UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON 1 | Cours et travaux dirigés:
Institut Camille Jordan | Tuna Altınel

# Math IV, Analyse (Automne 2009) – Fiche Exercices supplémentaires, 2

**15 décembre 2009**

**Exercice 1 (Taylor en une et deux variables).**
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. On définit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par

$$F(x,y) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} & \text{si } x \neq y \\ f'(x) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que $F$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

**Exercice 2 (Multiplicateurs de Lagrange).**

1. Soit $s \in \mathbb{R}_+^*$ et $D = \{(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n \mid x_1 + \ldots + x_n = s\}$. Soit $f : (\mathbb{R}_+^*)^n \to \mathbb{R}_+$ la fonction définie par $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \ldots x_n$. En utilisant les multiplicateurs de Lagrange, trouver la valeur maximale atteinte par $f$ sur l'ensemble $D$.
2. En déduire que, pour tous $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$, on a l'inégalité : $(x_1 \ldots x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1+\ldots+x_n}{n}$.

**Exercice 3 (Directions).**
Nous étudierons la fonction

$$\begin{array}{rcccl} g & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \longmapsto & \ln(\sqrt{x^2+y^2}) \end{array}$$

1. Déterminer le domaine de $g$.
2. Déterminer les lignes de niveau de $g$.
3. Déduire du point précédent la nonexistence d'extréma locaux pour $g$.
4. Calculer le gradient de $g$ et montrer que la norme de celui-ci est constante le long de tout cercle centré en $(0,0)$.
5. En tout point $(x,y) = (r,\theta)$ du domaine de $g$, déterminer la dérivée directionnelle de dans la direction $(\cos\theta, \sin\theta)$.
6. En fonction de $(x,y)$, déterminer les directions dans lesquelles la dérivée directionnelle de $g$ admet des valeurs extrémales.

**Exercice 4 (TFI, courbes).**

1. Etudier la fonction
$$h \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{\ln(x)}{x} \end{array}$$
et tracer soigneusement son graphe.
2. En utilisant le point précédent, déterminer tous les points $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ tels que
$$\frac{\ln(x)}{x} = \frac{\ln(y)}{y} \; .$$
Conclure que pour tout $x \in \,]-\infty, 1] \cup \{e\}$ il y a une solution et une seule tandis que pour $x \in \,]1, e[\cup]e, +\infty[$ il existe exactement deux solutions.

   *A partir de maintenant, nous étudierons* $L_0(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | f(x, y) = 0\}$ de la fonction
$$f \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x^y - y^x \end{array}$$
3. Déterminer les points de $L_0(f)$ où le TFI s'applique. En utilisant le point précédent, conclure qu'on peut "expliciter" deux fonctions :
$$y \; = \; x \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}_+^* \quad ; \quad y \; = \; \phi(x) \text{ pour tout } x \in ]1, e[\cup]e, +\infty[ \quad .$$
4. Etudier $\phi : ]1, e[\cup]e, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$ après avoir déterminé sa dérivée $\phi'$ (La dérivée est en effet définie en tous les points du domaine de $\phi$). Calculer les limites
$$\lim_{x \to e^+} \phi(x) \quad ; \quad \lim_{x \to e^-} \phi(x) \; .$$
Déduire de ce calcul qu'il est possible de prolonger la fonction $\phi$ par continuité en $x = e$. Que pouvez-vous dire de la dérivabilité de cette prolongation en $x = e$ ?
5. Tracer soigneusement le graphe de $\phi$.