Epreuve du 24 novembre 2009
Lippman 207, 8h00-9h30

L'usage des documents autres que ceux distribués par le surveillant, des calculateurs, des téléphones portables est interdit.
L'épreuve sera terminée à 9h30, auquel moment, si vous êtes toujours présent en salle, vous êtes prié d'arrêter d'écrire afin de ne pas compliquer la ramassage des copies.
N'oubliez pas s'il vous plaît de signer la liste avant de partir.

Il y aura une séance de cours dans la salle Lippman 139 (salle de TD) de 10h à 12h.

Exercice 1 (Topologie générale).

1. *(2 pts) Démontrer qu'un espace normé qui contient au moins deux points n'est pas compact.*
2. *(2 pts) Vérifier que dans un espace normé $(E, \| \ \|)$, la boule unité ouverte de autour de l'origine*
$$\{\ x \in E \mid \|x\| < 1\ \}$$
est convexe.
3. *(2 pts) Soit E la partie de $\mathbb{R}^2$ qui est l'union de la sphère euclidienne avec le segment de droite joignant $(-1, 0)$ au point $(1, 0)$. Plus mathématiquement,*
$$E = \{\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\ \} \ \cup \ \{\ (t, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid \ -1 \le t \le 1\ \}\ .$$
Trouver un arc joignant dans E le point $(0, 0)$ au point $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

Réponse : 1. Soit $(E, \| \ \|)$ un espace normé avec au moins deux points, disons u et v. Comme $u \neq v$, l'un d'entre eux est non nul, disons u. Etant un espace vectoriel réel, E contient le sous-espace engendré par u
$$\mathbb{R}u \ = \ \{\ ru \mid r \in \mathbb{R}\ \}\ .$$
Or $\|ru\| = |r|\|u\| \neq 0$ pour tout $r \in \mathbb{R}^*$. Ceci montre que $\mathbb{R}u$ n'est pas borné, et que par conséquent, E contient des vecteurs de normes arbitrairement larges. Ainsi E n'est pas borné, donc pas compact.

Signalons une réalité souvent oubliée. Un ensemble compact peut contenir des parties non compactes. En effet, il suffit de penser à la boule fermée unité qui est compacte, et à son intérieur qui ne l'est pas. Or, toute partie d'un ensemble borné est borné.

2. Soient x, y deux points dans la boule unité ouverte dans E. Le segment de droite qui joint x à y est l'ensemble de points
$$S \ = \ \{\ (1-t)x + ty \mid t \in [0, 1]\ \}\ .$$
Il suffira de vérifier que S est une partie de la boule en question. Or,
$$\|(1-t)x + ty\| \ \le \ |1-t|\|x\| \ + \ |\lambda|\|y\| \ < \ 1 - t + t = 1\ .$$

3. Pour cette question, il y a bien évidemment beaucoup de choix pour établir les équations finales. Nous en adoptons un. Notons qu'en raison du changement au point $(1, 0)$, il y aura au moins deux fonctions qui participeront à la solution finale.

Nous divisons le chemin à parcourir en deux morceaux dont le premier est l'ensemble

$$\text{(I)} \qquad \{\ (t, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in [0, 1]\ \}\ ,$$

et le deuxième est l'ensemble

$$\text{(II)} \qquad \{\ (\cos t, \sin t) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in [0, \frac{\pi}{3}]\ \}\ .$$

Dans ce choix, il est déjà visible que nous sommes près de la définition d'un arc qui joint le point $(0, 0)$ au points $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$. En effet, si nous fixons notre ensemble de départ à l'intervalle $[0, 2]$, dont le sous-intervalle $[0, 1]$ sera consacré au au chemin (I), alors la première moitié de l'arc est déterminée :

$$\begin{array}{rcccl} \gamma_{(I)} & : & [0,1] & \longrightarrow & E \\ & & t & \longmapsto & (t,0)\ . \end{array}$$

Quant à la moitié (II), il suffit de décrire les angles entre 0 et $\frac{\pi}{3}$ quand le "temps" avance de 1 à 2. C'est le segment de droite de $(1, 0)$ à $(2, \frac{\pi}{3})$ dans le système de coordonnées (t, θ). Puisque deux points de cette droite sont données, vous pouvez utiliser la méthode des td pour déterminer l'équation

$$\begin{aligned} \frac{\theta(t) - 0}{t - 1} &= \frac{\frac{\pi}{3} - 0}{2 - 1} \\ \theta(t) &= \frac{\pi}{3}(t - 1)\ . \end{aligned}$$

Alors, la deuxième moitié de l'arc est définie en utilisant la fonction suivante :

$$\begin{array}{rcccl} \gamma_{(II)} & : & [1,2] & \longrightarrow & E \\ & & t & \longmapsto & \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}(t-1)\right), \sin\left(\frac{\pi}{3}(t-1)\right)\right)\ . \end{array}$$

Finalement, il est clair que $\gamma_{(I)}$ parcourt une partie de E. En ce qui concerne $\gamma_{(II)}$, l'identité générale bien connue $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$ assure que $\gamma_{(II)}([1, 2]) \subset E$.

Exercice 2 (Généralités différentielles).
(2 pts) Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$, A une matrice $q \times p$ à entrées réelles et T l'application linéaire suivante :

$$\begin{array}{rcccl} T & : & \mathbb{R}^p & \longrightarrow & \mathbb{R}^q \\ & & x & \longmapsto & A.x \end{array}$$

Vérifier que T est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^p$. Déterminer sa différentielle.

Réponse : Il faut et il suffit de vérifier que la limite

$$\lim_{\substack{\|h\| \to 0 \\ h \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\}}} \frac{\|T(x+h) - T(x) - L.h\|_{\mathbb{R}^q}}{\|h\|_{\mathbb{R}^p}}$$

est nulle avec une certaine application linéaire représentée par une matrice $q \times p$ L à déterminer. Si ceci aboutit, alors le problème est résolu puisque l'unicité de la différentielle nous dira alors que

$(dT)_x = L$. Or T est une application linéaire déterminée par la multiplication matricielle $x \to A.x$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{\|h\| \to 0 \\ h \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\}}} \frac{\|T(x+h) - T(x) - L.h\|_{\mathbb{R}^q}}{\|h\|_{\mathbb{R}^p}} &= \lim_{\substack{\|h\| \to 0 \\ h \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\}}} \frac{\|A.(x+h) - A.(x) - L.h\|_{\mathbb{R}^q}}{\|h\|_{\mathbb{R}^p}} \\
&= \lim_{\substack{\|h\| \to 0 \\ h \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\}}} \frac{\|(A-L).h\|_{\mathbb{R}^q}}{\|h\|_{\mathbb{R}^p}}
\end{aligned}$$

Si nous posons $L = A$, alors comme le numérateur est identiquement 0, la limite est inévitablement 0. Nous concluons alors que $(dT)_x = A$.

Exercice 3 (Continuité).
(4 pts) Etudier la continuité de la fonction suivante en tous les points de $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{array}{rcccl} f & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \sin(x)\cos\left(\frac{1}{y}\right) & si\ y \neq 0 \\ 0 & si\ y = 0 \end{cases} \end{array}$$

Réponse : Trois familles de points dans $\mathbb{R}^2$, présentent trois types de réponses :

(i) La fonction f est continue en tout point de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) | x \in \mathbb{R}\}$. En effet, autour d'un tel point, il y a un voisinage (plus précisément, une boule ouverte) où f est définie par la loi $(x,y) \mapsto \sin(x)\cos\left(\frac{1}{y}\right)$. C'est une loi définie en utilisant des fonctions qui sont continues en tout point où elles sont définies.

(ii) La fonction est continue en tout point de la forme $(k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$. En effet,

$$\lim_{(x,y) \to (k\pi,0)} |f(x,y)| = \lim_{(x,y) \to (k\pi,0)} |\sin(x)\cos\left(\frac{1}{y}\right)| \leq \lim_{(x,y) \to (k\pi,0)} |\sin(x)| = 0 \ .$$

(iii) La fonction n'est continue en aucun point de la forme $(a,0)$ où $a \neq k\pi$ et $k \in \mathbb{Z}$. En effet, au voisinage d'un tel point, si (x,y) tend vers $(a,0)$ en admettant les valeurs $(a, \frac{1}{k\pi})$, $k \in \mathbb{Z}$, nous arrivons à deux valeurs d'adhérences non nulles, donc distinctes : $\pm\sin(a)$.

Exercice 4 (Dérivées partielles).
Dans cet exercice nous étudierons la fonction suivante :

$$\begin{array}{rcccl} f & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} x^2+y^2 & si\ x^2+y^2 \leq 1 \\ 2-(x^2+y^2) & si\ x^2+y^2 \geq 1 \end{cases} \end{array}$$

1. *(1 pt) Tracer <u>soigneusement</u> sur le plan cartésien la ligne de niveau L_1.*
2. *(4 pts) En tout point $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a^2+b^2 = 1$, vérifier si f a des dérivées partielles, et expliciter ces dérivées en fonction de a et b quand elles existent.*

3. *(3 pts) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a^2+b^2=1$. Déterminer si la dérivée directionnelle $D_{(a,b)}f(a,b)$ est définie.*
4. *(2 pts) Vérifier que f est différentiable en tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x^2+y^2 \neq 1$, et y calculer sa matrice jacobienne.*
5. *(1 pt) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x^2+y^2 \neq 1$. Déterminer la direction de la plus grande pente en ce point.*

Réponse :

1. La ligne de niveau rechercée est le cercle unité par rapport à la norme euclidienne :

$$\{ \ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1 \ \} \ .$$

2. Nous appliquerons l'approche directe au problème : la détermination directe des dérivées partielles en utilisant la définition de la notion. Il est toujours possible de faire des raccourcis en utilisant des dérivées à gauche et à droite, mais appliquons l'approche générale et comprenons bien ce qui se passe.

Commençons par la dérivée partielle par rapport à la première variable en (a,b). Supposons $a \geq 0$. Pour $h < 0$,

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h} &= \frac{(a+h)^2+b^2-(a^2+b^2)}{h} \\ &= \frac{2ah+h^2}{h} \\ &= 2a+h \ ; \end{aligned}$$

tandis que pour $h > 0$,

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h} &= \frac{2-[(a+h)^2+b^2]-(a^2+b^2)}{h} \\ &= \frac{-2ah+h^2}{h} \\ &= -2a+h \ . \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h} = 2a \quad \text{et} \quad \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h} = -2a \ .$$

Ainsi, les limites à gauche et à droite ne sont égales que quand $a = 0$. Cette possibilité correspond aux points $(0,1)$ et $(0,-1)$.

Ensuite supposons $a \leq 0$. Pour $h < 0$,

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h} &= \frac{2-[(a+h)^2+b^2]-(a^2+b^2)}{h} \\ &= \frac{-2ah+h^2}{h} \\ &= -2a+h \ . \end{aligned}$$

tandis que pour $h > 0$,

$$\begin{aligned}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h} &= \frac{(a+h)^2+b^2-(a^2+b^2)}{h} \\ &= \frac{2ah+h^2}{h} \\ &= 2a+h \ ;\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h} = -2a \quad \text{et} \quad \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h} = 2a \ .$$

Encore une fois, on constate que, la dérivée partielle par rapport à la première variable aux points de L_1 n'est définie qu'en $(0,1)$ et $(0,-1)$.

Le même raisonnement appliqué à la seconde variable montre que la dérivée partielle par rapport à la deuxième variable aux points de L_1 n'est définie qu'en $(1,0)$ et $(-1,0)$.

Les valeurs des dérivées qui existent sont 0 à chacun des quatre points.

3. Le raisonnement pour les dérivées directionnelles est similaire aux calculs du point (2). Ce qui change c'est la direction. Il faut bien noter qu'on ne peut pas utiliser la proposition 3.8.1 du cours parce que la fonction n'est pas différentiable aux points de L_1. C'est une conséquence du point (2). Alors, il ne reste que la définition à appliquer.

Quand $h < 0$,

$$\begin{aligned}\frac{f((a,b)+h(a,b))-f(a,b)}{h} &= \frac{(1+h)^2(a^2+b^2)-(a^2+b^2)}{h} \\ &= \frac{2h+h^2}{h} \\ &= 2+h \ ;\end{aligned}$$

tandis que pour $h > 0$,

$$\begin{aligned}\frac{f((a,b)+h(a,b))-f(a,b)}{h} &= \frac{2-[(1+h)^2(a^2+b^2)]-(a^2+b^2)}{h} \\ &= \frac{2-ah+h^2}{h} \\ &= -2+h \ .\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f((a,b)+h(a,b))-f(a,b)}{h} = 2 \quad \text{et} \quad \lim_{h\to 0^+} \frac{f((a,b)+h(a,b))-f(a,b)}{h} = -2 \ .$$

En conclusion, les dérivées directionnelles ne sont définies en aucun point (a,b) tel que $a^2+b^2=1$.

4. Les points qui satisfont la condition de cette question sont contenues dans une boule ouverte où la fonction est définie par $(x,y) \mapsto x^2+y^2$ ou $(x,y) \mapsto 2-(x^2+y^2)$. Ces lois définissent des fonctions différentiables sur tout ouvert où ces fonctions sont définies. Alors leurs jacobiennes en (x,y) sont des formes $\begin{pmatrix} 2x & 2y \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} -2x & -2y \end{pmatrix}$ respectivement.

5. Les directions demandées étaient déterminées à la fin de la section 3.7 du cours. Elles sont celles des vecteurs gradients aux points données, donc de $(2x,2y)$ et $(-2x,-2y)$ suivant respectivement les définitions $(x,y) \mapsto x^2+y^2$ ou $(x,y) \mapsto 2-(x^2+y^2)$.

Exercice 5 (Fonctions de plusieurs variables à valeurs vectorielles).
Voici une fonction de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & & (x_1, x_2) & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} \left(x_1 x_2, \frac{x_1}{x_2}\right) & si\ x_2 \neq 0 \\ (0,1) & si\ x_2 = 0 \end{array} \right. \end{array}$$

1. *(2 pts) Déterminer et tracer* <u>*soigneusement*</u> *sur le plan cartésien l'image directe* $f(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)$.
2. *(2 pts) Déterminer la matrice jacobienne de* f *en tout point* $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ *tel que* $x_1 x_2 \neq 0$.

Réponse :

1. Le constat qui guide le raisonnement pour répondre au premier point est que le système d'équations

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 x_2 & = & \alpha \\ \frac{x_1}{x_2} & = & \beta \end{array} \right.$$

a une solution dans $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$. En effet, un tel choix de (α, β) implique que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & \sqrt{\alpha\beta} \\ x_2 & = & \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \end{array} \right. .$$

Il suffit alors de déterminer quels points $(x_1, 0) \in \mathbb{R}_+ \times \{0\}$, $(0, x_2) \in \{0\} \times \mathbb{R}_+$ sont dans $f(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)$.

Le quotient $\frac{x_1}{x_2}$ n'est égal à 0 que si $x_1 = 0$, tandis que $x_1 x_2 = 0$ si et seulement si $x_1 = 0$ ou $x_2 = 0$. Si $x_1 = 0$, alors la seule possibilité pour l'image est $(0, 0)$. Par conséquent, $f(\{0\} \times \mathbb{R}_+^*) = \{(0, 0)\}$. Si $x_2 = 0$, alors par définition $f((x_1, 0)) = (0, 1)$ pour tout $x_1 \in \mathbb{R}_+$. Ainsi,

$$f(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \ \cup \ \{(0, 0), (0, 1)\} .$$

2. En tout point $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$, les deux fonctions coordonnées sont définies à partir des fonctions produit ou quotient qui sont de classe $\mathcal{C}^1$, voire $\mathcal{C}^\infty$, sur tout ouvert dans leurs domaines. Par conséquent, la forme générale de la jacobienne à ces points est la suivante :

$$\begin{pmatrix} x_2 & x_1 \\ \frac{1}{x_2} & -\frac{x_1}{x_2^2} \end{pmatrix} .$$