UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON 1 — Cours et travaux dirigés:
Institut Camille Jordan — Tuna Altınel

Math IV, Analyse (Automne 2009) – Fiche 5 : Exercices supplémentaires

17 novembre 2009

Exercice 1.
Soient

$$f_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (u,v) \longmapsto \begin{cases} \frac{v}{u} & \text{si } u \neq 0 \\ 0 & \text{si } u = 0\ . \end{cases}$$

et

$$f_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (u,v) \longmapsto u+v\ .$$

En utilisant ces deux fonctions nous définissons la fonction f :

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (u,v) \longmapsto (f_1(u,v), f_2(u,v)) = \begin{cases} (\frac{v}{u}, u+v) & \text{si } u \neq 0 \\ (0,0) & \text{si } u = 0\ . \end{cases}$$

1. Tracer la région du plan cartésien définie par

   $$f_1^{-1}(\{1\}) \cup f_2^{-1}(\{1\})$$

   Cette région est-elle connexe par arcs ? Vérifier votre réponse rigoureusement.
2. Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.
3. En quels points de $\mathbb{R}^2$ est-ce que les dérivées partielles de f_1 et de f_2 sont définies ? Déterminer leurs valeurs en ces points.
4. Déterminer la matrice Jacobienne de f en tout point où elle existe.

Exercice 2.
Vérifier l'égalité suivante pour deux fonctions $f,\ g$ de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}$ différentiables sur un ouvert de U de $\mathbb{R}^p$:

$$\text{pour tout } a \in U\ , \quad \nabla(fg)(a) = (\nabla f(a)).g(a) + f(a).(\nabla g(a))\ .$$

A droite, les . symbolisent le produit d'un vecteur par un scalaire.

Exercice 3.
Nous étudions la fonction suivante :

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x,y) \longmapsto 5 - \frac{x^2}{4} - y^2\ .$$

1. Dessiner dans $\mathbb{R}^2$ les lignes de niveau L_k pour $k \in \{0, 1, 4, 5\}$.
2. Esquisser le graphe de f, pour les points $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $z = f(x,y) \geq 0$.
3. Déterminer la formule générale du gradient de f en un point (x,y).
4. Trouver la *direction de la plus grande pente* de f au point $(1, 1/2)$. Déterminer le vecteur unitaire correspondant.
5. Trouver les directions où la dérivée directionelle au point $(1, 1/2)$ est zéro.