Epreuve du 28 octobre 2008
Amphi Lavoisier, 8h00-9h30

L'usage des documents autres que ceux distribués par le surveillant, des calculateurs, des téléphones portables est interdit.

Exercice 1 (Révisions de cours).

1. *Soit* $(E, ||\ ||)$ *un espace vectoriel normé. Montrer que l'application*

$$d \ : \ \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ (x,y) & \longmapsto & ||x-y|| \end{array}$$

   définit une distance sur E.

2. *Soient* $p,\ q \in \mathbb{N}^*$, U *une partie ouverte de* $\mathbb{R}^p$ *et* $f : U \to \mathbb{R}^q$ *une fonction définie sur* U. *Pour un point* $a \in U$ *écrire la condition qui définit que* f *est différentiable au point* a. *Montrer ensuite que si* f *est différentiable en* a, *alors elle est continue en* a.

Réponse : Révisez les notes de cours et les compléments de cours à

http ://math.univ-lyon1.fr/˜ altinel/licence.html

Exercice 2 (Topologie élémentaire).

1. *Montrer* **rigoureusement** *qu'un singleton (un ensemble à un élément) de* $\mathbb{R}$ *est un fermé de* $\mathbb{R}$ *mais qu'il n'est pas un ouvert de* $\mathbb{R}$. *Montrer* **rigoureusement** *que la partie suivante de* $\mathbb{R}^2$

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^3 + x_2^3 = 1\}$$

   est fermée.

2. *Considérons la sphère unité de centre* $(0,0)$ *dans* $\mathbb{R}^2$ *par rapport à la norme* $||\ ||_\infty$ *:*

$$S((0,0),1) = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \max(|x_1|,|x_2|) = 1\}\ .$$

   Définir sur cet ensemble un arc qui joint le point $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ *au point* $\left(1, -\frac{1}{2}\right)$ *en passant par le point* $(1,1)$. Afin de simplifier vos calculs, vous pouvez prendre $[0,1]$ comme ensemble de départ.

3. *Est-ce que la partie suivante de* $\mathbb{R}^2$ *est compacte ?*

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} B\left((0,0),\ 1 + \frac{1}{n}\right)$$

   Justifier votre réponse. Le choix de la norme sur $\mathbb{R}^2$ est arbitraire.

4. *La boule ouverte* $B((0,0),1)$ *dans* $\mathbb{R}^2$ *n'est pas compacte. Expliciter un recouvrement de* $B((0,0),1)$ *par des ouverts qui n'a pas de sous-recouvrement fini de* $B((0,0),1)$. *Justifier votre réponse.* Le choix de la norme sur $\mathbb{R}^2$ est arbitraire.

Réponse :

1. Soit $\{a\}$ un singleton de $\mathbb{R}$. Nous vérifierons que cet ensemble est un fermé de $\mathbb{R}$ en montrant que son complémentaire en est un ouvert. Soit alors b un nombre réel différent de a. Posons $\delta = \frac{|b-a|}{2}$. Alors $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ et $B(b,\delta) =]b-\delta,\ b+\delta[$ ne contient pas a. Par conséquent, la boule $B(b,\delta) \subset \mathbb{R} \setminus \{a\}$. Ceci est suffisant pour conclure que $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ est un ouvert. Ainsi, $\{a\}$ est un fermé de $\mathbb{R}$.

Afin de montrer que $\{a\}$ n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}$, il suffit de montrer qu'aucun intervalle ouvert non vide ne peut être contenu dans $\{a\}$. Or, un intervalle non vide contient au moins deux nombres réels (voire une infinité).

Soit maintenant

$$\begin{array}{rcccl} f & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x_1, x_2) & \longmapsto & x_1^3 + x_2^3 \ . \end{array}$$

La fonction f est continue en tout point de $\mathbb{R}^2$. L'ensemble $\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^3 + x_2^3 = 1\}$ est $f^{-1}(\{1\})$. Le paragraphe précédent et le théorème III.6.1 des notes de cours montrent que l'ensemble $\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^3 + x_2^3 = 1\}$ est fermé.

2. Voici la définition d'un arc qui fera la tache :

$$\begin{array}{rcccl} f & : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & & t & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} (1-2t)(\frac{1}{2},1) + 2t(1,1) & \text{si} \quad t \in [0,\frac{1}{2}] \\ (2-2t)(1,1) + (2t-1)(1,-\frac{1}{2}) & \text{si} \quad t \in [\frac{1}{2},1] \end{array} \right. \\ & & & = & \left\{ \begin{array}{ll} (\frac{1}{2}+t,1) & \text{si} \quad t \in [0,\frac{1}{2}] \\ (1,-3t+\frac{5}{2}) & \text{si} \quad t \in [\frac{1}{2},1] \end{array} \right. \end{array}$$

3. La vérification des détails de l'égalité suivante est un bon exercice pour ceux qui se sentent mal à l'aise dans ce métier :

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} B((0,0), 1 + \frac{1}{n}) \ = \ \overline{B}((0,0),1) \ .$$

Par conséquent, l'intersection de l'exercice est fermée et bornée. Dans $\mathbb{R}^2$, cette conclusion équivaut à ce qu'elle soit compacte.

4. Considérons le recouvrement par la famille suivante :

$$\mathcal{F} = \left\{ B\left((0,0), 1 - \frac{1}{n}\right) \ \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\} \right\} \ .$$

Une famille finie $\mathcal{F}_0$ extraite de $\mathcal{F}$ est de la forme suivante :

$$\mathcal{F}_0 = \left\{ B\left((0,0), 1 - \frac{1}{n_1}\right), \ldots, B\left((0,0), 1 - \frac{1}{n_k}\right) \ \mid n_i \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\} \text{ pour tout } j \in \{1,\ldots,k\} \right\} \ .$$

Nous pouvons supposer sans perte de généralité que $n_1 < \ldots < n_k$. Alors l'union des éléments de $\mathcal{F}_0$ est la boule

$$B\left((0,0), 1 - \frac{1}{n_k}\right) \ .$$

Cette boule ne contient pas la boule

$$B((0,0),1) \ .$$

Comme $\mathcal{F}_0$ est une famille finie arbitrairement extraite de $\mathcal{F}$, la conclusion est qu'il est impossible d'extraire de $\mathcal{F}$ un sous-recouvrement fini de $B((0,0),1)$.

Exercice 3 (Fonctions de plusieurs variables).
Nous étudierons dans cet exercice les propriétés de continuité et de différentiabilité de la fonction suivante :

$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \longmapsto \left\{ \begin{array}{ll} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{array} \right. \end{array}$$

1. Vérifier que f est continue à tout point de $\mathbb{R}^2$.

Réponse : A tout point $(x,y) \neq (0,0)$, la fonction f est définie à partir des fonctions élémentaires en utilisant leurs compositions ou leur appliquant les quatres opérations arithmétiques. Par conséquent, sa seule définissabilité suffit pour conclure qu'elle est aussi continue à chacun de ces points.

Quant à $(0,0)$, il est possible d'y vérifier la continuité en introduisant les coordonnées polaires :

$$x = r\cos(t) \qquad y = r\sin(t)\ .$$

Alors,

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(r,\theta) \\ &= r^2\cos(\theta)\sin(\theta)\frac{r^2(\cos^2(\theta)-\sin^2(\theta))}{r^2} \\ &= r^2\frac{\sin(2\theta)}{2}\cos(2\theta)\ . \end{aligned}$$

Les fonctions sin et cos étant bornées, la dernière ligne des égalités précédentes tend vers 0 quand r tend vers 0. En d'autre termes,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0\ ,$$

ce qui permet de conclure que f est continue en $(0,0)$ aussi.

2. Vérifier que f a ses dérivées partielles par rapport à chacune de ses deux variables à tout point de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Déterminer à tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $\partial_1 f(x,y)$ et $\partial_2 f(x,y)$.

Réponse : La fonction f a des dérivées partielles à tout point $(x,y) \neq (0,0)$ parce qu'au voisinage de chaque point différent de $(0,0)$, elle est de classe $\mathcal{C}^1$. En effet, à tout tel voisinage, la fonction f est définie à partir des fonctions élémentaires en utilisant leurs compositions ou leur appliquant les quatres opérations arithmétiques.

L'existence vérifiée, la détermination des dérivées partielles est une application des règles de quotient. La conclusion est la suivante :

$$\partial_1 f(x,y) = y\frac{x^4+4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2}$$

et

$$\partial_2 f(x,y) = x\frac{x^4-4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2}$$

3. Est-ce que f a des dérivées partielles au point $\{(0,0)\}$?

Réponse : A tout voisinage du point $(0,0)$, f est définie de deux façons différentes. Alors, pour vérifier l'existence des dérivées partielles en $(0,0)$, nous appliquons directement la définition de la dérivée partielle. Or les deux limites

$$\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0$$

et
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=0$$
confirment l'existence recherchée.

Notons que les raisonnement de ce paragraphe permettent de définir les fonctions $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ sur $\mathbb{R}^2$:
$$\begin{array}{rcccl} \partial_1 f & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{lll} y\frac{x^4+4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2} & \text{si} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si} & (x,y)=(0,0) \end{array} \right. \end{array}$$
et
$$\begin{array}{rcccl} \partial_2 f & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{lll} x\frac{x^4-4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2} & \text{si} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si} & (x,y)=(0,0) \end{array} \right. \end{array}$$

4. Déterminer le plus grand sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ sur lequel la fonction f est différentiable. Déterminer le plus grand sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ sur lequel f est de classe $\mathcal{C}^1$.

Réponse : Pour répondre à ce point, nous montrerons en utilisant les coordonnées polaires que les fonctions $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ définies dans le point précédent sont continues au point $(0,0)$. Après introduction des coordonnées polaires, le raisonnement se résume aux calculs suivants :
$$\lim_{\rho\to 0}\rho\sin(\theta)\frac{\rho^4\cos^4(\theta)+4\rho^4\sin^2(\theta)\cos^2(\theta)-\rho^4\sin^4(\theta)}{\rho^4}$$
et
$$\lim_{\rho\to 0}\rho\cos(\theta)\frac{\rho^4\cos^4(\theta)-4\rho^4\sin^2(\theta)\cos^2(\theta)-\rho^4\sin^4(\theta)}{\rho^4}\ .$$
Ces deux limites existent et sont nulles. Les détails font partie de votre préparation pour l'examen final.

Les conclusions du paragraphe précédent et les remarques au début du point 2 ci-dessus permettent la conclusion suivante :
$$f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)\ .$$

Exercice 4 (Fonctions de plusieurs variables).
L'objectif de cet exercice est d'étudier les propriétés de continuité et de différentiabilité de la fonction
$$\begin{array}{rcccl} f & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \longmapsto & \max(|x|,|y|) \end{array}$$

1. Vérifier **rigoureusement** *que la fonction*
$$\begin{array}{rcccl} g & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \longmapsto & \max(x,y) \end{array}$$
est continue en tout point de $\mathbb{R}^2$ *(*Vous pouvez utiliser la norme $||\ ||_\infty$ sur $\mathbb{R}^2$; à tout point $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, vous pouvez considérer deux cas, notamment $a=b$ et $a>b$*).*

En utilisant la continuité de la fonction $x\longrightarrow|x|$ (vous pouvez admettre celle-ci), déduire du paragraphe précédent que f est continue en tout point de $\mathbb{R}^2$.

Réponse : Pour répondre à la première partie de cette question, nous fixons un point $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Dans un premier temps nous supposerons $a > b$ et nous vérifierons sous cette condition que g est continue en (a, b). Soit donc δ un nombre réel strictement positif et strictement plus petit que $b - a$. Par rapport à la norme $|| \; ||_\infty$, si $(x, y) \in B((a, b), \delta)$, alors $x > y$. Par conséquent, pour ce choix de (x, y), $g(x, y) = x$. Il en découle que $\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x, y) = a = g(a, b)$. Ainsi, nous avons vérifié la continuité au point (a, b) à condition que $a > b$. Un raisonnement symétrique qui consiste à remplacer a par b permet de vérifier la continuité en (a, b) quand $a < b$.

Il reste donc à étudier la continuité de g aux points (a, a). Or, à tout voisinage d'un tel point diagonal, chacune des deux coordonnées d'un point (x, y) tend vers a quand (x, y) tend vers (a, a). Ainsi, la limite $\lim_{(x,y)\to(a,a)} g(x, y)$ est encore une fois la valeur de la fonction au point fixé, soit a.

Comme la fonction $x \longmapsto |x|$ est continue à tout point de $\mathbb{R}$, la fonction $(x, y) \longmapsto (|x|, |y|)$ est continue en tout point de $\mathbb{R}^2$ (la proposition III.5.3 des notes de cours). Maintenant nous considérons la composition suivante :

$$(x, y) \longmapsto (|x|, |y|) \longmapsto g(|x|, |y|) \; .$$

C'est la composition de deux fonctions continues en tout (x, y), et sa valeur finale est $f(x, y)$. Ainsi, la fonction f est continue en tout point de $\mathbb{R}^2$.

2. A l'aide d'un dessin, indiquer les régions suivantes sur le plan cartésien :

(A) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| = |y|\}$;
(B) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| > |y|\}$;
(C) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < |y|\}$.

Réponse : Vous êtes vivement conseillés de méditer sur les dessins à faire pour répondre à cette question.

3. Vérifier que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur les régions (B) et (C) du point 2. Déterminer le jacobien de f à tout point des régions (B) et (C).

Réponse : Si (x, y) est un point de la région (B), alors

$$f(x, y) = |x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x > 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Suivant les deux possibilités $\partial_1 f(x, y) = 1$ ou $\partial_1 f(x, y) = -1$ respectivement. De l'autre côté $\partial_2 f(x, y) = 0$. Les deux possibilités pour le jacobien sont respectivement :

$$(1 \quad 0) \;\; \text{et} \;\; (-1 \quad 0) \; .$$

Si (x, y) est un point de la région (C), alors

$$f(x, y) = |y| = \begin{cases} y & \text{si} \quad y > 0 \\ -y & \text{si} \quad y < 0 \end{cases}$$

Alors $\partial_1 f(x, y) = 0$ tandis que $\partial_2 f(x, y)$ est 1 ou -1 suivant respectivement les deux possibilités pour le signe de y. Finalement, nous obtenons les deux possibilités suivantes pour le jacobien sont respectivement :

$$(0 \quad 1) \;\; \text{et} \;\; (0 \quad -1) \; .$$

4. Calculer les limites suivantes quand $x \geq 0$:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\max(|x+h|, |x|) - |x|}{h} \quad ; \quad \lim_{h\to 0^-} \frac{\max(|x+h|, |x|) - |x|}{h}$$

Faites les mêmes calculs quand $x \leq 0$.

Réponse : Nous supposons d'abord $x \geq 0$. Alors, $|x+h| \geq |x|$ si $h \in \mathbb{R}_+$ et $|x+h| \leq |x|$ si $h \in \mathbb{R}_-$. Ces deux conclusions donnent les limites suivantes respectivement :

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{\max(|x+h|, |x|) - |x|}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{|x+h| - |x|}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{x+h-x}{h} = 1 \ ;$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{\max(|x+h|, |x|) - |x|}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{|x| - |x|}{h} = 0 \ .$$

Maintenant, faisons les mêmes calculs quand $x \leq 0$. Sous cette hypothèse, $|x+h| \leq |x|$ si $h \in \mathbb{R}_+$ et $|x+h| \geq |x|$ si $h \in \mathbb{R}_-$. Alors, respectivement,

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{\max(|x+h|, |x|) - |x|}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{|x| - |x|}{h} = 0 \ ;$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{\max(|x+h|, |x|) - |x|}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{|x+h| - |x|}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-x-h+x}{h} = -1 \ .$$

5. En utilisant le point 4, déterminer à quels points de la région (A) la fonction f est différentiable.

Réponse : Le point précédent montre qu'en aucun point de la région (A), il n'est possible de définir les dérivées partielles. Ainsi, en aucun point de la région (A) la fonction f n'est différentiable.