\mathbb{R}^2$ et x et y sont des fonctions dérivables dans $\mathbb{R}$. Trouver une expression pour $z'(t)$. Appliquer la formule aux cas particuliers :

1. $f(x,y) = x^2 + 2xy + 4y^2$ avec $x = t$ et $y = e^{3t}$.
2. $f(x,y) = xy^2 + x^2y$ avec $x = t^2$ et $y = \ln t$.

Exercice 89

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \frac{x^2y - y^3}{x^2 + y^2} \quad \text{pour } (x,y) \neq (0,0) \quad \text{et} \quad f(0,0) = 0.$$

Calculer les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en $(0,0)$. L'application est-elle différentiable en $(0,0)$?

Exercice 90

Soit $p > 0$ et

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \ni (x,y) \longmapsto f(x,y) = \frac{|\sin(x+y)|^p}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

1. Pour quelles valeurs de p la fonction f se prolonge par continuité en $(0,0)$?
2. Dans le cas où f se prolonge par continuité en $(0,0)$, pour quelles valeurs de p la fonction ainsi obtenue est des classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?
3. Même question pour la différentiabilité en $(0,0)$.

Exercice 91 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x,y) = |x|$.

1. Calculer les dérivées partielles de f en tout point. Déterminer le plus grand sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ sur lequel f est de classe $\mathcal{C}^1$.
2. Calculer le gradient de f en tout point où il est défini et dessiner ce vecteur gradient en certains points caractéristiques.

Exercice 92

Calculer de deux manières différentes la dérivée par rapport à t de

1. $f(x,y) = x^2 + 3xy + 5y^2$ avec $x = \sin t$ et $y = \cos t$.
2. $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$ avec $x = e^{-t}$ et $y = e^t$.

Exercice 93 QCM.

Attention : *chaque question peut avoir plus d'une reponse correcte. Pour avoir les points à la question il est imperatif de trouver toutes les reponses correctes.*

1. La fonction f est définie par $f(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2 - 1 & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   (a) est continue sur $\mathbb{R}^2$; ☐
   (b) n'est pas continue sur $\mathbb{R}^2$; ☐
   (c) admet une limite en $(0,0)$. ☐

2. La differentielle de xy est

$$\begin{array}{lll} (a) & xdx + ydy; & \square \\ (b) & x + y; & \square \\ (c) & xdy + ydx. & \square \end{array}$$

3. La dérivée d'une fonction différentiable f de deux variables selon le vecteur $\vec{u}$ est donnée par la formule

$$\begin{array}{lll} (a) & \overrightarrow{\text{grad}}\ f(x,y) \cdot \vec{u}; & \square \\ (b) & \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f((x,y) + t\vec{u}) - f(x,y)}{t}; & \square \\ (c) & \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f((x,y) + t\vec{u})}{t}. & \square \end{array}$$

4. On considère une fonction de deux variables de classe C^2. Combien possède-t-elle de dérivées deuxièmes distincts ?

$$\begin{array}{lll} (a) & 6\,; & \square \\ (b) & 4\,; & \square \\ (c) & 3. & \square \end{array}$$

5. En un point, le gradient d'une fonction scalaire est

(a)	parallèle aux lignes de niveaux ;	☐
(b)	perpendiculaire aux lignes de niveaux ;	☐
(c)	toujours orienté dans le sens des valeurs croissantes de la fonction.	☐

6. Une équation $x + y + 2xy = 5z$

(a)	représente une surface dans l'espace $\mathbb{R}^3$;	☐
(b)	est un plan ;	☐
(c)	représente une courbe dans l'espace $\mathbb{R}^3$.	☐

Semaine 5.

***Exercice 94**

1. Exprimer la dérivée directionnelle en fonction des dérivées partielles.
2. Montrer qu'une application à valeurs vectorielles est différentiable ssi toutes ses composantes sont différentiables.

***Exercice 95**

1. Définir la matrice de Jacobi pour une fonction $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.
2. Exprimer (en montrant la formule énoncée) la matrice de Jacobi de $f \circ g$ en fonction des matrices de Jacobi de f et g.

***Exercice 96**

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur un domain U de $\mathbb{R}^2$. Définir la dérivée de f selon un vecteur v au point $a \in U, D_{\overrightarrow{v}} f(a)$. Démontrer que $D_{\overrightarrow{v}} f(a) = \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot \overrightarrow{v}$.

***Exercice 97**

1. Définir la notion de limite d'une fonction en un point.
2. Montrer que la somme de deux fonctions différentiables en un point est différentiable en ce point.

***Exercice 98**

1. Pour une fonction différentiable de gradient non-nul, suivant quelle direction la dérivée directionnelle est maximale ?
2. Montrer que le gradient d'une fonction différentiable s'annule en un point de maximum ou minimum local.

Exercice 99

Le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ suivant

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x^2 - \sin y \leq 4\}$$

est-il fermé, compact ?

Exercice 100

Déterminer si la fonction

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \ni (x,y) \longmapsto \frac{\sin(x^2) + \sin(y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

se prolonge par continuité en $(0,0)$.

Exercice 101

Trouver la dérivée partielle de la fonction $f(x,y) = xy^2$ suivant le vecteur $\vec{v} = \vec{i} - 2\vec{j}$ au point A de coordonnées $(2,1)$.

Exercice 102

Le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ suivant

$$\{(x,y) \in [0,1] \times [0,1] \ ; \ \cos(x) \geq 0\}$$

est-il ouvert, fermé, compact ?

Exercice 103

Déterminer si la fonction

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \ni (x,y) \longmapsto \frac{x^6}{x^2 + (y-x)^2}$$

se prolonge par continuité en $(0,0)$.

Exercice 104

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 2x + 5y + x^2(\sqrt{|y|} + \sqrt{|x|})$. Déterminer l'ensemble des points où f

1. est continue ;
2. est différentiable ;
3. est de classe C^1 ;
4. admet des dérivées partielles ;
5. admet des dérivées directionnelles.

***Exercice 105** Montrer que le produit de deux fonctions différentiables en un point est différentiable en ce point.

Semaine 6.

***Exercice 106**

Soit V un vecteur de $\mathbb{R}^2$. Soit f une fonction de classe C^1 définie sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$. Démontrer que la dérivée de f selon le vecteur V au point $X \in U$ est égale au produit scalaire de V et du gradient de f au point X.

Exercice 107

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = ye^{-(x^2+y^2)}.$$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ et écrire la formule de Taylor de f à l'ordre 2 en $(0, 0)$. En déduire une valeur approchée de $f(x, y)$ pour $x = 0.1$ et $y = 0.2$.

Exercice 108

Trouver les extrêma relatifs de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - (x - y)^2.$$

La fonction possède-t-elle des extrêma absolus sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 109

Déterminer les extréma de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + (x + y - 1)^2 + y^2$.

Exercice 110

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy.$$

Trouver les extrêma locaux de la fonction f.

Exercice 111

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$. Déterminer les extréma (éventuels) de la fonction f et pour chacun de ces extréma, préciser si c'est un minimum ou un maximum.

Exercice 112

Soit

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \longmapsto & 3xy - 3x^2 - y^3 \end{array}$$

1. Etudier les extrema locaux de f sur $\mathbb{R}^2$.

2. Soit $P = [-1, 1] \times [-1, 1]$. Déterminer les extrema absolus (=globaux) de la restriction de f à l'ensemble P.

Exercice 113

Soit

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \longmapsto & (x^2 + y^2)(x + y) - 3xy - 9 \end{array}$$

1. Etudier les extrema locaux de f sur $\mathbb{R}^2$.

2. Soit D le disque de centre $(0, 0)$ et de rayon 4.

(i) Justifier que la restriction de f à D admet son maximum absolu (=global) sur le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon 4.

(ii) Trouver une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ qui permet de calculer le maximum absolu de la restriction de f à D.

Exercice 114

Soit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & 4xy - x^4 - y^4 \end{array}$$

1. Etudier les extrema relatifs de f sur $\mathbb{R}^2$.
2. Soit $P = [0,8] \times [0,8]$. Déterminer les extrema absolus de la restriction de f à l'ensemble P.

Exercice 115

Soit $a > 0$ et

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \ni (x,y) \longmapsto f(x,y) = \frac{|xy|^a}{x^2+y^2}.$$

1. Pour quelles valeurs de a la fonction f se prolonge par continuité en $(0,0)$?
2. Dans le cas où f se prolonge par continuité en $(0,0)$, pour quelles valeurs de a la fonction ainsi obtenue est des classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?
3. Même question pour la différentiabilité en $(0,0)$.

***Exercice 116**

Définir la matrice de Hesse pour une fonction $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Exercice 117

Déterminer les extréma (éventuels) de la fonction suivante

$$]0,\infty[\times\mathbb{R} \ni (x,y) \longmapsto f(x,y) = x(\ln^2 x + y^2).$$

En ces points d'extréma, calculer la formule de Taylor à l'ordre 2.

***Exercice 118**

1. Énoncer le théorème sur les multiplicateurs de Lagrange.
2. Montrer qu'une application à valeurs vectorielles est différentiable ssi toutes ses composantes sont différentiables.

Exercice 119

Soit $p > 0$ et

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \ni (x,y) \longmapsto f(x,y) = \frac{|\sin(x+y)|^p}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

1. Pour quelles valeurs de p la fonction f se prolonge par continuité en $(0,0)$?
2. Dans le cas où f se prolonge par continuité en $(0,0)$, pour quelles valeurs de p la fonction ainsi obtenue est des classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?
3. Même question pour la différentiabilité en $(0,0)$.

Exercice 120

1. Montrer que -1 est la seule racine négative de l'équation $x = \ln|x| + \frac{1}{x}$.
2. Déterminer les extréma (éventuels) de la fonction $g(x,y) = xe^y + ye^x$.

Exercice 121

Soit

$$f : D \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y) = x^2 - xy + y^2 + x + y$$

où

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x \leq 0, y \leq 0, x+y \geq -3\}.$$

Représenter graphiquement l'ensemble D et déterminer les extréma globaux de f.

Exercice 122

Déterminer les extréma (éventuels) de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \sin x \sin y.$$

Pour chacun de ces extréma, préciser si c'est un minimum ou un maximum, si c'est local et/ou global et calculer le développement limité (la formule de Taylor) à l'ordre 2 au voisinage de chacun des points critiques de f.

***Exercice 123**

Montrer que le gradient d'une fonction différentiable s'annule en un point de maximum ou minimum local.

Exercice 124

Soit $\lambda > 0$ et

$$\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \longmapsto f(x, y) = x^2y^2 + x^2 + y^2 + 2\lambda xy.$$

1. Montrer que (x_0, y_0) est un point critique de f si et seulement si

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

2. Déterminer selon la valeur de $\lambda \in \mathbb{R}$ les extréma de la fonction f.

Exercice 125

Sur la courbe $y = x^2$, $x \in]-\infty, \infty[$ trouver le point le plus proche au point $(0, b)$, où b est un nombre réel fixé.

Exercice 126

Soit $\lambda > 0$ et

$$\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \longmapsto g(x, y) = (\lambda^2 + 1)(x^2 + y^2) + 4\lambda xy - 2(\lambda + 1)(x + y)$$

Déterminer selon la valeur de $\lambda \in \mathbb{R}$ les extréma de la fonction g.

Exercice 127

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = xe^y + ye^x.$$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ et calculer le développement limité de f à l'ordre 2 en $(0, 0)$. En déduire une valeur approchée de $f(x, y)$ pour $x = 0.1$ et $y = 0.2$.

Semaine 7.

***Exercice 128**

Donner la définition du vecteur gradient au point $(a, b) \in R^2$ d'une application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. Démontrer que ce vecteur est normal à la ligne de niveau au point (a, b).

***Exercice 129**

Montrer sur un dessin les ensembles de points $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\}$, $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 2\}$, $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = -2\}$ pour la fonction suivante :

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \longmapsto & x - y + |y - x| \end{array}$$

***Exercice 130**

Donner la définition du vecteur gradient au point $(a, b) \in R^2$ d'une application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

Définir la dérivée directionnelle d'une application en un point. Soit f une application de classe C^1. Expliciter la formule de la dérivée directionnelle en fonction du vecteur gradient et vérifier cette formule.

***Exercice 131**

Définir les points critiques d'une application. Définir les notions d'extremum local et global.

***Exercice 132**

Enoncer et démontrer le lien entre le gradient en un point de $\mathbb{R}^2$ et les pentes sur une ligne de niveau d'une application de classe $\mathcal{C}^1$.

***Exercice 133**

Donner un exemple d'application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ qui est continue en $(0, 0)$ mais qui n'y est pas différentiable. Justifiez votre réponse.

***Exercice 134**

Montrer sur un dessin les ensembles de points $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 1\}$, $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 2\}$ pour la fonction suivante :

$$f \; : \; \begin{array}{lcl} \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \frac{xy-x+y}{xy} \end{array}$$

Exercice 135 Déterminer l'équation du plan tangent à la surface $x^2 - y^2 + z^2 = 0$ au point $(1, \sqrt{2}, 1)$.

***Exercice 136** Définir l'opérateur de Laplace et l'exprimer en fonction de la matrice hessienne.

***Exercice 137**

Soit $f : U \longrightarrow V$ avec U et V des parties ouvertes de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^q$ $(p,\ q \in \mathbb{N}^*)$. Définir la différentiabilité de f en un point $a \in U$.

Exercice 138 Déterminer l'équation du plan tangent à la surface $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ au point $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$.

***Exercice 139**

1. Définir l'opérateur $\overrightarrow{\text{rot}}$.
2. Montrer qu'une fonction différentiable en x_0 est continue en x_0.

Exercice 140

Calculer Δf pour $f(x, y) = (x^2 + y^2)^\alpha$.

***Exercice 141**

1. Pour une fonction différentiable de gradient non-nul, suivant quelle direction la dérivée directionnelle est maximale ?
2. Montrer que le gradient d'une fonction différentiable s'annule en un point de maximum ou minimum local.

Exercice 142

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = x^2 + 4y^2$.

1. Quelle est la nature de la ligne de niveau de f qui passe par le point de coordonnées $p = (3/2, 3\sqrt{3}/2)$? Donner une paramétrisation.
2. Calculer le vecteur tangent à cette ligne de niveau en p.
3. Calculer le gradient de f en p. Quel angle fait-il avec le vecteur tangent précédemment calculé ?

Exercice 143

Soient $a \in \mathbb{R}$ et

$$\overrightarrow{V} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \overrightarrow{V}(x, y) = (x + ay, 2x + 4y).$$

1. Déterminer a pour que l'on ait $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{V}) = 0$.
2. Pour ces valeurs de a, déterminer une fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{\mathrm{grad}} g$.
3. Trouver les extréma (éventuels) de la fonction g.

***Exercice 144**

Définir l'opérateur divergence et l'exprimer en fonction de la matrice de Jacobi.

***Exercice 145**

1. Définir l'opérateur de Laplace et l'exprimer en fonction de la matrice hessienne.
2. Montrer que le produit de deux fonctions différentiables en un point est différentiable en ce point.

Exercice 146

Soit $\lambda > 0$ et

$$\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \longmapsto g(x, y) = (\lambda^2 + 1)(x^2 + y^2) + 4\lambda xy - 2(\lambda + 1)(x + y)$$

Déterminer selon la valeur de $\lambda \in \mathbb{R}$ les extréma de la fonction g.

Exercice 147

L'espace $\mathbb{R}^n$ est muni d'une norme $\| \cdot \|$. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable. On suppose la fonction f constante sur la sphère unité $S = \{p \in \mathbb{R}^n : \|p\| = 1\}$. Montrer qu'il existe un point critique $p \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|p\| < 1$.

Exercice 148

1. Soit $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4y^2 + 9x^2 = 1\}$. Quelle est la nature de l'ensemble E ? Dessiner E.
2. On veut trouver le maximum et le minimum de la fonction $f(x, y) = 4y^2 - 3x^2$ sur l'ensemble E. Justifier que ce maximum et ce minimum existent.
3. Pour cela on pose $g(x, y) = 4y^2 + 9x^2 - 1$. Calculez le gradient de f et le gradient de g.
4. Poursuivre le raisonnement en utilisant les multiplicateurs de Lagrange.

Exercice 149

Un champ de vecteurs est une application $X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. On dit qu'un champ de vecteurs est un champ de gradient s'il existe $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ différentiable telle que $X(p) = \overrightarrow{\nabla} f\ (p)$ pour tout $p \in \mathbb{R}^n$. Parmi les champs de vecteurs suivants, lesquels sont des champs de gradient :

$$X_1(x, y) = (2xy, x^2) \qquad X_2(x, y) = (x^2, xy) \qquad X_3(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$$

***Exercice 150**

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par $f(x, y, z) = (x \sin y, y \sin x, z)$. Calculer $\mathrm{div}(f)$, $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(f)$ et $\overrightarrow{\mathrm{grad}} \circ \mathrm{div}(f)$.

***Exercice 151**

On considère les opérateurs div, $\overrightarrow{\mathrm{rot}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{grad}}$ en dimension deux. Préciser (avec démonstration) lesquelles des identités suivantes sont vraies :

1. $\overrightarrow{\text{rot}} \circ \text{div} = 0$;
2. $\text{div} \circ \overrightarrow{\text{rot}} = 0$;
3. $\text{div} \circ \overrightarrow{\text{grad}} = 0$;
4. $\overrightarrow{\text{grad}} \circ \text{div} = 0$;
5. $\overrightarrow{\text{rot}} \circ \overrightarrow{\text{grad}} = 0$;
6. $\overrightarrow{\text{grad}} \circ \overrightarrow{\text{rot}} = 0$;
7. $\overrightarrow{\text{grad}} \circ \text{div} \circ \overrightarrow{\text{rot}} = 0$;
8. $\text{div} \circ \overrightarrow{\text{rot}} \circ \overrightarrow{\text{grad}} = 0.$

Exercice 152

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 - y^2$.

1. Dessiner dans $\mathbb{R}^2$ les lignes de niveau L_k pour $k \in \{0, -1, 1, -3, 3\}$.
2. Dessiner dans $\mathbb{R}^3$ les fonctions partielles au point $(0, 0)$.
3. Representer graphiquement la surface $z = x^2 - y^2$.

Exercice 153

On considère le champs de vecteur $\overrightarrow{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$\overrightarrow{f}(x, y, z) = (xy^2z^2, x^2yz^2, x^2y^2z + 1).$$

1. Calculer $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{f})$.
2. Déterminer toutes les fonctions $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ telles que $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{\text{grad}} g$.
3. Pour une telle fonction g, calculer les extréma sur l'ensemble $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ |x| \leq 1, |y| \leq 1, |z| \leq 1\}$.

Exercice 154

À tout point M de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ on associe le vecteur unitaire $\overline{u}(M) = \frac{\vec{OM}}{||\vec{OM}||}$. Calculer la divergence de ce champ de vecteurs.

***Exercice 155**

Définir l'opérateur divergence et l'exprimer en fonction de la matrice de Jacobi.

Exercice 156

Déterminer si les matrices suivantes sont des matrices hessiennes d'une fonction $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x+y \\ x-y & y^2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & xy \\ xy & x^2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2y^3 & 6xy^2 \\ 6xy^2 & 6x^2y \end{pmatrix}$$

Si oui, trouver toutes les fonctions f associées.

***Exercice 157**

QCM.

Attention : *chaque question peut avoir plus d'une reponse correcte. Pour avoir les points à la question il est imperatif de trouver toutes les reponses correctes.*

1. Soit f une fonction de classe C^2 définie sur D_f une partie de $\mathbb{R}^2$. Si f présente un minimum local en (x_0, y_0) et $(x, y) \in D_f$ est un point au voisinage de (x_0, y_0), alors :

$$\begin{array}{lll} (a) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0); & \square \\ (b) & \overrightarrow{\text{grad}} f(x_0, y_0) = \vec{0}; & \square \\ (c) & f(x_0, y_0) \leq f(x, y). & \square \end{array}$$

2. La fonction $f(x,y) = x^{2008} + y^{2008}$

   (a) possède un maximum global sur $\mathbb{R}^2$; ☐
   (b) possède un minimum global sur $\mathbb{R}^2$; ☐
   (c) possède un maximum sur le carré $C = \{1 \leq x \leq 2,\ 1 \leq y \leq 2\}$. ☐

3. Une application $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

   (a) est un champ de vecteurs ; ☐
   (b) est une courbe dans l'espace ; ☐
   (c) peut être un plan dans l'espace. ☐

4. Soit $\overrightarrow{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. La divergence de $\overrightarrow{F}$, $\mathrm{div}\overrightarrow{F}$, est égale à

   (a) 0; ☐
   (b) 3; ☐
   (c) $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$. ☐

5. Soit $\overrightarrow{V} = xy\vec{i} + yz\vec{j} + xz\vec{k}$. Le rotationel de $\overrightarrow{V}$, $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{V}$, est égal à

   (a) $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ xy & yz & xz \end{vmatrix}$; ☐
   (b) $-x - y - z$; ☐
   (c) $-(y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k})$; ☐
   (d) $\nabla \wedge \vec{V}$. ☐

6. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}$. Alors :

   (a) $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{grad}} f)$ est toujours $\overrightarrow{0}$; ☐
   (b) $\mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{grad}} f)$ est toujours 0 ; ☐
   (c) $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f$ est une application de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^3$. ☐

7. L'expression $df(x) = f'(x)dx$

   (a) est une expression approchée ; ☐
   (b) est une définition ; ☐
   (c) est vrai de temps en temps. ☐

8. $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, r$ est

   (a) $\vec{r}/r$; ☐
   (b) $(x + y + z)/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; ☐
   (c) $-\vec{r}/r$. ☐

9. Une équation $x + y + 2xy = 5z$

   (a) représente une surface dans l'espace $\mathbb{R}^3$; ☐
   (b) est un plan ; ☐
   (c) repŕesente une courbe dans l'espace $\mathbb{R}^3$. ☐

Semaine 8.

Exercice 158

Calculer la longueur de la courbe paramétrée $\gamma : [0,2] \to \mathbb{R}^2$ définie par $\gamma(t) = (-\frac{4}{3}t^3+t-2, 2t^2+7)$.

Exercice 159

Calculer la longueur de la courbe paramétrée $\gamma : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$ définie par $\gamma(t) = (\cos t+\cos^2 t, \sin t+\sin t\cos t)$.

Exercice 160

Utiliser le théorème des fonctions implicites pour calculer la dérivée de y par rapport à x au point $(2,3)$, y étant défini par la relation $x^2+y^2-13=0$.

Exercice 161

Soit $(u,v) \to f(u,v)$ une application de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$ dans R. On pose :

$$g(x,y) = f(\arctan\frac{y}{x}, \arctan\frac{x}{y}).$$

Vérifier les hypothèses du théoréme des fonctions implicites pour la relation $g(x,y)=0$. Sur quel domain cette relation défini une fonction implicite $y=j(x)$? Calculer sa de'rive'e $j'(x)$ (il faudra untiliser le regle de châine pour la fonction composée). Expliciter la fonction j.

(la solution de ce problème est donnée sur la page

http ://nte-serveur.univ-lyon1.fr/immediato/ suivre les lines vers l'analyse puis fonctions implicites, exercices)

Exercice 162

Soient $f(x,y) = xy, g(x,y) = x+4y-16$ deux fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Maximiser la fonction $f(x,y)$, sous la contrainte $g(x,y)=0$.

Exercice 163

Pour $x \in [0,1]$ calculer la longueur de la courbe $y = x^{3/2}$.

Exercice 164

Définir l'intégrale d'une fonction à valeurs vectorielles le long d'une courbe de classe C^1.

***Exercice 165**

Montrer que $|\int_\gamma f\cdot ds| \leq L(\gamma)\max_\gamma \|f\|$, où f est une fonction de deux variables à valeurs dans $\mathbb{R}, \gamma$ est une courbe plane et $L(\gamma)$ sa longueur.

***Exercice 166**

Soit $f(x,y) = P(x,y)\overrightarrow{i} + Q(x,y)\overrightarrow{j}$. Soit Γ une courbe plane. Expliquer la formule :

$$\int_\Gamma f\cdot ds = \int_\Gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

Exercice 167

1. Soit $\gamma = (x(t),y(t))_{t\in[a;b]}$ une courbe paramétrée. Rappeller la formule donnant la longueur de cette courbe.
2. Soit Γ une courbe paramétrée en coordonnées polaires par $\rho=\rho(t)$ et $\theta=\theta(t)$ où $t\in[a;b]$. Montrer que la longueur de Γ est
$$\int_a^b \sqrt{\rho'^2+\rho^2\theta'^2}dt.$$

3. Soit γ la courbe d'équation polaire $\rho = 2(1+\cos\,\theta)$ pour $\theta \in [-\pi;\pi]$. Donner une paramétrisation en coordonnées polaires de cette courbe et calculer sa longueur.

Exercice 168

Pour $r > 0$, soit (Γ_r) la courbe d'équation $x^2/2 + y^2/3 = r^2$.

1. Quelle est la nature de Γ_r ? Donner une paramétrisation.
2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = x^3 + xy^2$. Donner la valeur de f en un point de la courbe.
3. La fonction f a-t-elle un maximum et un minimum sur la courbe ? Si oui, calculer chacun en fonction de r.
4. Soit E la partie du plan d'équation $x^2/2 + y^3/3 \leq 1$. Quelles sont les valeurs maximale et minimale de f sur E ?

Exercice 169 Soit $\overrightarrow{F} = r^2(x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j})$ où $r = x^2 + y^2$.

1. Calculer $\dfrac{\partial r}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial r}{\partial y}$.
2. Trouver $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{F}$.

Exercice 170

1. Paramétrer la courbe d'équation $9x^2 + 4y^2 - 8y = 32$.
2. Montrer que le point de coordonnées $(1, \frac{2+3\sqrt{3}}{2})$ appartient à la courbe et trouver le vecteur tangent en ce point.
3. Trouver le maximum et le minimum de la fonction $f(x,y) = x^2 - (y-1)^2$ sur la courbe.

Semaine 9.

***Exercice 171**

1. Donner la définition d'orientation d'une courbe.
2. Considerons la courbe donnée par l'equation $x = y^2,\ y \in [-3, 3]$. Ecrire deux parametrization de cette courbes donnant deux orientations opposée.

***Exercice 172**

Montrer que l'intégrale curviligne d'un champ de gradient ne dépend que des extrémités du chemin.

***Exercice 173**

Donner la définition de l'intégrale curviligne d'une fonction ̀valeurs réelles le long d'une courbe de classe C^1 par morceaux.

***Exercice 174**

1. Enoncer le théorème de Poincaré.
2. Définir les notions de *simplement connexe* et *connexe par arcs*.
3. Donner un exemple de domaine non simplement connexe de $\mathbb{R}^2$ et vérifiez votre exemple.

***Exercice 175**

1. Enoncer le théorème de Poincaré.
2. Donner les propriétés de l'integrale curviligne d'un champ de gradient.

***Exercice 176**

Définir l'intégrale d'une fonction à valeurs vectorielles le long d'une courbe de classe C^1 par morceaux.

Exercice 177

On considère le champ de vecteur suivant sur $\mathbb{R}^2$:

$$\overrightarrow{V}(x,y) = (2xy + y^2 - 1)\overrightarrow{i} + (2xy + x^2)\overrightarrow{j}.$$

1. Calculer l'intégrale curviligne de ce champ le long du segment de droite reliant les points $A = (1,0)$ et $B = (0,1)$ orienté de A vers B.
2. Sans avoir cherché le potentiel scalaire déterminer si $\overrightarrow{V}$ est un champ de gradient.
3. Soit Γ la courbe allant de A à B de paramétrisation

$$\begin{cases} x(t) & = \cos^5 t \\ y(t) & = \sin^4 t \end{cases} \; ; \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

   Calculer la circulation du champ $\overrightarrow{V}$ le long de Γ.

Exercice 178

Calculer l'intégrale curviligne

$$\int_{C^-} (2x - 2y)dx + (x^2 + y^2)dy$$

où C^- est le cercle de centre O et de rayon R décrit complètement dans le sens des aiguilles d'une montre.

Exercice 179

Calculer l'intégrale $\int_\Gamma \ln(x + y + z)\mathrm{d}s$ où Γ est le segment de droite joignant le point $(1,1,1)$ au point $(2,3,4)$.

Exercice 180

Calculer l'intégrale $\int_\Gamma x^5\mathrm{d}s$ où Γ est l'arc d'hyperbole d'équation $y = \dfrac{1}{x}$ d'extrémités $(1,1)$, $(4,1/4)$.

Exercice 181

Calculer l'intégrale curviligne

$$\int_\Gamma \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\mathrm{d}x + \frac{x + y}{x^2 + y^2}\mathrm{d}y$$

où Γ est le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 1 avec l'orientation directe.

Exercice 182

1. Ecrire une équation de la droite D passant par les points $(1,1)$ et $(2,4)$.
2. Calculer la valeur de l'intégral

$$\int_C (y - x)\mathrm{d}x + (y + x)\mathrm{d}y,$$

   où C est un segment de la droite D entre les points $(1,1)$ et $(2,4)$.

Exercice 183 Calculer l'intégrale curviligne

$$\int_{C^+} \frac{(x-y)dx + (x+y)dy}{x^2+y^2}$$

où C^+ est le cercle de centre O et de rayon R décrit complètement dans le sens direct.

Exercice 184

Calculer l'intégrale $\int_\Gamma z^3 \mathrm{d}s$ où Γ est la courbe paramétrée par $x = t^3 + 3t$, $y = t^3 - 3t$, $z = 3t$.

Exercice 185

Calculer l'intégrale curviligne

$$\int_\Gamma (x - y^2)\mathrm{d}x - (x + y^2)\mathrm{d}y$$

où Γ est le quart de cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 1 parcouru du point $(1,0)$ au point $(0,1)$.

Exercice 186

Calculer l'intégrale curviligne

$$\int_\Gamma (x - y^3)\mathrm{d}x + x^3\mathrm{d}y$$

où Γ est le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 1 avec l'orientation directe.

Semaine 10

***Exercice 187**

Énoncer la formule de changement de variables dans une intégrale double.

***Exercice 188**

Énoncer le théorème de Fubini.

***Exercice 189**

Donner la définition d'une partie quarrable de $\mathbb{R}^2$.

***Exercice 190**

Donner une formule de calcul d'aire d'une partie quarrable à l'aide d'une intégrale curviligne.

***Exercice 191**

Ennoncer le théorème de Green-Riemann. Donner une démonstration pour un champs de vecteur de la forme $\overrightarrow{V} = Q(x,y)\overrightarrow{j}$ sur un domain carré de sommets $(0,0), (0,1), (1,0)$ et $(1,1)$.

***Exercice 192**

Quel est le sens géométrique d'une intégrale double d'une fonction continue f sur une partie quarrable $D \subset \mathbb{R}^2$?

Quel est le sens géométrique d'une intégrale double d'une fonction $f(x,y) \equiv 1$ sur une partie quarrable $D \subset \mathbb{R}^2$?

Exercice 193

Calculer $\iint_D \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\ ,\ x \geq 0\ ,\ y \geq x - 1\}$.

Exercice 194

Calculer l'intégrale curviligne

$$\int_C xy\mathrm{d}y$$

où C est l'arc de cercle défini par $x = \cos t,\ y = \sin t,\ t$ variant de 0 à π.

Exercice 195

Soit $\gamma(t) = (3\cos t, 5\sin t, 4\cos t),\ t \in [0, \pi]$ une representation paramétrique d'une courbe Γ de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que la valeur absolue du vecteur tangent ne dépend pas de t.
2. Ecrire l'équation de la droite tangente au point $A = (\frac{3}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{2}, 2)$.
3. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de Γ avec le plan yz.

Exercice 196

Soit $\overrightarrow{F} = ay\overrightarrow{i} + bx\overrightarrow{j},\ a, b \in \mathbb{R}$ un champs de vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Trouver la relation entre a, b si l'intégrale curviligne de $\overrightarrow{F}$ lelong n'importe quelle courbe simple, C, est égale à l'aire du domain plain D dont C est la frontière.

Exercice 197

Calculer l'intégrale curviligne

$$\int_\Gamma (x - y^2)\mathrm{d}x - (x + y^2)\mathrm{d}y$$

où Γ est le quart de cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon 1 parcouru du point $(1, 0)$ au point $(0, 1)$.

Exercice 198

Calculer l'intégrale $\int_\Gamma\ z^3\mathrm{d}s$ où Γ est la courbe paramétrée par $x = t^3 + 3t$, $y = t^3 - 3t$, $z = 3t$.

Exercice 199

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = x^2 + 4y^2$.

1. Quelle est la nature de la ligne de niveau de f qui passe par le point de coordonnées $p = (3/2, 3\sqrt{3}/2)$? Donner une paramétrisation.
2. Calculer le vecteur tangent à cette ligne de niveau en p.
3. Calculer le gradient de f en p. Quel angle fait-il avec le vecteur tangent précédemment calculé ?

Exercice 200

Calculer l'intégrale curviligne

$$\int_\Gamma \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\mathrm{d}x + \frac{x + y}{x^2 + y^2}\mathrm{d}y$$

où Γ est le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon 1 avec l'orientation directe.

Exercice 201

Calculer l'intégrale $\int_\Gamma\ x^5\mathrm{d}s$ où Γ est l'arc d'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$ d'extrémités $(1, 1)$, $(4, 1/4)$.

Exercice 202

Changer l'ordre d'íntégration et calculer l'intégrale double

$$I = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} \frac{2xy}{1 - y^4}\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

Exercice 203

Calculer l'intégrale

$$\iiint_D z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z, \text{ avec } D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0 \text{ et } x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

Exercice 204

Déterminer les points d'intersection des deux courbes de $\mathbb{R}^2$ d'équations $y = 2x$ et $y = 4x - 2x^2$ puis représenter

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ 2x \leq y \leq 4x - 2x^2\}$$

et calculer l'aire de T.

Semaine 11.

Exercice 205 QCM. Attention : *chaque question peut avoir plus d'une reponse correcte. Pour avoir les points à la question il est imperatif de trouver toutes les reponses correctes.*

1. Le changement de variables $x = \rho \cos \theta$ et $y = \rho \sin \theta$ a pour jacobien $\dfrac{D(x, y)}{D(\rho, \theta)}$:

   (*a*) -1; ☐
   (*b*) 1; ☐
   (*c*) ρ; ☐
   (*d*) $\rho^2 \cos \theta \sin \theta$. ☐

2. Une intégrale $\displaystyle\int_\Gamma \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} \, \mathrm{d}t$

   (*a*) est une intégrale triple sur le domaine Γ ; ☐
   (*b*) calcule la longueur de la courbe Γ ; ☐
   (*c*) calcule l'aire de la surface Γ. ☐

3. Soit Δ le triangle défini par les trois droites : $x = 0,\ y = 1$ et $y = x$.
   L'intégrale double $\displaystyle\iint_\Delta xe^{xy} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ est égale à

   (*a*) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^1 xe^{xy} \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$; ☐
   (*b*) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^y xe^{xy} \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$; ☐
   (*c*) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_x^1 xe^{xy} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$; ☐
   (*d*) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^x xe^{xy} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$. ☐

4. Parmis les systèmes d'équations suivantes lesquelles définissent une courbe dans $\mathbb{R}^3$?

   (*a*) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$; ☐
   (*b*) $\begin{cases} x^2 + y^2 & = 1 \\ \quad z & = y \end{cases}$; ☐
   (*c*) $\begin{cases} x & = \cos t \\ y & = \sin t \\ z & = \sin t \end{cases}$. ☐

5. L'aire d'une partie quarrable $D \in \mathbb{R}^2$ avec le bord C est égale à

(a)	$\int_C x\mathrm{d}y$;	☐
(b)	$\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y$;	☐
(c)	$\int_C x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}x$.	☐

6. Soit l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = x^4 - x^2y + y^3 - 2x^2 + 2x - y^2$

(a)	Le point $(0,1)$ n'appartient à la ligne de niveau 0 ;	☐
(b)	le théorème des fonctions implicites s'applique en $(0,1)$;	☐
(c)	L'équation de la tangente à la courbe $f(x,y) = 0$ en $(0,1)$ c'est $x + y = 2$.	☐

7. L'intégrale curviligne sur une courbe $\gamma(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2,\ t \in [0,1]$ d'un champ de gradient

(a)	est toujours nulle ;	☐
(b)	ne depend pas du chemin ;	☐
(c)	est toujours positive.	☐

8. Soit $f : U \longrightarrow V$ avec U et V des parties ouvertes de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^q$ $(p,\ q \in \mathbb{N}^*)$. Les propositions suivantes sont correctes :

(a)	si la fonction f est différentiable elle est continue ;	☐
(b)	si f possède toutes les dérivées partielles elle est différentiable ;	☐
(c)	si f est de classe C^1 elle est continue ;	☐
(c)	si f est de classe C^1 ses dérivées partielles forment une matrice antisymétrique.	☐

Semaine 12.

Exercice 206 Déterminer l'aire de la partie D du plan délimitée par les courbes d'équation :

$$y = x, \quad y^2 = x.$$

Exercice 207 **a**) Calculer $\displaystyle\int\int_D (x-y)\ dxdy$ où D est une partie du plan délimitée par les droites d'équation :

$$x = 0, \quad y = x + 2, \quad y = -x$$

b) Calculer la même intégrale au moyen du changement de variables défini par :

$$u = x + y, \qquad v = x - y$$

Exercice 208 Calculer $\displaystyle\int\int_D xy\ dxdy$ où D est la partie du plan délimitée par les courbes d'équation :

$$y = x^2, \quad y = x^3.$$

Exercice 209 Soit $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. La droite d'équation $y = x$ délimite dans les carré $[0,1] \times [0,1]$ deux triangles égaux T_1 et T_2. Montrer que en général,

$$\int\int_{T_1} f(x,y)\ dxdy \neq \int\int_{T_2} f(x,y)\ dxdy.$$

Puis, en utilisant le changement de variable $u = y,\ v = x$, montrer que

$$\int\int_{T_1} xy\ dxdy = \int\int_{T_2} xy\ dxdy.$$

Exercice 210 Soit D le quart de disque unité défini par :

$$D = \{(x,y)| \quad 0 \leq x, \ 0 \leq y, \ x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Utiliser le passage en coordonnées polaires pour calculer l'intégrale :

$$I = \int\int_D (4 - x^2 - y^2) \ dxdy.$$

Exercice 211 Calculer $I = \iint_D \dfrac{1}{1 + x^2 + y^2} \, dxdy$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \dfrac{y^2}{2} \leq x \leq 2\}$

Exercice 212

Soit $I = \iint_{T_a} \sqrt{xy}\, e^{-x-y} \, dxdy$. avec $T_a = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0; y \geq 0; x + y \leq a\}$ et $a > 0$. On considère le changement de variables $\left\{ \begin{array}{l} x = tu \\ y = (1-t)u \end{array} \right.$

Calculer I.

Exercice 213 Aire en coordonnées polaires

Soit D le domaine limité par $r = p(\phi)$ avec $0 \leq \phi \leq 2\pi$; et le segment $\left\{ \begin{array}{l} \phi = 0 \\ p(0) \leq r \leq p(2\pi) \end{array} \right.$

1. Montrer que $\mathcal{A}(D) = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_0^{2\pi} p^2(\phi) \, d\phi$
2. Aire de la cardioïde : $r = 1 + \sin(\phi)$.
3. Aire de l'escargot ; $r = a\phi$
4. Dessiner les lignes de coordonnées $r = \mathcal{C}^{te}$ et $\phi = \mathcal{C}^{te}$ dans le plan des x, y
5. Dessiner les lignes de coordonnées $x = \mathcal{C}^{te}$ et $y = \mathcal{C}^{te}$ dans le plan des r, ϕ.